

슬라이딩 모우드를 이용한 D.C servo-Motor의 위치제어에 있어 chattering reduction에 관한 연구

천 희영, 박 귀태, 송 명현, 강 대륜
고려대학교 공과대학 전기공학과

A Study on chattering reduction in the position control of D.C servo-motor using Sliding Mode

Hee-Young Chun . Gwi-Tae Park . Mung-Hyun Song . Dae-Lyun Kang
Department of Electrical Engineering Korea University

Abstract

This paper deals with "chattering" problem in Variable structure control system. For Digital computer control, chattering reduction algorithm in Analog-VSC is extended to Discrete-VSC. The proposed algorithm is applied to position control of D.C Servo Motor by using 6502 μ -processor. The improved transient response, as well as a considerable reduction of chattering, is illustrated experimentally.

1. 서 론

최근 활발한 연구가 이루어지고 있는 가변구조 제어 (Variable structure control) 이론은 Sliding Mode 라는 독특한 동특성을 가지며, 이 Mode 내에서는 계통의 파라미터 변동이나 외란에 둔감하게 된다. [1] 이 장점 때문에 비선형 계통을 포함한 여러 분야에 걸쳐 많은 연구가 되고 있으며, 특히 비선형 Dynamic interaction이 존재하는 Robot Manipulator의 새로운 제어기법으로 주목받고 있다. [2-4] 실제로는 이상적인 Sliding Mode가 불가능하며 상태 궤적이 Sliding 평면을 따라 "Chattering" 하는 Quasi-Sliding Mode가 발생한다. 제어기의 비이상적요소 즉, 스위칭제어입력의 시간 지연과 모델화 과정에서 무시한 작은 시정수등으로 인해 생기는 Chattering 현상은 과도응답지연과 제어 입력의 Chattering을 수반하는 등 바람직하지 못하다. [5] 급까지 Slotine, Morgan 등에 의해 주로 연속지계통에서의 Chattering reduction에 알고리즘이 제시되어 왔으며 [4-5], Espana (1984)는 연속지가변구조제어 (Analog-VSC) 이론에 따라 Sliding 평면부근에서 새로운 스위칭영역을 설정하여 Chattering을 줄이는 방법을 제시하고 Microprocessor로 실현하였으나 [6] 이산지계통에 연속지제어이론을 적용하는 문제점이 있고, 최근 이산지가변구조제어 (Discrete VSC) 이론에 대한 연구가 진행중이나 [7], 이산지계통에서 Chattering reduction에 대해서는 아직 제시된바 없다. 따라서 본 연구에서는 이를 이산지가변구조제어 (DVSC) 이론에 의한 Chattering reduction 알고리즘으로 확장한 다음, Microprocessor를 이용한 D.C Servo-Motor의 위치제어에 적용하여 개선된 제어효과를 입증하고 외란이 존재할때 Chattering reduction의 유효성을 실험적으로 고찰하고자 한다.

2. Chattering reduction 알고리즘

(1) 연속지계통에서의 전개

일반적인 n차계통을 상변수표준형으로 표현하면 아래와 같다.

$$\dot{X} = AX + bu \quad (2.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

위 계통에 VSC 이론을 적용할 경우, Sliding 평면 S 및 제어입력 u는 다음과 같이 정의된다.

$$s = \{ X \in R^n \mid \sigma = C^T X = 0 \} \quad (2.2)$$

$$C^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n], \quad c_n = 1$$

$$u = -\psi_1 x_1 - \dots - \psi_{n-1} x_{n-1} \quad (2.3)$$

$$\text{여기서, } \psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } \sigma x_i > 0 \\ \beta_i & \text{if } \sigma x_i < 0 \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

이때 Sliding mode가 존재할 필요충분조건과 이 조건을 만족하는 스위칭제어이득 α_i, β_i 의 극한치는 (2.4), (2.5) 식으로 주어진다.

