

가로흐름에서 연직상향평면부력절
(Plane Vertical Buoyant Jets in Crossflow)

요 지

흐름수역에서 연직상향으로 방류되는 평면부력절의 기동이 연속방정식, 운동량방정식 및 추적물수송식의 기본방정식에 의하여 수치적으로 해석된다. 난류확산에는 Prandtl의 혼합거리이론을 도입한 난류수송모형이 이용된다. 수치해 과정은 기본방정식을 유함수(stream function)식, 와도수송(vorticity transport)식으로 변환한 후, 절방류속도와, 방류구폭 등으로 표현되는 변수와 흐름을 지배하는 무차원 매개변수를 도입하여 무차원 형태로 표현하는 부분과 successive under-relaxation과 Gauss-Seidel반복법으로 수행하는 부분으로 이루어진다. 적절한 relaxation 계수를 선정하므로써 안정되고 수렴성이 좋은 계산이 수행된다.

절방류 속도와 가로흐름 속도의 비가 속도비(velocity ratio)로 정의되며 속도비가 8 - 15의 범위에서 부력절으로 인한 주변흐름수역의 속도변화 온도상승범위, 흐름상태(유선) 및 와도가 조사되었으며 절의 경로에 대하여 속도비와 방류밀도후르드수의 영향이 또한 조사되었다. 절중심선의 속도와 온도변화, 국부밀도후르드수의 변화가 구해지며 퍼짐율(dispersion ratio), 확산비(spreading rate)가 방류밀도후르드수, 국부밀도후르드수 및 방류구로부터의 경로의 향으로 해석되었다. 또한 속도와 온도 분포에 유사(similarity)가 존재함이 밝혀졌으며 본 연구와 같은 조건의 범위에서는 Gaussian분포를 이용한 적분형해석(integral type analysis)이 가능한 것으로 사료된다.

1. 서 론

화력 및 원자력발전소의 냉각수, 공장폐수와 가정하수 등과 같이 주위수용수에 비하여 온도(또는 밀도)가 다른 각종 하천수가 흐름상태의 자연수역으로 방류되는 경우 이들의 흐름은 운동량절과 플룸(plume)의 두 특성을 모두 갖는 부력절으로 정의된다. 부력절은 흐름방향으로 역학적 특성을 고려하여 운동량지배영역(momentum dominated region), 전이영역(transitional region), 부력지배영역(buoyancy dominated region)으로, 또는 기하학적 특성을 고려하여 핵영역(core region), 만곡영역(deflection region), 와영역(vortex region)으로 나누어진다. (그림 1)

부력절의 해석방법은 수리모형(hydraulic model)실험, 적분형해석(integral type analysis)기법과 수치실험(numerical experiment)기법 등으로 나누어질 수 있다. 적분형해석기법은 그 간단함때문에 자주 이용되어 왔으며, 이 기법은 퍼짐율과 확산비의 두 계수를 필요로 한다, 그러나 이 두 계수는 부력절의 양단경계인 운동량절과 플룸에서만 주어졌으므로 임의의 방류조건(discharging condition)에 대한 퍼짐율과 확산비가 필요한 것은 당연하다.

지금까지의 많은 연구가 운동량절과 플룸에 편중되어 왔으므로 본 연구에서는 부력절의 기동에 대한 정보제공에 중점을 두며, 퍼짐율과 확산비 및 부력절의 기동을 Prandtl의 난류모형이 도입된 차분형태의 유함수(stream function)식, 와도수송(vorticity transport)식과 추적물수송(constituent transport)식으로 해석한다.

2. 기본방정식과 경계조건

주변유체의 온도(또는 밀도)가 일정한 흐름영역에 주변유체와 온도가 다른 절유체가 연직상향으로 방류되는 평면부력절에 관한 해석이 기술되며 다음의 가정을 전제로 한다. 흐름은 비압축성, 점류이고 완전난류이다. 또한 주변수역은 일정한 수평방향 유속을 갖으며 자유수면은 연직방향으로 변형되지 않고 일정하게 유지된다. 분자확산(molecular diffusion)은 무시되고 작은 밀도차이에는 Boussinesq의 가정이 적용된다.

2.1 기본방정식

위와 같은 조건에서 2차원 기본방정식은 다음과 같다.

