

Robust 모델추종 제어계통에 관한 연구

전 희 영 * 박 귀 태 * 권 심 하 ** 이 종 렬 **

* 고려대학교 전기공학과 ** 창원대학 전기공학과

A Study on the Robust Model-Following Control Systems

Hee-Young Chun and Gwi-Tae Park
Korea University

Sung-Ha Kwon and Jong-Ryeol Lee
Chang-Won National University

Abstract

This paper proposes a robust model following control system which realizes good properties such as asymptotic stability, disturbance rejection and model following with reduced sensitivity for plant parameter variation.

This algorithm can be easily applied to the multivariable control systems and the control structure is simple. As an example the aircraft control system of a convair C-131B is designed and its characteristics are examined by simulation.

1. 서 론

계통의 파라미터 변동이나 외란이 있을 때는 선형모델추종제어(Linear Model Following Control:LMFC)가 적합하지 못하기 때문에 적응모델 추종제어(Adaptive Model Following Control:AMFC)로 대응하고 있지만 AMFC는 보조신호 발생 동특성을 별도로 해석하여야 하고 계통의 구조가 커지면 보조 미분방정식의 수가 크게 증가하여 수렴속도가 느려지거나 불안정한 계통이 될 우려가 있다.

이러한 단점을 보완하기 위하여 본 논문에서는 편차과도 상태를 임의로 설계할 수 있고 구조가 간단하며 외란이나 파라미터 변동에 강력히 대응하는 Robust 모델추종 제어계통(Robust Model Following Control:RMFC)을 제시한다. 그리고, 다변수 입력계통인 항공기 제어계통에 본 이론을 적용하여 사례연구를 하였다.

2. 본 론

(1) 완전 모델 추종 조건

$$\dot{X}_p(t) = A_p(t)X_p(t) + B_p(t)U_p(t) + h(t) \quad (1)$$

$$\dot{X}_m(t) = A_m X_m(t) + B_m U_m(t) \quad (2)$$

여기서 $X_p \in R^n$, $X_m \in R^n$, $U_p \in R^m$, $U_m \in R^l$, $h \in R^n$ 이다.

(A_p, B_p) 쌍과 (A_m, B_m) 쌍은 안정가능하고 A_m 행렬은 안정하다고 가정한다.

모델추종제어는 시간이 지남에 따라 모델과 플랜트 사이의 편차가 0으로 수렴하도록 제어신호를 발생하는 것으로 편차는 식(3)과 같고 이를 제어신호의 차수로 변환시킨 새로운 벡터를 식(4)와 같이 정의한다.

$$E(t) = X_m(t) - X_p(t) \quad (3)$$

$$S(t) = GE(t) \quad (4)$$

여기서 $E \in R^n$, $S \in R^m$ 이며 G 는 $(m \times n)$ 차원의 행렬이다.

$$\dot{E}(t) = \dot{X}_m(t) - \dot{X}_p(t) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= G\dot{E}(t) \\ &= G[A_m E + (A_m - A_p)X_p + B_m U_m - B_p U_p - h] \end{aligned} \quad (6)$$

완전모델추종일 때 식(6)은 0이 되며 이때 제어입력을 등가 제어입력이라 하면 다음과 같다.

$$U_p e q = (GB_p)^{-1} G[A_m E + (A_m - A_p)X_p + B_m U_m - h] \quad (7)$$

식(7)을 식(5)에 대입하면

$$\dot{E} = [I - B_p(GB_p)^{-1}G][A_m E + (A_m - A_p)X_p + B_m U_m - h] \quad (8)$$

여기서 편차동특성에 관한 X_p, U_m, h 항은 외란으로 간주한다. 이러한 전체 외란이 배제되기 위하여 다음 식들이 항등적으로 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} [I - B_p(GB_p)^{-1}G](A_m - A_p)X_p &= 0 \\ [I - B_p(GB_p)^{-1}G]B_m U_m &= 0 \\ [I - B_p(GB_p)^{-1}G]h &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

행렬이론에서 식(9)는 식(10)을 의미하고 식(10)은
모델추종제어의 필요조건으로서 완전모델추종조건이다.

$$\begin{aligned} \text{Rank}[B_p] &= \text{Rank}[B_p; A_m - A_p] = \text{Rank}[B_p; B_m] \\ &= \text{Rank}[B_p; h] \end{aligned} \quad (10)$$

(2) 제어함수의 구성

제어대상인 플랜트는 표준상태에서 변동이 있기 때문에
식(11)과 같이 표기할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_p(t) &= [A_p^* + \Delta A_p(t)] X_p(t) \\ &\quad + [B_p^* + \Delta B_p(t)] U_p(t) + h(t) \\ &= [A_p^* X_p(t) + B_p^* U_p(t)] + \\ &\quad [\Delta A_p(t) X_p(t) + \Delta B_p(t) U_p(t)] + h(t) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, A_p^*, B_p^* 는 $A_p(t)$ 와 $B_p(t)$ 의 표준행렬이며