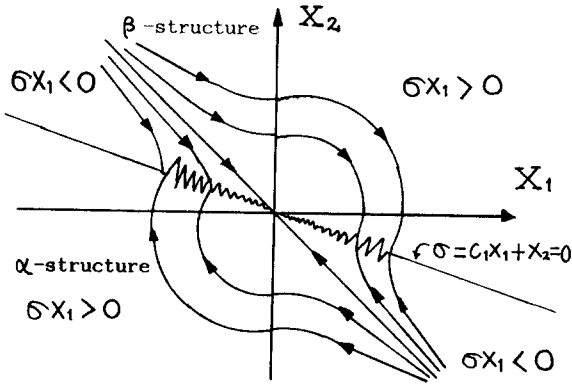
$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dt} \leq 0 \quad (2.4)$$

$$\alpha_i \geq \psi_i^0 \geq \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (2-5)$$

여기서,

$$\psi_i^0 = (c_{i-1} - a_i - c_i c_{n-1} + c_i a_n) / b, \quad c_0 = 0$$

2차계통에서 상태궤적이 Sliding라인을 따라 Chattering하는 준 Sliding Mode를 Phase Plane에 나타내면 Fig.1 과 같다.



[Fig.1] Quasi-Sliding mode in a second-order VSC

일반적으로 chattering 현상은 스위칭주파수를 증대시키거나, 스위칭평면부근에서 제어이득을 줄여줌으로써 감소시킬 수 있다. Espina 등은 스위칭평면부근에 임의로 Zone을 설정하고 그 Zone내에서는 상태궤적이 스위칭평면에 거의 평행하게 진행하게끔 하기 위해 제어이득을 (2.5)식의 ψ_i^0 으로 정하였으며 ψ^0 -Zone이라는 새로운 스위칭-Zone을 아래와 같이 정의하였다.

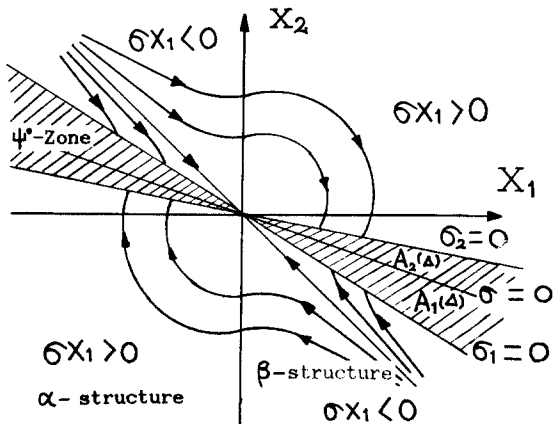
$$A_i(\Delta) = \{ X \in R^n \mid c^T \Phi_{\psi_i^0}(s) X \in S, 0 \leq s \leq \Delta \} \quad (2.6)$$

$$(i=1, 2, \dots, 2^{n-1})$$

여기서 $\Phi_{\psi_i^0}(t)$ 는 (2.1)식의 계통이 ψ_i 이득을 취할 경우의 상태전이행렬이다.

$$\psi^0\text{-Zone}(\Delta) = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} A_i(\Delta) \quad (2.7)$$

2차계통에 대한 Chattering reduction 개념을 phase plane 에 나타내면 Fig.2 와 같다.



[Fig.2] ψ^0 -Zone(Δ) in a second order VSC

위 그림에서 알 수 있듯이 Δ 는 ψ^0 -Zone의 폭을 결정하는 인자이며, 두개의 새로운 스위칭라인 $\sigma_1=0$ 와 $\sigma_2=0$ 는 다음식으로 정한다.

$$\sigma_1 = c^T \Phi_{\psi_1^0}(\Delta) X = 0 \quad (2.8)$$

$$\sigma_2 = c^T \Phi_{\psi_2^0}(\Delta) X = 0 \quad (2.9)$$

여기서, $c^T = [c_1 \ 1]$, $X = [x_1 \ x_2]$ 이다.

한편, (2.1)식과 (2.2)식으로부터 sliding mode에서 계통의 동특성을 나타내는 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{X} = [I - b(c^T b)^{-1} c^T] A X = A_{eq} X \quad (2.10)$$

위식으로부터 A_{eq} 의 모든 고유치가 (-)값을 갖도록 (2.2)식의 c 값을 선정하면 sliding mode에서 (2.1)의 계통이 안정하게 됨을 알 수 있다.

