SIP를 이용한 Computer-Aided 제어기 설계에 대한 알고리즘

권태용, 이종용, 양태규, 이상효
광운대학 전자공학과

An Alogorithm for Computer-Aided Controller Design using Semi-Infite Programming Technique

Tae-Yong Kwon, Chong-Yong Lee, Tae-Gyu Yang, Sang-Hyo Lee
Depart of Electronics, Kwang Woon University

Abstract

Both combinatorial and parametric optimization are used in computer-aided design(CAD). The most commonly occuring parametric optimization problems in engineering design such as design of control systems, design of electric circuits are usually expressed either as differentiable or as nondifferentiable semi-infinite programming(SIP) problems. In this paper we express algorithms for a class of computer-aided design problems arising in control systems.

1. 서 론

매개 변수 최적화는 설계변수에 대한 유용한 값을 선택하는 데 강력한 도구이며 여러분야의 공학적 설계 기술에서 점점 더 확대되어 사용되고 있다.
특히 자동 조절기와 같은 동적계통에 대한 설계는 선형 또는 비선형 연립부등식의 집합으로 나타낼수 있는 제한요소를 만족하도록 요구된다. 이러한 일반적인 수학적 연립부등식의 집합을 제한요소로 갖는 최적화 문제에 대해 선형 계획법 및 비선형 계획법을 이용한 알고리즘이 E. Polak 과 D.Q.Mayne에 의해 제안되었다.

제어 계통에 대한 설계 문제가 수학적으로 표현되었을 때 계통응답에 대한 유계는 시간과 주파수에 대해 매개 변수화된 무한계통의 부등식 형태를 가지며 만족되어야 할 보상기의 설계 매개 변수가 유한수의 형태을 갖는다. 이와 같은 부등식을 반 무한(Semi-Infinite) 부등식이라 한다. 반 무한 최적화(Semi-Infinite optimization)는 제어 계통의 전체적인 새로운 방식을 제시하였다. 특히 점별(pointwise) 미분 가능한 시간, 주파수 응답에 대한 제한요소 뿐만 아니라 미분 불가능인 전달함수 행렬의 특이점과 계통행렬의 고유치에 대한 제한요소에 대해서 풀 수 있는 알고리즘이 제시되었다.

본 논문에서는 제어 계통에서 일어나는 전형적인 정준표현을 이용하고 이들의 계통 정수의 준최적해를 얻기 위한 최적화 알고리즘을 제시하고자 한다.

2. 이 론

공학적 설계 문제에 관련하여 전형적인 결정 모델(decision model) 문제에 사용하는 수리계획법 (mathematical programming)은 다음과 같이 표시된다.

$$\min\{f^{\circ}(x) \mid f^{j}(x) \leqslant 0,\ j\in M ;\ \max_{\omega_j\in\Omega_j} \phi^{j}(x,w) \leqslant 0,\ j\in I\} \quad (1)$$

여기서, $M \triangleq \{1,2,\ldots,m\}$, $I \triangleq \{1,2,\ldots,l\}$ 이고 $f^j : R^n \to R^1$, $j\in M$와 $\phi^{n_j}: R^n \times R^1 \to R^1$, $n_j = 1,2,\ldots,l$은 연속 미분 가능하며 집합 Ω_j: $j\in I$ 은 R^{n_j} 의 콤팩트 집합이다.
(1)식과 같은 표현에 대하여 단일 입출력 제어 계통의 예로 써 설명한다.

전달함수 G(s)로 표현되는 제어대상과 전달함수가 C(x,s)로 표현되는 보상기를 갖는 단일 입출력 제어 계통의 블록 선도는 그림 1과 같다. 여기서 x는 선택된 설계 매개변수 벡터이다.

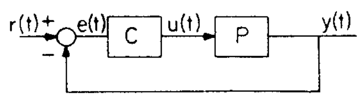

그림 1. 단일 입출력 제어 계통

이 계통은 아래와 같은 방정식을 만족한다.

$$y(t,x) = G(s) * u(t,x)$$

$$u(t,x) = C(x,s) * e(t,x) \qquad (2)$$
$$e(t,x) = r(t) - y(t,x)$$

간단한 경우, 설계에 필요한 3가지 제한 요소 집합을 고려하자.