식(5), (6)은 식(12), (13)이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{E} &= A_m E + (A_m - A_p^*) X_p + B_m U_m - B_p^* U_p - \\ &\quad [\Delta A_p X_p + \Delta B_p U_p + h] \\ &= \dot{E}^* - \Delta \dot{E} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{S} = G A_m E + G(A_m - A_p^*) X_p + G B_m U_m - G B_p^* U_p - G \Delta \dot{E} \quad (13)$$

단일 입력계통에서는 S 가 스칼라이기 때문에 G 는 $(1 \times n)$ 벡
터가 된다. 따라서 G 벡터의 원소를 선택하기에 따라 편차
과도 응답을 임의로 설계할 수 있다. 그러나, 다변수 입
력계통에서는 S 와 U_p 가 1대1 대응을 하기 위하여 식(13)의
 $G B_p^*$ 행렬이 단위행렬 $(m \times m)$ 이어야 한다.

$$G B_p^* = I \quad (14)$$

$$G = (Q B_p^*)^{-1} Q \quad (15)$$

여기서 Q 행렬을 표면행렬(Surface Matrix)이라고

하고 Q 행렬의 선정은 매우 중요하며 식(29)와 같이 설계
한다. 적응제어에서는 역행렬 존재여부에 따라 제어를

구성하고 못하는 문제점이 있다. 그러나, 여기에서는 Q
행렬의 차원은 $(m \times n)$ 이고 B_p^* 행렬의 차원은 $(n \times m)$ 이어서
두 행렬의 곱은 평방행렬이 되고 이는 식(23)의 B_2 행렬 즉,
Nonsingular 행렬이기 때문에 항상 역행렬이 존재한다.

선형이득행렬을 식(16)과 같이 정의하면 식(13)은 식(17)이
된다.

$$G_e = G A_m, \quad G_p = G[A_m - A_p^*], \quad G_m = G B_m \quad (16)$$

$$\dot{S} = G_e E + G_p X_p + G_m U_m - U_p - G \Delta \dot{E} \quad (17)$$

그러므로, 제어함수는

$$\begin{aligned} U_p &= G_e E + G_p X_p + G_m U_m - \dot{S} - G \Delta \dot{E} \\ &= G_e E + G_p X_p + G_m U_m - G(\dot{E} + \Delta \dot{E}) \\ &= G_e E + G_p X_p + G_m U_m - \dot{S} \end{aligned} \quad (18)$$

식(18)에 마분의 형태인 \dot{S} 를 그대로 사용하면 적응모델

추종제어에서처럼 복잡한 보조 마분 방정식을 해석하여야 374

하므로 이를 피하기 위하여 \dot{S} 를 S 의 항으로 대치하는
것을 고려한다. 모델추종이 되기 위하여는 시간이 지남에
따라 편차가 0으로 수렴해야 하며 이는 S 벡터가 0에 수렴
하는 것과 같다. S 가 0에 수렴하기 위해서는 다음 식이
만족 되어야 한다.

$$\dot{S}_i - S_i < 0 \quad (19)$$

식(19)식이 항등적으로 성립하기 위하여 식(20)을 고려한다.

$$\dot{S}_i = -a S_i \quad (20)$$

여기서 a 는 양의 상수이다. 그러므로 식(18)의 제어함수는
식(21)과 같이 된다.

$$U_p = G_e E + G_p X_p + G_m U_m + a S \quad (21)$$

제어대상 플랜트는 항상 외란이나 파라미터 변동이 있지만
적용의 한도가 있으며 표준상태를 중심으로 변동이 이루어
지기 때문에 S^* 와 S 의 값의 차이가 거의 없으며 모델 추
종이 원활히 될 때는 이 값들이 0이기 때문에 식(21)의
곱항은 다른 항에 비해 상대적으로 매우 작다. 그러므로,
 S^* 를 S 로 대치하여 식(22)와 같이 간략화된 제어함수를 구
성할 수 있고 이를 블록선도로 나타내면 그림1과 같다.

$$U_p = G_e E + G_p X_p + G_m U_m + a S \quad (22)$$

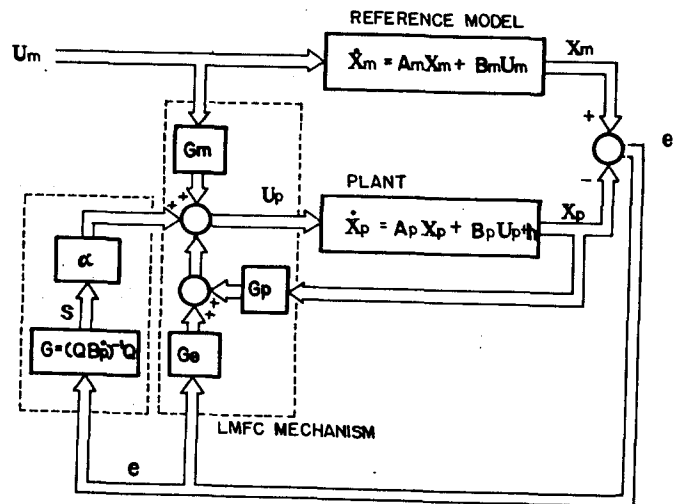


Fig.1 Robust model following control system

그림 1 Robust 모델 추종 제어 개통

(3) 표면행렬의 설계

완전모델 추종조건 식인 식(9)는 A_m, A_p, B_p 가 다음식과
같은 형태로 변환될 수 있음을 의미한다.