2) 이산치계통으로의 확장

(2.1)식의 계통을 z.o.h를 이용하여 이산치계통으로 변환하면 다음과 같은 차분방정식을 얻는다.

$$X\{(k+1)h\} = \phi X(kh) + \Gamma u(kh) \quad (2.11)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{여기서, } \phi = e^{Ah}, \quad \Gamma = \int_0^h e^{A\tau} d\tau \cdot b$$

h 는 sampling time이다.

이산치계통에서 상태궤적이 스위칭평면을 지나도 다음번 Sampling에 의해 제어입력이 가해지기전 즉, $kh \leq t < (k+1)h$ 동안에 상태궤적이 이동한다. 따라서, 이때는 제어입력상의 시간지연이 없더라도 상태궤적이 Chattering하는 준sliding mode가 발생하지만 연속치계통에서처럼 파라미터변동 및 외란에 둔감한 특성을 얻는다. [7]

sliding 평면은 다음식으로 표현된다.

$$\sigma(kh) = c^T X(kh) = 0 \quad (2.12)$$

여기서, $c^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$, $C_n = 1$

pulse amplitude modulation 방식의 이산치계통에서 제어입력 $u(kh)$ 는 아래와 같다.

$$u(kh) = u(t) = -\psi_1 x_1(kh) - \dots - \psi_{n-1} x_{n-1}(kh) \quad (2.13)$$

$$kh \leq t < (k+1)h$$

$$\text{여기서, } \psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } x_i(kh)\sigma(kh) > 0 \\ \beta_i & \text{if } x_i(kh)\sigma(kh) < 0 \end{cases}$$

($i=1, 2, \dots, n-1$)

이산치가변구조제어 (DVSC) 이론에서 Quasi-sliding mode가 존재할 필요조건은 다음과 같다.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \nabla \sigma(kh) \leq 0 \quad (2.14)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \nabla \sigma(kh) \geq 0$$

여기서, $\nabla \sigma(kh) = \sigma\{(k+1)h\} - \sigma(kh)$

(2.14)식을 (2.11)식의 계통에 대해 풀어보면 Quasi-sliding mode를 얻기위한 제어이득 α_i, β_i 의 극한치 ψ_i^0 를 구할 수 있으며 (2.13)식의 α_i 와 β_i 는 다음 조건을 만족하게끔 선정하여야 한다.

$$\alpha_i \geq \psi_i^* \geq \beta_i \quad (i=1,2,\dots,n-1) \quad (2.15)$$

위식에서 ψ_i^* 는 sampling time(h), 계통파라미터, C의 함수가 되고 $\lim_{h \rightarrow 0}$ 을 취하고 L'Hopital's

rule을 적용하면 (2.5)식의 ψ_i^* 으로 수렴한다.

chattering을 줄이기 위해서 ψ_i^* -zone(Δ)를 (2.12)식의 sliding 평면 $\sigma(kh) = 0$ 와 다음식으로 주어지는 임의의 경계평면 $A_i(\Delta) = 0$ 사이의 영역으로 설정한다.

$$A_i(\Delta) = C^T \Phi \psi_i(\Delta) \times (kh) = 0 \quad (2.16)$$

$$(i=1,2,\dots,2^{n-1})$$

여기서 $\Phi \psi_i(\Delta)$ 는 (2.10)식의 계통이 $\psi_i(\alpha_i$ or $\beta_i)$ 를 제어이득으로 취할때의 상태전이 행렬이다.

이산계통에서 chattering을 줄이기 위한 제어입력 $u(kh)$ 는 위에서 설정한 ψ_i^* -zone(Δ)내에서는 ψ_i^* 를, 그밖에서는 (2.13)식의 ψ_i 를 제어이득으로 취하면 되고, 이과정을 요약하면 다음과 같다.

가) 주어진 계통으로부터, (2.14)식을 풀면 스윙칭 제어이득 α_i, β_i 의 극한치 ψ_i^* 를 구할수 있고 (2.15)식에 따라 α_i, β_i 를 결정한다.

나) Δ 를 선택하여 ψ_i^* -zone(Δ)를 정한다.

