'86韓國自動制御學術會議 論文集 VOL.1 1986. 10

# 상호 연결된 연속시간 시스템의 비집중 적응 안정화

°김 성 수 유 준
충남대학교 공과대학 전자공학과

# Decentralized Stabilization of a Class of Uncertain Interconnected Continuous Systems

Sung-Soo Kim and Joon Lyou
Department of Electronics, Chungnam National University

Abstract

This paper considers the problem of stabilizing a composite system formed by interconnecting a number of single-input single-output linear continuous systems. The problem is general in the sense that in addition to the standard assumption about the uncertainty of the subsystms, the strength of interconnections is assumed unknown. A method to design a local adaptive feedback control is first presented, and then the resultant closed-loop system is assured to be globally stable. Also, a numerical example is illustrated via computer simulation.

## 1. 서 론

근래에 상호 연결된 시스템에 대해 시스템 파라미터가 불확실한 경우 안정화하는 문제가 관심있게 다루어지고 있으며[1], 그 결과 새로운 형태의 비집중 적응제어가 제안되었다[2-5]. 그러나 이러한 결과들은 상호 결합 강도의 상한치를 알아야되는 제한적인 가정 아래서 이루어졌으며 이로 인하여 안정을 위한 충분조건을 제시하는 것으로 그쳤다.

본 논문에서는 여러개의 단입력 단출력 연속시간 시스템들이 상호연결 되어있고 각 부시스템의 동특성뿐만 아니라 상호결합 형태에도 불확실성이 존재하는 일련의 복합 시스템을 안정화하는 방안이 모색되었다. 상태추정을 피하고 그러나 상태공간 방법을 이용하기 위하여 시스템내의 상태변수들을 출력을 여파(filtering)한 신호들로 규정하였고[6] Lyapunov 설계[7]에 입각하여 비집중 적응제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 여기서 Lyapunov 함수는 [8]의 것과 유사하게 선정하여 전체 폐루프 시스템의 안정을 보장하였다. 아울러 제안된 방법의 유용성을 보이기 위하여 컴퓨터 모사를 통한 수치예가 제시되었다.

## 2. 문제 기술

다음과 같은 전달함수 형태로 표현되는 상호연결된 연속시간 시스템을 생각하자.

$$F_i(s)Y_i(s) = G_i(s)U_i(s) + \sum_{j=1}^{N} F_{ij}(s)Y_j(s) \qquad i = 1,2,\ \ldots\ldots,\ N \qquad (1)$$

여기서 $U_i$ 와 $Y_i$ 는 각각 $i$번째 부시스템의 제어입력, 출력을 나타내고 S의 다항식 $F_i(s)$, $G_i(s)$ 및 $F_{ij}(s)$는 다음과 같이 주어진다.

$$F_i(s) = s^{n_i} + f_i^1 s^{n_i-1} + \ldots + f_i^{n_i-1} s + f_i^{n_i}$$

$$G_i(s) = g_i^1 s^{m_i} + g_i^2 s^{m_i-1} + \ldots + g_i^{m_i+1},\ g_i^1 \neq 0$$

$$F_{ij}(s) = f_{ij}^1 s^{n_i-1} + f_{ij}^2 s^{n_i-2} + \ldots + f_{ij}^{n_i} \qquad (1.a)$$

여기서 아래와 같은 4가지 가정을 한다.

(i) Ui와 Yi는 i 번째 부시스템에서만 측정 가능하다.

(ii) 차원변수 ni, mi,및 nj는 정확하게 알려져 있으며 상태차수 $n_i^*$ 을 $n_i - m_i$ 는 1이다.

(iii) $F_i(s)$ 와 $G_i(s)$ 는 서로소(relatively prime)이고 $G_i(s)$는 최소위상(minimum phase)이다.

(iv) $g_i^1$ 의 부호는 알려져 있다. 일관성을 잃지 않고 $g_i^1$ 의 부호를 양이라 하자.

이제 문제는 위의 가정 아래서 상호연결된 시스템(1)을 안정화하는 비집중 제어를 결정하는 일이다. 이를 위하여 비집중 적응제어기를 설계하는 방법을 제시하고, 전체 폐루프 시스템의 안정성을 보여주기로 한다.