첫째, 설계 매개변수 x는 양의 유계라 한다.

$$0 \le x \le b \qquad (3)$$

둘째, 그림 2의 시간 응답에 대한 설계 명세로써 폐경로 계통의 계단 응답에 대한 시간 영역 제한 조건을 (4)와 같이 정한다.

$$rl(t) \le y(t,x) \le ru(t) \qquad (4)$$

여기서, $t \in [0, T]$이고 $rl(t)$와 $ru(t)$는 구간 상수 함수(piece-wise constant function)이다.

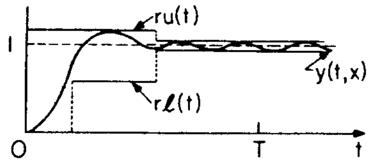

그림 2. 계단 응답 제한조건

끝으로, 그림 3에서 보듯이 폐경로 계통에 대한 극점이 포물선 방정식 $g(s) \le 0$ 조건을 만족하는 복소 평면상에 놓여있는 것을 요구한다.

$$g(s) = z + aw^2 + c \qquad (5)$$

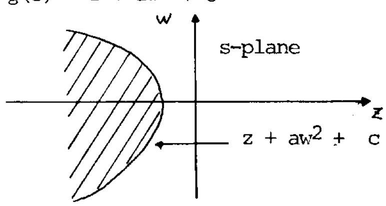

그림 3. S평면에서의 극점의 제한조건.

여기서, a,c 는 양수이다. (5)식은 수정된 Nyquist 안정도 판별법을 사용함으로써, 그림 6로부터 $z + aw^2 + c < 0$을 만족하기위한 제한 조건을 다음과 같이 표현된다.

$$\mathrm{Im}\, T(x,w) - p(\mathrm{Re}\, T(x,w))^2 + q \le 0 \qquad (6)$$

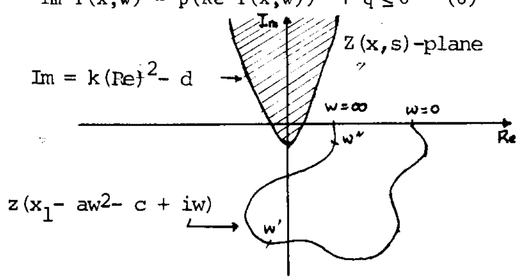

그림 4. Z(x,s) 평면에서의 제한조건.

여기서 $w \in [w', w'']$이고 p,q 는 양수 이고 $T(x,w)=1+C(x,jw) * G(jw)$이다. G(s)에 대한 최적 제어입력 $u^*(t)$를 얻는 평가함수로 계단 응답 r(t)에 대한 영상태 (zero state)응답의 평균 자승 오차(mean square error)를 선택한다.

$$f(x) = \int_0^T u(t,x)^2\, dt \qquad (7)$$

위에서 제시한 전제들을, (1)식과 관련하여 검토하면

(1) 집합 Ω_j는 모두 유한 구간이고,

(2) 지정된 구간에서 임의 매개 변수 x 에 대해 함수 $\phi^j(x,\cdot)$은 유한수의 국소의 극치 (local extrema)를 갖는다. 위에서 보여준 예를 통해서 다음과 같은 가정을 이끌수 있다.

(가정 1) (1) 집합 Ω^j은 R^1 에서 콤팩트 구간이다.

(2) 함수 $f^j: R^n \to R^1, j=0,1,2,\ldots,m,$는 연속적으로 미분가능하고, $\phi^j: R^n x R^1 \to R^1, j=1,2,\ldots,l,$는 연속이고, R^n에서 연속 미분 가능하고, 그라디언트 (gradients) $\nabla\phi^j(.,.)$은 연속이다.

(3) 임의의 $x \in R^n$와 $j=1,2,\ldots,l$에 대하여 $\phi^j(x,\cdot)$는 유한 수의 국소 극치를 갖는다.

이 가정과 별도로 feasible direction 형의 알고리즘을 제시하기 위해서 ϵ-active 제한요소 개념을 도입한다. 임의의 $x \in R^n$에 대해서 $\psi(x)$과 $\bar{\psi}$를 정의한다.

$$\psi(x) \triangleq \max\{f^j(x),\ j \in M;\ \max_{w \in \Omega^j} \phi(x,w),\ j \in I\} \qquad (8)$$
$$\bar{\psi}(x) = \max\{0, \psi(x)\} \qquad (9)$$

임의의 $\epsilon \geqslant 0$와 $x \in R^n$에 대해서 다음을 정의한다.