다) 상태궤적이 ψ_i^* -zone(Δ)에 속하는지를 판정하여 제어이득을 정한다. 그 판정법은 아래와 같다.

$$\text{Sign}\{C^T \Phi \psi_i(\Delta) \times (kh)\} \neq$$

$$\text{Sign}\{C^T X(kh)\} \text{ 이면 } \psi_i^* \text{-zone}(\Delta) \text{에}$$

속하므로 제어입력

$$u(kh) = - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^* X_i(kh)$$

로 하고, 그렇지 않으면 $u(kh) = - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i X_i(kh)$

를 취한다.

한편 계통이 (2.12)식의 sliding 평면내에서 유지된다면 (2.14)식의 $\nabla \sigma(kh) = 0$ 이 성립하고, 이 조건을 (2.10)의 계통에 적용하면 sliding 평면내에서의 계통방정식이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} X\{(k+1)h\} &= [I - \Gamma(C^T \Gamma)^{-1} C^T] \Phi X(kh) \\ &= \Phi_{sl} X(kh) \end{aligned} \quad (2.17)$$

위식으로부터 Φ_{sl} 의 모든 고유치가 Z-평면의 단위 원내에 들게끔 C값을 선정하면 sliding mode내에서 계통이 안정하게 된다.

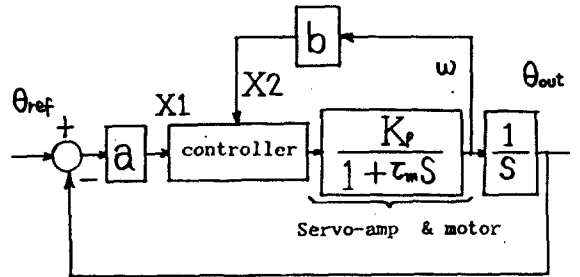
3. D.C Servo-Motor에의 적용

본 실험에 사용된 motor는 Feedback사의 MS150Kit로 정격전압 24[V], 정격전류 1.3[A], 최대회전수 6000 [rpm], 정격출력 15[w]인 트랜지스터제어 분리형계자 코일을 갖는 직권 motor이다. motor에 대한 입력전압대 각변위의 전달함수는(3.1)식으로 주어진다.

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K_p}{S(1 + \tau_m S)} \quad (3.1)$$

여기서 τ_m 은 motor의 시정수, K_p 는 서보증폭이득으로, $\tau_m=0.25(\text{sec})$ $K_p=24.3$ 이다.

Servo-motor의 위치제어를 위한 전형적인 제어계통 및 상태방정식은 아래와 같다.



[Fig.3] Typical feedback control system.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/b \\ 0 & -1/\tau_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ bK_p/\tau_m \end{bmatrix} u \quad (3.2)$$

여기서 a,b는 포텐서미터와 tacho gain이다. (3.2)식의 계통에 대해 AVSC 이론에 의한(2.5)식의 스윙칭제어이득 α, β 의 극한치 ψ^* 는(3.3)식과 같다.

$$\begin{aligned} \psi^* &= \frac{\tau_m}{bK_p} (C/\tau_m - aC^2/b) \\ \sigma &= CX_1 + X_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.2)식의 계통을 Z.o.h를 이용하여 이산계통으로 변환하면 (3.4)식이 된다.

$$\begin{bmatrix} X_1\{(k+1)h\} \\ X_2\{(k+1)h\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b\tau_m(1 - e^{-h/\tau_m})/a \\ 0 & e^{-h/\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(kh) \\ X_2(kh) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aK_p h - \tau_m aK_p(1 - e^{-h/\tau_m}) \\ bK_p(1 - e^{-h/\tau_m}) \end{bmatrix} u(kh) \quad (3.4)$$

DVSC 이론에 따른 sliding 라인 $\sigma(kh) = 0$ 는 (3.5)식으로 정하고, 제어입력 $u(kh)$ 는 (3.6)식과 같다.

$$\sigma(kh) = CX_1(kh) + X_2(kh) = 0 \quad (3.5)$$

$$u(kh) = -\psi X_1(kh) \quad (3.6)$$

$$\text{여기서, } \psi = \begin{cases} \alpha & \text{if } X_1(kh)\sigma(kh) > 0 \\ \beta & \text{if } X_1(kh)\sigma(kh) < 0 \end{cases}$$