## 3. 비집중 적응제어기 설계

$d_i^T(s) = [s^{n_i-1}, s^{n_i-2}, \ldots, 1]$ 로 정의하여 시스템(1)을 아래와 같이 다시 쓸수 있다.

$$[s^{n_i} + f_i^T d_i(s)]\, Y_i(s) = g_i^T d_i(s)\, U_i(s) + \sum_{j=1}^{N} f_{ij}^T d_i(s)\, Y_j(s), \quad i = 1,2,\ldots,N \qquad (2)$$

여기서

$$f_i^T = [f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^{n_i}]$$
$$g_i^T = [g_i^1, g_i^2, \ldots, g_i^{m_i+1}]$$
$$f_{ij}^T = [f_{ij}^1, f_{ij}^2, \ldots, f_{ij}^{n_j}] \qquad (2.a)$$

이다. $(n_i-1)$ 차의 안정한 다항식 $R_i(s)$ 를 아래와 같이 선정한다.

$$R_i(s) = s^{n_i-1} + r_i^1 s^{n_i-2} + \ldots + r_i^{n_i-1} = s^{n_i-1} + r_i^T \bar{d}_i(s) \qquad (3)$$

여기서

$$r_i^T = [r_i^1, \ldots, r_i^{n_i-1}]$$
$$\bar{d}_i^T(s) = [s^{n_i-2}, \ldots, s, 1] \qquad (3.a)$$

이다. 아울러 다음에 쓰기 위하여 아래항들을 정의하자

$$\bar{f}_i^T = [f_i^2, \ldots, f_i^{n_i}], \quad \bar{g}_i^T = [g_i^2, \ldots, g_i^{n_i}]$$
$$\bar{f}_{ij}^T = [f_{ij}^2, \ldots, f_{ij}^{n_j}], \quad \bar{r}_i^T = [r_i^2, \ldots, 0] \qquad (4)$$

식(2)을 $R(s)$로 나누고, 식(4)의 정의를 이용하면,

$$\begin{aligned} sY_i(s) &= (r_i^1 - f_i^1)\, Y_i(s) + \{(f_i^1 - r_i^1)\, r_i - (\bar{f}_i - \bar{r}_i)\}^T \bar{d}_i(s)/R_i(s)\; Y_i(s) + g_i^1 U_i(s) \\ &\quad + (\bar{g}_i - g_i^1 r_i)^T \bar{d}_i(s)/R_i(s)\; U_i(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} [f_{ij}^1 Y_j(s) + (\bar{f}_{ij} - f_{ij}^1 r_i)^T \bar{d}_i(s)/R_i(s)\; Y_j(s)] \\ &\triangleq a_i^1 Y_i(s) + \bar{a}_i^T \bar{d}_i(s)/R_i(s)\; Y_i(s) + b_i^1 U_i(s) \\ &\quad + b_i^1 \bar{b}_i^T \bar{d}_i(s)/R_i(s)\; U_i(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} [a_{ij}^1 Y_j(s) + \bar{a}_{ij}^T \bar{d}_i(s)/R_i(s)\; Y_j(s)] \\ &\quad i = 1,2,\ldots\ldots, N \end{aligned} \qquad (5)$$

가 되며, 여기서

$$a_i^1 = r_i^1 - f_i^1, \quad b_i^1 = g_i^1, \quad a_{ij}^1 = f_{ij}^1$$
$$\bar{a}_i = (f_i^1 - r_i^1)\, r_i - (\bar{f}_i - \bar{r}_i)$$
$$\bar{b}_i = (\bar{g}_i - g_i^1 r_i)/b_i^1$$
$$\bar{a}_{ij} = \bar{f}_{ij} - f_{ij}^1 r_i \qquad (5.a)$$

로 주어진다. 아울러 다음의 항을 정의하여 (5)식을 간단히 하면

$$V_i(s) = (\bar{d}_i(s)/R_i(s))\, Y_i(s), \quad W_i(s) = (\bar{d}_i(s)/R(s))\, U_i(s), \quad V_{ij}(s) = (\bar{d}_i(s)/R_i(s))\, Y_j(s) \qquad (6)$$