연속방정식

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

운동량수송식

수평 x-방향

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P^{\circ}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2)$$

연직 z-방향

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P^{\circ}}{\partial z} + g \frac{\rho_a - \rho}{\rho_o} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3)$$

추적물수송식

$$u \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + w \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \quad (4)$$

여기서 x 와 z 는 각각 수평방향, 연직방향 좌표를 나타내며 u 와 w 는 각각 시간평균한 수평과 연직방향의 속도성분이고, P° 는 정수압조건으로부터 편(deviatoric)되는 평균 동수압을 나타낸다. 그리고 ϵ_x 와 ϵ_z 는 각각 수평과 연직방향의 운동량의 난류확산을 나타내는 와점성계수(eddy viscosity)이며 k_x 와 k_z 는 이에 대응하는 추적물의 와확산계수(eddy diffusivity)이다.

시간평균한 온도 T (또는 밀도 ρ)는 수송되는 추적물(transferable constituent)로 고려될 수 있으며 식(4)의 추적물상대농도 Γ 는 다음과 같이 정의되며 밀도차이 $\Delta\rho$ 는 부력으로 표현된다.

$$\text{온도} \quad \Gamma_T = \frac{\Delta T}{\Delta T_o} = \frac{T - T_a}{T_o - T_a}$$

$$\text{부력} \quad \Gamma_B = \frac{\Delta \rho}{\Delta \rho_o} = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a - \rho_o}$$

여기서 첨자 a 와 o 는 각각 주변수역과 방류유체를 뜻한다. 상태방정식으로부터 온도와 밀도의 관계는 다음된다.

$$\frac{\rho - \rho_a}{\rho_0} = \beta (T - T_a) \quad (5)$$

여기서 β 는 팽창계수로 온도 $T(x, z)$ 의 함수이다. 그러나 한정된 온도범위에서는 상수로 가정되어도 매우 만족할만한 근사치를 제공한다. β 가 상수로 상수로 취급되는 경우에는 $\Gamma_B = \Gamma_T$ 의 관계가 얻어진다.

식(1)-(3)을 유함수식과 와도수송식을 이용하여 변환하면 수송식의 수가 줄고 압력항이 소거됨으로써 압력항과 관련된 계산상의 어려움이 제거된다. 이 과정은 다음에 기술되며 유함수식과 와도수송식을 얻기 위해 와도 ω 와 유함수는 다음과 같이 정의 된다.

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = w \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -u \quad (8)$$

ϵ_x 와 ϵ_z 를 상수로 가정하고 식(2)와 (3)을 교차미분한 후, 두 식의 차이로써 보존적(conservative)형태의 와도수송식이 얻어진다.

$$\frac{\partial (u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial (w\omega)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\rho_a - \rho}{\rho_0} \right) + \epsilon_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \quad (9)$$

유함수식은 식(7)과 (8)을 식(6)에 대입함으로써 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega \quad (10)$$

2.2 무차원 기본방정식

앞에서 기술된 기본방정식을 다음의 무차원 변수와 매개변수를 도입하여 변환하면 여러가지 방류형태와 주변수역 환경에 쉽게 적용시킬 수 있다. 기본방정식에 도입되는 무차원 변수와 매개변수는 다음과 같다.

무차원 변수

$$X = \frac{x}{B}, \quad Z = \frac{z}{B}, \quad U = \frac{u}{W_0}, \quad W = \frac{w}{W_0}, \quad U_a = \frac{u_a}{W_0}$$

$$\Psi = \frac{\psi}{BW_0}, \quad \Omega = \frac{\omega B}{W_0}$$

여기서 B는 방류구의 폭이며, w_0 와 u_a 는 각각 절방류속도와 가로흐름(crossflow)속도를 나타낸다.

무차원 매개변수

$$EV_x = \frac{1}{RE_x} = \frac{\epsilon_x}{BW_o}, \quad EV_z = \frac{1}{RE_z} = \frac{\epsilon_z}{BW_o}, \quad PR_x = \frac{\epsilon_x}{k_x},$$

$$PR_z = \frac{\epsilon_z}{k_z}, \quad F_o = \frac{w_o}{\sqrt{\frac{\rho_a - \rho}{\rho_o}} g B}$$

여기서 EV_x 와 EV_z 는 무차원 와점성계수로서 난류레이놀즈수 RE_x 와 RE_z 의 역수이다. 또한 PR_x 와 PR_z 는 난류프란틀수이고, F_o 는 방류밀도후르드수이다. 무차원 변수와 매개변수를 식(9), (10)과 (4)에 도입하여 얻은 무차원 유향수식, 와도수송식과 추적물수송식은 다음과 같다.