$$J_\epsilon^f(x) \triangleq \{j \in M \mid f^j(x) - \bar{\psi}(x) \geqslant -\epsilon\} \qquad (10)$$
$$J_\epsilon^\phi(x) \triangleq \{j \in I \mid \max_{w \in \Omega_j} \phi^j(x,w) - \bar{\psi}(x) \geqslant -\epsilon\} \qquad (11)$$
$$\tilde{\Omega}_\epsilon^j(x) \triangleq \{w \in \Omega^j \mid w \text{는 } \phi^j(x,\cdot) \text{ 의 국소 극대값이고, } \max_{w \in \Omega_j} \phi^j(x,w) \geqslant \bar{\psi}(x) - \epsilon\} \qquad (12)$$

마지막으로 feasible set 를 정의한다.

$$F \triangleq \{x \mid \psi(x) \leqslant 0\} \qquad (13)$$

(가정 2) (1) F집합 내부는 공집합이 아니며, F집합 내부의 보집합은 집합 F 와 같다.

(2) 모든 $x \in R^n$에 대해서, $\nabla_x\phi^j(x,w)$, $w \in \tilde{\Omega}_0^j(x)$, $j \in J_0^\phi(x)$와 $\nabla f^j(x)$, $j \in J_0^f(x)$는 양의 선형 독립이다.

가정2의 (1)은 집합의 폐포성을 나타내며, (2)는 Kuhn—Tucker 제한요소 자격요건 (constraint qualification)이 성립하기위한 충분조건이다.

다음으로 적절한 추정방향(search direction)을 산출하는 함수를 정의하면, 이 함수는 2차 수리계획법(quadratic programming)가 되며, 임의의 $x \in R^n$ 와 $\epsilon \ge 0$에 대해서 최적함수 $\theta_\epsilon: R^n \to R^1$은 다음과 같이 정의된다.

$$\theta_\epsilon(x) \triangleq \min_{h \in R^n} \{\tfrac{1}{2}\|h\|^2 + \max\{\langle \nabla f^0(x), h\rangle - r\psi_0(x);\ \langle \nabla f^j(x), h\rangle,\ j \in J_\epsilon^f(x);\ \langle \nabla_x \phi^j(x,w), h\rangle,\ w \in \tilde{\Omega}_\epsilon^j(x),\ j \in J_\epsilon^\phi(x)\}\} \qquad (14)$$

여기서, $S \triangleq \{h \in R^n \mid \|h\|_\infty \le 1$ 이고 r는 1보다 큰 상수이다. (14)식에 의하여 정의된 최적함수는, $\tilde{\Omega}_\epsilon^j(x)$, $j \in M$이 유한수의 점들을 포함하고 있기 때문에, 컴퓨터 알고리즘을 실현시킬수 있다. (14)식에 의해 정의된

최적함수 해를 $h_\epsilon(x)$로 표시한다. $h_\epsilon(x)$를 풀기 위한 좀 더 효과적인 방법을 얻기 위해, 쌍대성(duality)를 이용하여 (14)식을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\theta}_\epsilon(x) \triangleq \max_{\mu \geq 0} \Big\{ -\tfrac{1}{2} \Big\| \mu^0 \nabla f^0(x) + \sum_{j\in J_\epsilon^\phi(x)} \sum_{w \in \tilde{\Omega}_\epsilon^j(x)} \mu^{j,w} \nabla_x \phi^j(x,w) + \sum_{j \in J_\epsilon^f(x)} \mu^j \nabla f^j(x) \Big\|^2 - \mu^0 \gamma \bar{\psi}(x) + \sum_{j\in J_\epsilon^\phi(x)} \sum_{w \in \tilde{\Omega}_\epsilon^j(x)} \mu^{j,w} (\phi^j(x,w) - \bar{\psi}(x)) + \sum_{j \in J_\epsilon^f(x)} \mu^j (f^j(x) - \bar{\psi}(x)) \Big| \mu^0 + \sum_j \sum_w \mu^{j,w} + \sum_j \mu^j = 1 \Big\} \tag{15}$$

(가정 1)의 (3)으로 말미암아 (15)식은 유한 차원의 2차 수리계획법이 된다. 그리고 만약 $\hat{x} \in F$일때, $\hat{x}$는 (1)식에 대한 F. John조건(필요, 충분 조건) $\theta_0(\hat{x})=0$을 만족한다. 또한 $x \in F^c$이면 $\bar{\psi}(x) > 0$이고 $\theta_0(x)<0$이다. 그래서 (15)식에서 $\mu(x)$가 얻어졌을 때, 방향벡터는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$h_\epsilon(x) = \mu^0_{(x)} \nabla f^0(x) + \sum_j \sum_w \mu^{j,w}_{(x)} \phi^j(x,w) + \sum_j \mu^j_{(x)} \nabla f^j(x) \tag{16}$$