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ B_2 \end{bmatrix} \quad A_m, A_p = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & I & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ij} \end{bmatrix} \quad (23)$$

식(28) 다항식의 차수는 $n-m=4-3=1$ 이다.

원하는 고유치가 -10 이 되도록 설계를 하면 식(28)은

$$P(\lambda) = 10 + \lambda \quad (35)$$

식(29)의 Q행렬은

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

제어이득 행렬은 식(37)-(40)과 같다.

$$G = \begin{bmatrix} -1.942 & -0.194 & 0.219 & 0.036 \\ -1.045 & -0.105 & 3.482 & 9.820 \\ 1.285 & 0.129 & -4.282 & -0.474 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -0.020 & -1.642 & -0.130 & -0.006 \\ -5.513 & 2.481 & 0.341 & -0.255 \\ 0.266 & -3.050 & 3.063 & 0.111 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 6.75E-5 & -0.314 & -0.232 & 2.49E-3 \\ -3.04E-3 & -0.170 & 1.230 & 0.104 \\ -9.01E-4 & 0.209 & -2.184 & -6.08E-3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 2.809E-2 & 1.142E-4 \\ -6.484E-2 & 3.591E-2 \\ 7.976E-2 & -1.412E-3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

제어 입력을 식(41)과 같이 했을 때 시뮬레이션 결과는 그림 2와 같으며 1초까지의 구체적인 값은 표 1과 같다.

$$Up = GeE + GpXp + GmUm + aS \quad (41)$$

여기서, $a=10$ $S=GE$

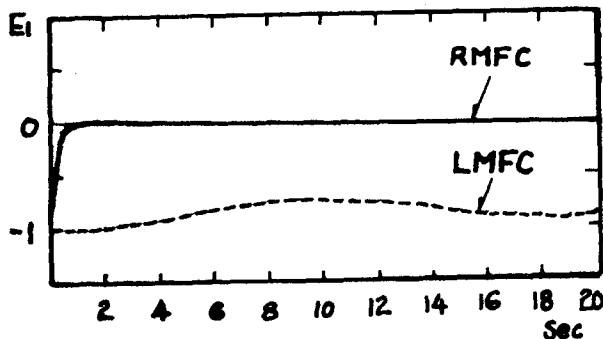


Fig.2 Pitch angle error response

그림 2 피치각 편차 응답

Table 1 Pitch angle error response

Time [Sec]	LMFC	RMFC
0.0	-1.0000	-1.0000
0.1	-1.0000	-0.7083
0.2	-1.0000	-0.3898
0.3	-1.0000	-0.1917
0.4	-0.9999	-0.0881
0.5	-0.9998	-0.0386
0.6	-0.9996	-0.0162
0.7	-0.9994	-0.0065
0.8	-0.9991	-0.0024
0.9	-0.9987	-0.0007
1.0	-0.9982	-0.0001

그림2와 표 10서와 같이 파라미터 변동이 있을 때 LMFC는 모델추종을 제대로 하지 못하나 RMFC는 약 1초 만에 플랜트 상태 $Xp1$ 이 모델 상태 $Xm1$ 을 거의 추종하는 결과를 보인다. 나머지 상태 $Xp2, Xp3, Xp4$ 도 비슷한 결과를 보였다.

3. 결 론

다변수 입력계통의 파라미터 변동이나 외란이 존재할 때에도 모델추종을 원활하게 하기 위하여 편차가 제어입력으로 강력히 작용하게 하는 기구를 고찰하였다.

본 논문이 제시하는 이론의 특징은 제어기구가 간단하고 다변수 입력계통에 쉽게 적용할 수 있으며 알고리즘이 간단하고 파라미터 변동이나 외란에 쉽게 대응하며 편차도 상태를 임의로 설계할 수 있음이다.

앞으로 연구과제는 완전모델 추종조건을 만족하지 않는 계통에 확대 적용하는 것으로 한다.

참 고 문 헌

- 1) I.D.Landau: "Adaptive Control; The Model Reference Approach", Marcel Dekker Inc., Chapter 6 (1979)
- 2) I.D.Landau: "Design of Multivariable Adaptive Model-Following Control Systems", Automatica, Vol. 10, pp. 483-494 (1974)
- 3) K.K.D.Young: "Design of Variable Structure Model-Following Control Systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-23, No. 6, pp. 1079-1085 (1978)
- 4) C.A.Winsor and R.J.Roy: "The Application of Specific Optimal Control to Design of Desensitized Model-Following Control Systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-15, pp. 326-333 (1970)
- 5) I.D.Landau and B.Courtial: "Adaptive Model Following for Flight Control and Simulation", J. Aircraft, Vol. 9, pp. 668-674, (1972)
- 6) T.Okada, M.Kihara and T.Takei: "Robust Model Following Control Systems", Int. J Control, Vol. 36, No. 6, pp. 905-923 (1982)