유향수식

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\Omega \quad (11)$$

와도수송식

$$\frac{\partial(U\Omega)}{\partial X} + \frac{\partial(W\Omega)}{\partial Z} = -\frac{1}{F_o^2} \frac{\partial \Gamma_B}{\partial X} + \frac{1}{RE_x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{1}{RE_z} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \quad (12)$$

추적물수송식

$$U \frac{\partial \Gamma}{\partial X} + W \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} = \frac{1}{PR_x RE_x} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2} + \frac{1}{PR_z RE_z} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial Z^2} \quad (13)$$

무차원 속도는 식(7)과 (8)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$W = \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (14)$$

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (15)$$

2.2 경계조건

그림 1과 같이 가로흐름이 있는 수역에 방류되는 부력질의 해석에는 다음의 5가지의 경계조건이 적용된다.

방류구어

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = W_o, \quad \Omega = \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial W}{\partial X}, \quad \Gamma = \Gamma_o$$

주변수역 상류(upstream)에

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = -U_o, \quad \Omega = 0, \quad \Gamma = \Gamma_o$$

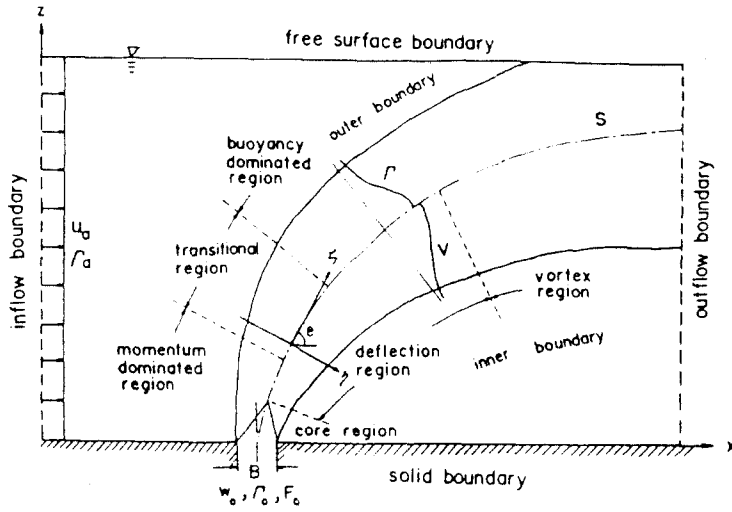


그림 1. 연직상향부력절의 개념도

주변수역 하류(downstream)에

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial \Omega}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial X} = 0$$

고체면 바닥에

$$\psi = \text{상수} \quad \Omega = \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial W}{\partial X} \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial N} = 0$$

자유수면에

$$\psi = \text{상수} \quad \Omega = 0 \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial N} = 0$$

여기서 N은 격자면의 법선(normal)방향을 나타내며, 고체면 바닥에서 속도 분포가 명확히 얻어지기 어려우므로 Ψ 의 Taylor급수 전개로부터 얻어진 다음 식을 이용한다.

$$\Omega_{i,1} = \frac{2(\Psi_{i,1} - \Psi_{i,2})}{(\Delta Z)^2} \quad (16)$$

3. 난류수송모형과 수치계산 방법

3.1 난류수송모형

운동량의 난류수송 척도가 되는 와점성계수는 흐름특성의 함수이다. 따라서 이 와점성계수를 시간평균한 흐름특성과 연관시키는 것이 가능하다. 본 연구에서는 Prandtl의 혼합거리 이론을 적용하여 다음과 같이 얻는다.

$$\epsilon_x = C_x b w_c \quad (17)$$

여기서 C_x 는 상수, b 는 혼합영역(mixing zone)의 폭이며 w_c 는 절중심선에서 속도이다. Reichardt는 평면절에 대해서 적분기법과 실험자료를 이용하여 와점성계수의 상수 C_x 가 0.037임을 밝혔고 다음과 같이 정리하였다.

$$\epsilon_x = 0.037 b_{1/2} w_c \quad (18)$$

여기서 $B_{1/2}$ 은 $w/w_c=1/2$ 되는 중심선으로부터 수평거리 x 를 나타낸다.