(3.4)식의 계통에 대해 (2.13)식을 풀면 Quasi-sliding mode를 얻기위한 제어이득 α, β 의 극한치 ψ^* 가 구해진다.

$$\psi^* = \frac{C - a\tau_m C^2(1 - e^{-h/\tau_m})/b - Ce^{-h/\tau_m}}{CaK_p h - Ca\tau_m K_p(1 - e^{-h/\tau_m}) + bK_p(1 - e^{-h/\tau_m})} \quad (3.7)$$

이제, chattering reduction 알고리즘에 의한 제어 입력 $u(kh)$ 를 구해보자.

가) (3.7)식에서 구한 ψ^* 를 제어이득으로 취하는 ψ^* -zone(Δ)의 범위를 정한다. 이때 경계평면 $\sigma_1(kh) = 0, \sigma_2(kh) = 0$ 을 다음과 같이 정한다.

$$\sigma_1(kh) = [c \ 1] \Phi_\alpha(\Delta) X(kh) = 0$$

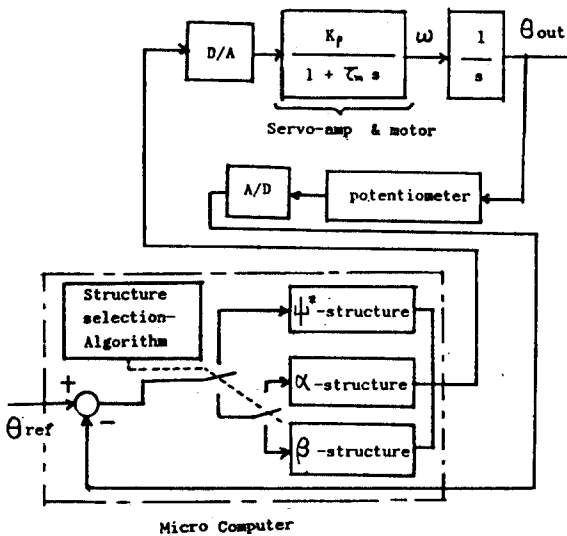
$$\sigma_2(kh) = [c \ 1] \Phi_\beta(\Delta) X(kh) = 0$$

여기서, $\Phi_\alpha(\Delta), \Phi_\beta(\Delta)$ 는 (3.4)식의 계통이 α, β 이득을 취할 경우의 상태전이행렬이다.

나) $\text{Sign}\{[c \ 1] \Phi_{\alpha,\beta}(\Delta) X(kh)\} \neq \text{Sign}\{[c \ 1] X(kh)\}$ 이면 $u(kh) = -\psi^* X_1(kh)$ 로 하고,

다) 나)의 부호판정이 성립하지 않으면 (3.6)식의 $u(kh)$ 를 제어입력으로 취한다.

motor의 위치제어에 있어 chattering reduction을 위한 제어계통을 블록선도로 나타내면 Fig.4와 같다.



[Fig.4] Motor position control system by chattering reduction algorithm.

4. 실험 및 고찰

본 실험에서는 6502 Microprocessor를 이용하여 hardware를 구성하였으며, 주로 motor와 포텐서미터간의 Coupling 소자와 회전 원판의 관성에 기인하는 dead band가 C.W의 경우 4.5[v], C.C.W의 경우 4.6[v] 정도로 비교적 크기때문에 이에 대한 보상책으로 2대의 8-bit D/A로서 약 3.5[v]의 bias 전압을 인가하였다. DVSC 이론에 따른 종래 알고리즘에 의한 140° 계단변위에 대한 상태궤적 및 각변위 θ 의 계단 응답을 Fig.5에 나타내었다.

Fig.6에서는 chattering reduction의 유효성을 입증하기 위해 $h=38$ [msec]에서 각기 다른 Δ 값에 대한 Chattering reduction 알고리즘에

의한 140° 계단변위에 대한 실험결과를 나타내었다. Δ 를 적게 잡을수록 종래 알고리즘의 결과와 유사해지며 Δ 를 크게 잡을수록 chattering이 현저히 줄어들고 동시에 settling time이 짧아져 과도 응답이 개선됨을 볼 수 있다. 그러나 Δ 가 너무 크면 큰 정상상태오차가 발생하므로 주어진 계통에 따라 trial and error 식으로 적당히 선정한다.