위의 (15)식에서 보면 x가 feasible한 요소이면, $h_\epsilon(x)$는 $f^0(x)$에 대해 feasible descent 방향이고, x가 사용 가능한 집합 요소가 아니라면 $h_\epsilon(x)$는 $\psi(x)$에 대한 감소 방향이다. 그리고 (16)식의 방향 벡터는 자기 스케일링(Self-Scaling) 효과와 x 차원의 증가에 따른 알고리즘 수렴비가 좋다. 이상에서 본 (1)식에 대한 방향 벡터 (15)을 이용하여, (15)식이 F. John조건을 만족하는 $\hat{x}$를 얻기 위한 알고리즘을 3장에서 제시한다.

3. 수행 알고리즘

먼저 참고(7)에서 제시한 알고리즘 모델을 고려하자. 이 모델은 추정함수(search function) A: $R^n \rightarrow 2^{R^n}$을 사용한, 사용 가능한 점의 집합 $\Delta \subset R^n$의 한 부분집합의 점을 발견하는 추상적인 문제와 관련된다.

알고리즘 모델

자료 (data): $z_0 \in R^n$

단계 0: i =0 으로 놓는다.

단계 1: $z_i \in \Delta$ 이라면 수행을 멈추고, 그렇지 않다면 $z_{i+1} \in A(z_i)$를 계산한다.

단계 2: i =i + 1 로 놓고 과정 1로 돌아 간다.

(1)식에 대한 해를 얻기 위해서, 유한 시간 내에 $\max_{w \in \Omega} \phi^j(x,w)$ 또는 $\tilde{\Omega}_\epsilon^j(x)$, $j \in M$을 평가하기 불가능하므로 각 $\phi^j(x,w)$, $j \in M$의 선형 구간 근사법(piece-wise linear approximation)을 이용한다.

$\Omega \triangleq [w_0, w_c]$라 하자. 그리고 $\Delta_q = (w_c - w_0)/q$, $q \in Z_+$이라 할 때 Ω_q을 정의하자.

$$\Omega_q \triangleq \{ w \in \Omega \mid w = w_0 + k\Delta q,\ k=0,1,\cdots,q \} \tag{17}$$

Ω_q안의 점들은 망목점(mesh points)이라 한다. $x \in R^n$, $j \in M$와 $w = \lambda \bar{w} + (1-\lambda)(\bar{w} + \Delta q)$, $\lambda \in [0,1]$, $\bar{w} \in \Omega_q$가 주어졌을 때 $\phi_q^j(x,w)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_q^j(x,w) \triangleq \lambda \phi^j(x,\bar{w}) + (1-\lambda)\phi^j(x, \bar{w}+\Delta q) \tag{18}$$

2장에서 정의된 (8), (9), (10), (11), (12)에서 $\psi_q(x)$, $\psi_{q,0}(x)$, $J_{q,\epsilon}^f(x)$, $J_{q,\epsilon}^\phi(x)$, $\tilde{\Omega}_{q,\epsilon}^j$은 $\phi^j(\cdot) \longrightarrow \phi_q^j(\cdot)$: $\psi(x) \longrightarrow \psi_q(x)$: $\bar{\psi}(x) \longrightarrow \psi_{q,0}(x)$: 로 대치하면 얻을 수 있다. 이를 이용하여 (15), (16)식으로 부터 수행할 수 있는 알고리즘을 얻을 수 있다.

알고리즘

자료 (data): $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $\delta > 0$, $\gamma \geq 1$, ϵ_0 $(0,\infty)$
$M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $z_0 \in R^n$, $q^0 \in Z_+$, $M > 0$

단계 0: i =0, q = q_0, k =0 로 놓는다.

단계 1: $\epsilon = \epsilon_0$로 놓는다.

단계 2: $\tilde{\Omega}_{q,\epsilon}^j(x_i)$ 과 $\tilde{\Omega}_{q,0}^j(x_i)$을 계산한다.

단계 3: $h_{q,\epsilon}(x_i)$ 과 $\theta_{q,\epsilon}(x_i)$을 계산한다.

단계 4: $\theta_{q,\epsilon}(x_i) \leq -\delta\epsilon$이면 과정 6으로 가고 그렇지 않으면 과정 5로 가라.