아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} sY_i(s) &= a_i^1 Y_i(s) + \bar{a}_i^T V_i(s) \\ &\quad + b_i^1 (U_i(s) + \bar{b}_i^T W_i(s)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} [a_{ij}^1 Y_j(s) + \bar{a}_{ij}^T V_{ij}(s)] \\ &\quad i = 1,2,\ldots,N \end{aligned} \qquad (7)$$

실제로 (6)의 첫번째, 두번째항은 아래식처럼 구현되는 state variable filter 이다.

$$\dot{v}_i = R_i v_i + \bar{C}_i y_i$$
$$\dot{w}_i = R_i w_i + \bar{C}_i u_i$$

여기서 $R_i$ 와 $\bar{C}_i$ 는 각각

$$
R_i = \begin{bmatrix} & -r_i^T & \\ 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 1\;0 \end{bmatrix} \qquad \bar{C}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

로 표시되는 (n-1)x(n-1) 행렬, (n-1) 벡터이다. 참고로 (7)식을 얻어내는 과정은 [6]의 것과 유사하다.

상태 벡터로써 $x_i^T = [y_i \;,\; v_i^T]$ 로 선정하고 상태 변수들간의 상호결합 벡터를 $z_{ij}^T = [\; y_j,\; v_{ij}^T]$ 로 정의하면, (7)식은 다음과 같은 상태 방정식으로 변환된다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= A_i x_i + b_i' c_i \;(u_i + \bar{b}_i^T w_i) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} c_i a_{ij}^T z_{ij}
\end{aligned} \tag{9}
$$

여기서

$$
A_i = \begin{bmatrix} & a_i^T & \\ 1 & & -r_i^T \\ 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1\;0 \end{bmatrix}, \qquad = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
a_{ij}^T = [\; a_{ij}' \quad \bar{a}_{ij}^T \;] \quad , \quad a_i^T = [a_i' \;\; \bar{a}_i^T \;\; ] \tag{9.a}
$$

이다. 내재된 모델이라 볼수있는 안정한 행렬 $A_i^o$ 를 규정하여

$$
A_i^o = \begin{bmatrix} & & a_i^{oT} & \\ 1 & & -\; r_i^T & \\ 0\,1 & 0 \cdots & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0\,0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 1\;0 \end{bmatrix} \tag{9.b}
$$

(9)식을 정리하여 쓰면

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= A_i^o x_i + c_i(a_i - a_i^o)^T x_i \\
&\quad + b_i' c_i (u_i + \bar{b}_i^T w_i) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} c_i a_{ij}^T z_{ij} \\
&\qquad i = 1,2,\ldots\ldots,N
\end{aligned} \tag{10}
$$

이 된다.

이제 식(10)으로 표현되는 시스템을 안정시키기 위하여 Lyapunov 설계[7]에 입각하여 아래와 같은 비집중 적응제어기를 제안한다.

$$
u_i = -[k_{i1}^T(t)x_i + k_{i2}^T(t) \;\; w_i \;\;] \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{k}_{i1} &= \Gamma_{i1}\, \bar{C}_i^T P_i x_i x_i \\
\dot{k}_{i2} &= \Gamma_{i2}\, \bar{C}_i^T P_i x_i w_i
\end{aligned} \tag{12}
$$

여기서 $p_i$ 는 symmetric positive definite 하며, 주어진 symmetric positive definite 한 $Q_i$ 에 대해서 다음식을 만족하는 유일한 해이다.

$$
A_i^{oT} P_i + P_i A_i^o = -Q_i \tag{12.a}
$$

$\Gamma_{i1}$, $\Gamma_{i2}$ 는 adaptation gain 이며, symmetric positive definite 되도록 선정한다.

## 4. 안정 해석

(10)식의 제어를 (11)식에 인가하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= A_i^o x_i + c_i\,[a_i - a_i^o - b_i' k_{i1}(t)]^T x_i \\
&\quad + b_i' c_i\,[\bar{b}_i - k_{i2}(t) \;\;]^T w_i \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} c_i \;\; a_{ij}^T z_{ij} \\
&\qquad i = 1,2,\ldots\ldots ,N
\end{aligned} \tag{13}
$$

식(12)와 (13)으로 구성되는 전체 폐루프 시스템의 안정은 다음 정리에 의해서 보장된다.