한편, 외란이 존재할 때 Chattering reduction의 유효성을 고찰하기 위해, motor 각변위 θ 의 정현함수인 외란을 발생시키는 장치를 Fig.7과 같이 구성하고 이때의 실험결과를 Fig.8와 Fig.9에 나타내었다.

외란에 대해 비교적 둔감한 특성을 나타내고 있으며 스위칭라인으로부터 deviation이 클 때 Chattering을 줄임으로써 바람직한 제어결과를 얻을 수 있었다.

5. 결론

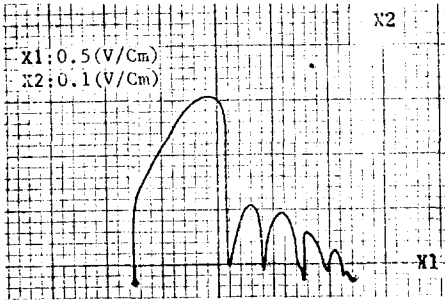
본 연구에서는 DVSC이론에 따른 chattering reduction 알고리즘을 구하고, Microprocessor를 통해 실험한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) Δ 를 적당히 선정하면 Chattering을 줄임과 동시에 Settling time이 짧아져 과도응답이 개선되었다.
- (2) Δ 의 최적값은 주어진 계통과 sampling time을 고려하여 trial and error 식으로 정할 수 있다.
- (3) 상태궤적이 스위칭라인으로부터 큰 deviation을 갖고 chattering할 때 제안된 알고리즘을 적용하면 각변위 θ 의 정현함수인 외란에 대해서도 개선된 제어효과를 얻을 수 있었다.

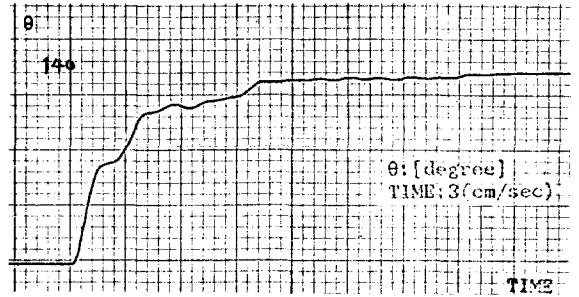
앞으로 전반적인 외란에 대한 보상대책을 추가하여 고성능제어기를 구성하면 Robotics등에 적용할 수 있으리라 기대된다.

6. 참고문헌

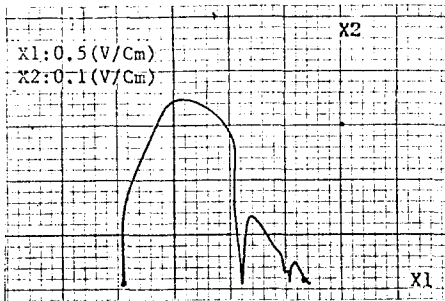
- 1] V.I.Utkin, "Variable Structure Systems With Sliding modes, "IEEE Trans., AC22, No.2 PP 212-222, 1977
- 2] Harashima et al, "Tracking control of Robot manipulator using sliding mode," 15th ISIR, PP 657-664, 1985
- 3] Kazuhiro Kosuge et al, "Variable structure control of Robot arm," 15th ISIR, PP 633-640, 1985
- 4] R.G.Morgan et al, "A Decentralized Variable structure control Algorithm for Robot manipulator, "IEEE J. of Robotics and Automation, vol.RA-1, no.1, March 1985
- 5] J.J.Slotine et al, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surface, "INT.J.system sci., vol.15, NO.4, PP.401-409, 1983
- 6] M.D.Espana et al, "Variable structure systems with Chattering reduction," Automatica, vol.20, No.1, PP 133-134, 1984
- 7] C.Milosavljevic, "General conditins for the existence of a Quasi-sliding mode on the switching hyperplane in Discrete Variable structure systems," Avtomatika: Telemekhanika, NO.3, PP 36-44, March, 1985
- 8] Harashima et al, "Mosfet Converter-Fed Position Servo System with sliding mode control, "IEEE Trans., IE 32, NO.3, August 1985