추적물어 대한 와점성계수와 와확산계수의 비로 정의되는 난류프란틀수는 이론적으로 1에 가까우나 흐름형태에 따라 약간씩 차이가 있다. 근벽흐름(near wall flow)에서는 0.9, 원형젯(round jet)에서는 0.7, 평면젯(plane jet)에서는 0.5 정도의 값을 갖는다는 것이 실험에 의해서 알려져있다. 또한 한 흐름 내부에서 난류프란틀수의 변화가 매우 작으므로 평면부력절의 해석에 난류프란틀수를 0.5로 취한다.

3.2 수치모형실험 방법

그림 2는 격자망을 구성하는 한 격자를 표시한 것이다. 수송변수 Γ 와 Ω 는 격자중심에서, 유함수 Ψ 는 격점에서 정의되고, 속도 U 와 W 는 격자망 중앙에서 정의함으로써, 식(11)-(12)에서 보여지는 이송(convective)항에 상류치 수송기법(upstream differencing)을 적용할 때 속도 평균에서 발생하는 비일관성(inconsistency)을 제거할 수 있고 어느 방향의 이송도 쉽게 처리할 수 있다. 식(11)-(13)을 차분식으로 표현함에 있어서 2차 편미분항에는 중앙차분을 이용하고, 이송항에는 상류치 수송기법이 사용된다.

그림 2와 같은 격자망을 이용해서 식(11)-(13)을 차분식으로 표현함에 있어서 2차 편미분항에 중앙차분을, 이송항에 상류치 수송기법을 이용한다. 5격점방법, SUR(successive under-relaxation)과 Gauss-Seidel 반복법을 이용하여 부력절의 해석에 필요한 변수 Γ , Ω 와 Ψ 를 다음 순서로 계산한다. SUR은 relaxation계수가 1보다 작은 경우를 이룬다.

- (1) 안정된 계산 수행을 위하여 운동량절과 플룸의 기존 실험자료와 Gaussian상사분포를 이용하여 속도의 초기치를 가정한다.
- (2) SUR을 사용하여 Γ 를 구하고 경계조건을 대입한다.
- (3) SUR을 사용하여 Ω 를 구하고 경계조건을 대입한다.
- (4) SUR을 사용하여 Ψ 를 구하고 경계조건을 대입한다.

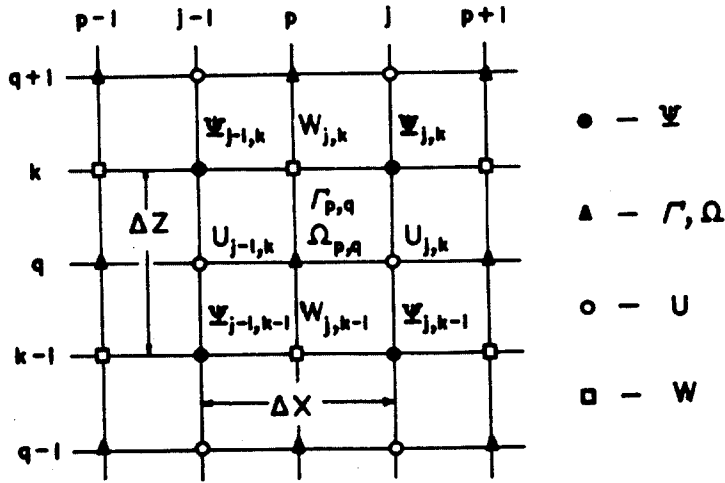


그림 2. Γ, Ω, Ψ, U 와 W 의 위치를 나타내는 차분격자

(5) Ψ 로부터 U 와 W 를 구하고, 이를 이용하여 와점성계수를 구한다.

(6) 허용오차에 값이 수렴할 때까지 (2)-(5)의 과정을 반복한다.