정리1.

2장에 기술한 (i)-(iv)의 가정 아래서 식 (12), (13)으로 주어진 전체 적응시스템의 평형 상태는 안정하고, 모든 $i = 1,2,\ldots,N$ 에 대하여, $t \to \infty$ 감에 따라 $x_i(t) \to 0$ 로 수렴한다.

(증명) Lyapunov 함수를 [8]의 것과 유사하게 다음과 같이 선정하자.

$$V(x_i,k_{i1},k_{i2}, i = 1,2,\ldots,N) = \sum_{i=1}^{N} [x_i^T P_i x_i + 1/b_i^1 (a_i - a_i^0 - b_i k_{i1}(t) + \rho_i P_i C_i)^T \Gamma_{i1}^{-1} (a_i - a_i^0 - b_i^1 k_{i1}(t) + \rho_i P_i C_i) + b_i^1 (\bar{b}_i - k_{i2}(t))^T \Gamma_{i2}^{-1} (\bar{b}_i - k_{i2}(t))] \quad (14)$$

여기서 $\rho_i$ 는 양의 실수이다. 식 (14)를 시간에 대해 미분하고 식(13), (12.a)을 따라 평가하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\dot{V} = \sum_{i=1}^{N} [&-x_i^T Q_i x_i + 2b_i^1 C_i^T P_i x_i \; [-k_{i1}^T x_i + (\bar{b}_i - k_{i2})^T w_i] + 2x_i^T (a_i - a_i^0) C_i^T P_i x_i \\ &+ 2x_i^T P_i \sum_{j=1}^{N} C_i a_{ij}^T z_{ij} - 2b_i^1 \dot{k}_{i2}^T \Gamma_{i2}^{-1} (\bar{b}_i - k_{i2}) \\ &- 2\dot{k}_{i1}^T \Gamma_{i1}^{-1} (a_i - a_i^0 - b_i^1 k_{i1} + \rho_i P_i C_i)] \\ = \sum_{i=1}^{N} [&-x_i^T Q_i x_i + 2x_i^T P_i \sum_{j=1}^{N} C_i a_{ij}^T z_{ij} - 2\rho_i x_i^T P_i C_i C_i^T P_i x_i] \qquad (15)\end{aligned}$$

참고로 (12)의 적응조정 법칙은 (15)의 유도과정 중에 얻어진다. 이후의 수식전개를 위하여 아래의 block 기호들을 정의하자.

$$S_i^T = [a_{i1}^T, a_{i2}^T, \ldots, a_{iN}^T]$$
$$Z_i^T = (z_{i1}^T, z_{i2}^T, \ldots, z_{iN}^T]$$
$$X^T = [x_1^T, x_2^T, \ldots, x_N^T]$$
$$Q = \text{bloc diag } [Q_1, Q_2, \ldots, Q_N]$$
$$P = \text{block diag } [P_1, P_2, \ldots, P_N]$$
$$C = \text{bloc diag } [C_1, C_2, \ldots, C_N]$$
$$S = \text{block diag } [S_1, S_2, \ldots, S_N]$$
$$Z^T = [Z_1^T, Z_2^T, \ldots, Z_N^T]$$
$$\rho = \min_i \rho_i \qquad (16)$$

그러면 (16)의 정의를 이용하여 (15)식은 아래의 부등식으로 변형되고

$$\dot{V} \le -X^T QX + 2X^T PCSZ - 2\rho X^T PCC^T PX \qquad (17)$$

다시 식 (17)을 제곱항으로 고쳐쓰면 아래와 같이 정리된다.

$$\dot{V} \le -X^T QX - 2\rho(\|X^T PC\| - 1/2\rho \|SZ\|)^2 + 1/2\rho \|SZ\|^2 \qquad (18)$$

식 (18)로 부터 모든 $X \ne 0$ 에 대하여 $\dot{V} < 0$ 되게 하는 충분히 크지만 유한한 $\rho$ 가 존재함을 알수 있고 여기서 $\rho$ 는 구체적으로 알 필요가 없다.