단계 5: 만약 $\epsilon \leq M_1/2^q$과 $\psi_{q,0}(x_i) \leq M_2/2^q$ 이라면 q=q+1, $y_k = x_i$, k=k+1 로 놓고 과정1로 가라. 그렇지 않으면 $\epsilon = \epsilon/2$로 놓고 과정 2로 가라.

단계 6: 만약 $\psi_{q,0}(x_i)=0$ 이면

$$f^0(x_i + \sigma_i h_{q,\epsilon}(x_i)) - f^0(x_i) \leq -\alpha\sigma_i\delta\epsilon \tag{19}$$

$$f^j(x_i + \sigma_i h_{q,\epsilon}(x_i)) \leq 0 \tag{20}$$

$$\phi_q^j(x_i + \sigma_i h_{q,\epsilon}(x_i)) \leq 0 \tag{21}$$

을 만족하는 가장 큰 스텝 크기 $\sigma_i = \beta^{l_i} \in (0,M]$을 계산하라. 만약 $\psi_{q,0}(z_i) > 0$ 이면

$$\psi_q(x_i + \sigma_i h_{q,\epsilon}(x_i)) - \psi_q(x_i) \leq -\alpha\sigma_i\delta\epsilon \tag{22}$$

을 만족하는 가장 큰 스텝 크기 $\sigma_i = \beta^{l_i} \in (0,M]$ $(l_i \in Z_+)$을 계산하라.

단계 7: $x_{i+1} = x_i + \sigma_i h_{q,\epsilon}(x_i)$, i=i+1 로 놓고 과정 1로 가라.

이 알고리즘으로 부터 얻은 무한 수열 $\{x\}_{i=0}^\infty$에서 수열 $\{x_k\}$에 대한 임의의 집적점 (accumulation points) $\hat{x}$는 사용 가능한 점이며, F. John 조건의 $\theta_0(\hat{x})=0$을 만족한다.

4. 결 론

본 논문에서는 매개변수 최적화 문제를 해결하는 새로운 알고리즘을 제시했다. 이 새로운 알고리즘은 범함수를 포함하는 보다 일반적인 문제로 비선형 계획법을 확장하였으며, 주어진 집합에 대한 ε-active 국소 극치점을 사용함으로써 추정방향을 계산시간과 용량을 절약할 수 있다. 또한 주어진 시간과 주파수 구간에서 유계인 시간과 주파수 응답으로 표현된 제한요소를 허용함으로써 제어기 설계를 보다 용이하게 하였다 그러므로 본논문의 알고리즘은 제어계통의 설계문제

에서 일어나는 매개변수 최적화 문제를 해결하는데 더 좋은 계산 결과를 제공한다.

REFERENCES

(1)E. Polak and D. Q. Mayne "An Algorithm for Optimization Problems with Functional Inequality Constraints" IEEE Trans. Automatic Control. Vol. AC-21, pp.184-193, 1976

(2)E. Polak "Semi-Infinite Optimization in Engineering DEsign", pp.236-248, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,V.215, Spring -Verlag, 1983

(3)E. Polak and Y. Y. Wardi "A Nondifferentiable Optimization Algorithm for the Design of Control Systems subject to Singular Value Inequalities over a Frequency Range",Automatica, Vol.18, No.3, pp.267-283, 1982

(4)E. Polak and R. Trahan "An Algorithm for Computer-Aided Design Problems", in Proc.1976 IEEE conf. on Decision and Control", pp.537-542, Dec. 1976

(5)M. Bazara "Nonlinear Programming", Toy Wiley and Sons, 1979

(6)O. Pironneau and E. Polak "Rate of Convergence of a Class of Methods of Feasible Direction", SIAM. J. Numer. Analysis, pp.61-74, 1973

(7)E. Polak, R. Trahan and D. Q. Mayne "Combined Phase I, Phase II Method of Feasible Direction", Math. Programming, Vol.17, No.1, pp.61-74, 1979

(8)C. Gonzaga, E. Polak and R. Trahan "An Improved Algorithm for Optimization Problems with Functional Inequality Constraints", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-25, No.1, pp.49-54, 1980, Feb.

(9)E. Polak "E. Polak "Algorithm for a Class of Computer-Aided Design Problems:A Review", Automatica, Vol.15, pp.531-538,1979

(10)E. Polak "Computational Methods in Optimization", Academic Press, 1971

(11)E. Polak "Mathematics in Science and Engineering", Vol.77, Academic Press