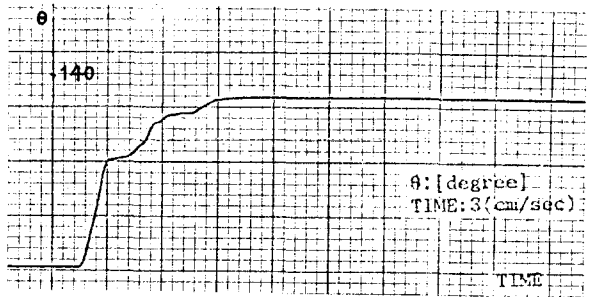
[Fig.5] Experimental results by conventional method.



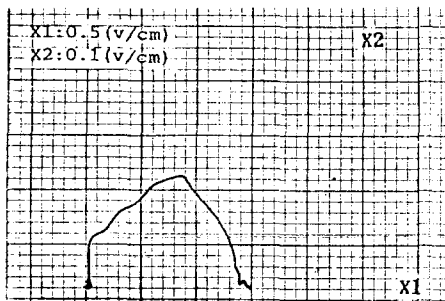
$h=38[\text{msec}] \quad c=0.075 \quad \alpha, \beta = \pm 0.3$



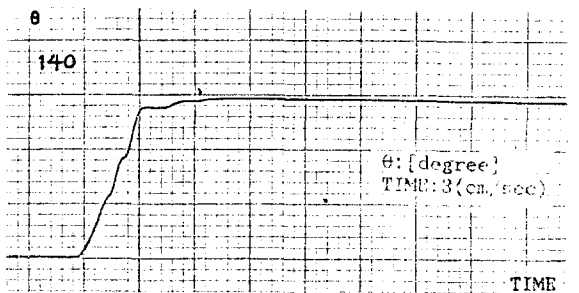
[Fig.6] Experimental results by chattering reduction algorithm.



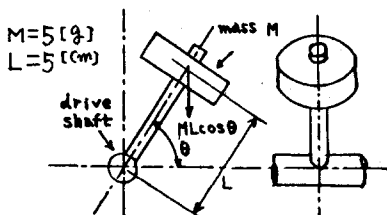
$h=38[\text{msec}] \quad c=0.075 \quad \alpha, \beta = \pm 0.3 \quad (\Delta = h/2)$



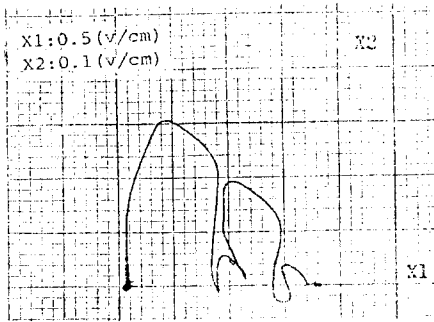
[Fig.6] Experimental results by chattering reduction algorithm.



$h=38[\text{msec}] \quad c=0.075 \quad \alpha, \beta = \pm 0.3 \quad (\Delta = 2h)$

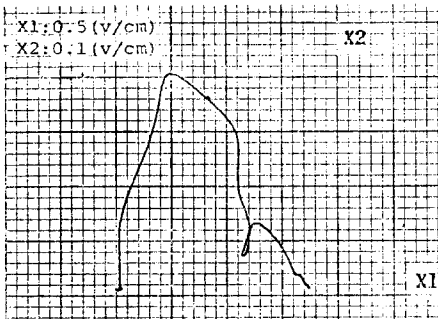


[Fig.7] Mechanical arrangement for generation of disturbance.



Experimental results by conventional
 [Fig.8] method. (case of disturbance existence)

$h=38[\text{msec}]$ $c=0.075$ $\alpha, \beta = \pm 0.3$



[Fig.9] Experimental results by chattering reduction algorithm. (case of disturbance existence)

$h=38[\text{msec}]$ $c=0.075$ $\alpha, \beta = 0.3$ ($\Delta = h/2$)