Lyapunov 안정이론에 의하여 평형상태 $x_i(t)$, $k_{i1}(t), k_{i2}(t)$, $i = 1,2,\ldots,N$ 은 모든 bounded 된 초기치 $x_i(0), k_{i1}(0), k_{i2}(0)$ $i=1,2,\ldots,N$ 에 대해 uniformly bounded 되고 더구나 $\dot{V}<0$ 로 부터 $x_i(t)$는 점근적으로 안정하다.

증명끝.

## 5. 컴퓨터 모사

다음과 같이 불확실한 시스템 파라미터를 가진 2개의 부시스템이 결합된 불안정한 선형 연속시간 시스템을 생각하자.

$$F_1(s) = s^3 - 6s^2 + 11s - 6$$
$$G_1(s) = 2s^2 + 5s + 2$$
$$E_{11}(s) = 0$$
$$E_{12}(s) = 12s^2 + 6s + 3$$
$$F_2(s) = s^2 + 16s + 1$$
$$G_2(s) = 8s + 10$$
$$E_{21}(s) = 4s + 12$$
$$E_{22}(s) = 0 \qquad \text{식 (1.a) 참고}$$

여기서 다항식들의 각 계수들은 모르는 것으로 가정한다.

먼저 $R_1(s)$와 $R_2(s)$를 각각

$$R_1(S) = S^2 + 18S + 80$$
$$R_2(S) = S + 8 \qquad \text{식 (3) 참고}$$

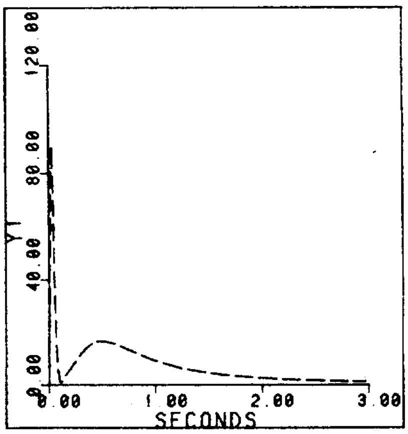
으로 선정하여, 상태 방정식으로 변환하면 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 24 & -363 & -1914 \\ 1 & -18 & -80 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_1 + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left( u_1 + \begin{bmatrix} -15.5 \\ -79 \end{bmatrix}^T w_1 \right)$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [12 \ \ -210 \ \ -957] \ z_{12}$$
$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} -8 & -63 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} x_2 + 8 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (u_2 - 6.75 w_2)$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [4 \ \ -20] \ z_{21} \qquad \text{식 (9)참고}$$

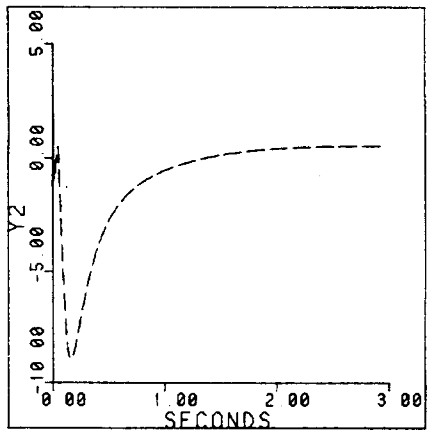
(9,b)의 안정한 행렬 $A_i^o$ 와 (12,a)의 $Q_i$ 를 아래와 같이 선정한다.

$$A_1^o = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 1 & -18 & -80 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2^o = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$
$$Q_1 = I, \ Q_2 = 2I$$

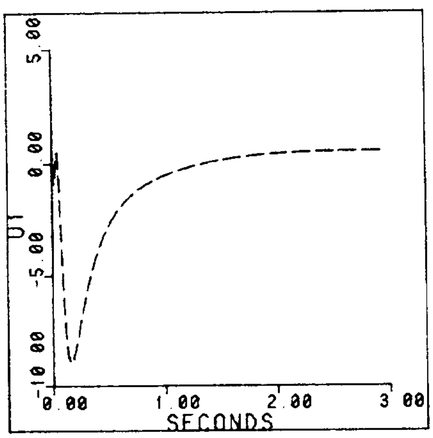
이제 예제 시스템을 안정화 하기 위해서 제안된 비집중 적응제어방식을 포함한 컴퓨터 모사가 행하여 졌다. 적응 변수들의 초기 추정치와 (12)식의 이득 행렬을 아래와 같이 선정하여 모사한 결과가 그림1과 같이 주어졌는바, 4절에서 예측되었던 결과와 잘일치



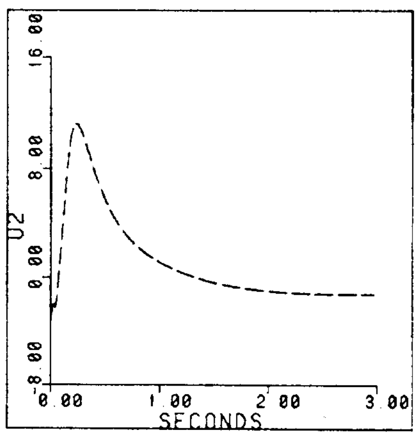
(a) $y_1$ 의 궤적



(b) $y_2$ 의 궤적



(c) $u_1$ 의 궤적



(d) $u_2$ 의 궤적

그림 1. $y_i$, $u_i$ 의 궤적

되고 있음을 알 수 있다.

$$K_{11}^T(0)=[1.0 \quad 1.0 \quad -5.0] \ , \ K_{12}^T(0)=[0.6 \ -0.6]$$
$$K_{21}^T(0)=[0.3 \quad 0.2] \ , \ k_{22}(0) = 0.8$$

$$\Gamma_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Gamma_{22} = 1$$

## 6. 결 론

여러개의 단입력 단출력 연속시간 시스템들이 상호 연결된 일련의 복합 시스템을 안정화하기 위하여 입출력 데이터만을 가지고 비집중 적응제어를 구현하는 간단한 방법이 제시되었다.

본 제어방식은 기존방식이 다루었던 부시스템들의 불확실성 뿐만 아니라 상호 결합의 정도를 알 수 없는 경우에도 대처할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 반면에 본 방식은 일반적으로 제어입력이 커진다는 단점을 가지고 있는데 이점은 각 부시스템의 상태 차수가 1인 경우에만 적용되는 점과 함께 추후에 보완되어야 할 사항으로 보인다.

## 참 고 문 헌


1. 변증남, 유준, "대규모 시스템에 대한 적응기법의 구현," 대한 전기학회 잡지, 제 33권, 3호, 1984

2. J. Lyou and Z. Bien, "A Note on Decentralized Stabilization of Unknown Interconnected Linear Systems," IEE Proc., Part D, Vol. 131, No.5, PP.202-203, 1984.

3. J. Lyou and Z.Bien, "Decentralized Adaptive Stabilization of a Class of Large scale Interconnected Discrte Systems," ASME Trans., J. of Dyn.Sys., Meas.and Contr., Vol. 107, No.1, PP.106-109, 1985.

4. 유준, 윤명중, 정명진, 변증남, "시스템 파라메터가 불확실한 대규모 선형 이산시간 시스템의 비집중 안정화에 관한 연구," 대한 전기학회 논문집, 34권, 3호, 89-96, 1985.

5. 유준, 윤명중, 변증남, "시스템 파라메터가 불확실한 대규모 선형 연속시간 시스템의 비집중 안정화," 대한 전자공학회지, 22권 3호, 77-83, 1985.

6. NUYAN,S. and CARROLL, R.L., "Minimal order arbitrarily fast adaptive observers and identifers," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.24, PP.289-296, 1979.

7. LINDORFF, D.P. and CARROLL, R.L., "Survey of adaptive control using Liapunov design," Int.J.Contr., Vol.18, No.5, PP.897-914, 1973.

8. D.Gavel and D. Siljak, "High Gain Decentralized Control," Proceedings of the American Control Conference, PP.568-573, 1985.