수렴기준은 다음과 같이 표현되며

$$\delta_f = \max \left| \frac{f_p^{n+1} - f_p^n}{f_p^n(\max)} \right| \quad (19)$$

f, n 과 p 는 각각 변수, 반복횟수와 격점을 나타낸다. 허용오차 범위는 다음과 같다.

$$\text{유함수: } \delta_\Psi < 10^{-4} \quad \text{와도: } \delta_\Omega < 10^{-3} \quad \text{온도(또는 밀도): } \delta_f < 10^{-3}$$

수치계산의 수렴성(convergence)은 relaxation계수와 와점성계수의 산점과 관련있다. relaxation계수가 0.85정도에서 가장 좋은 결과를 얻을 수 있고, 타당한 속도분포로부터 얻어진 와점성계수를 이용함으로써 수렴성이 향상된다. 안정성(stability)은 와점성계수와 관계있으며 속도분포를 올바르게 가정함으로써 계산의 불안정성이 제거된다.

4. 수치해석 결과

수치해의 결과는 부력점의 거동과 적분형해석에 필요한 계수의 예측 및 이에 관한 내용으로 이루어지며 대표적인 수치실험의 경우가 표 1에 나타나 있다.

표 1.

R	8	15
F_0	8, 15, 20, 32	6, 15, 32

속도비 $R=8$, 방류밀도후르드수 $F_0=20$ 인 경우의 속도분포, 유선모양, 온도차이 분포곡선 및 와도모양은 각각 그림 3, 4, 5, 6에 보인 바와 같다.

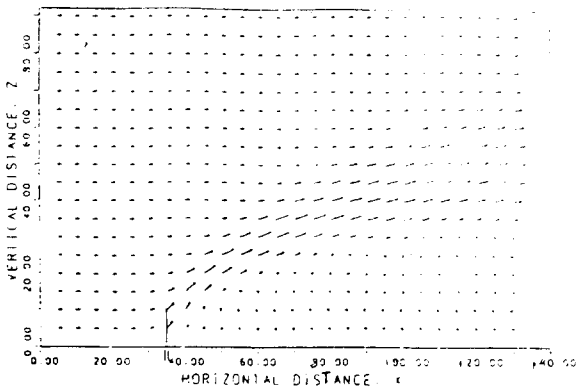


그림 3. $R=8, F_0=20$ 일 때 속도분포



그림 5. $R=8, F_0=20$ 일 때 온도차이 분포곡선
 "·" represents 0.5% of maximum value

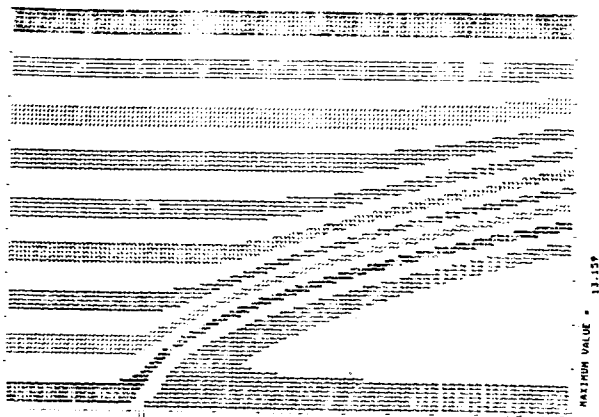


그림 4. $R=8, F_0=20$ 일 때 유선모양



그림 6. $R=8, F_0=20$ 일 때 와도모양

"·" represents 0.5% of maximum value
 "·/" represents of -0.5% of maximum value

점중심선 경로

F_0 가 일정하고 R 의 변할 때, R 이 일정하고 F_0 가 변할 때 점중심선 경로는 각각 그림 7, 8에 보인 바와 같다.

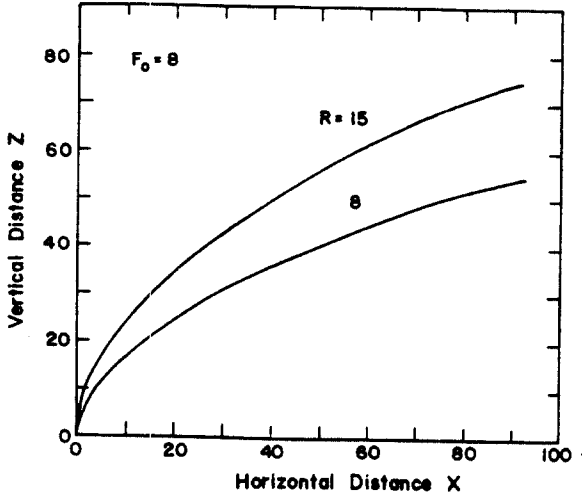


그림 7. $F_0 = 8$ 일 때 점중심선 경로

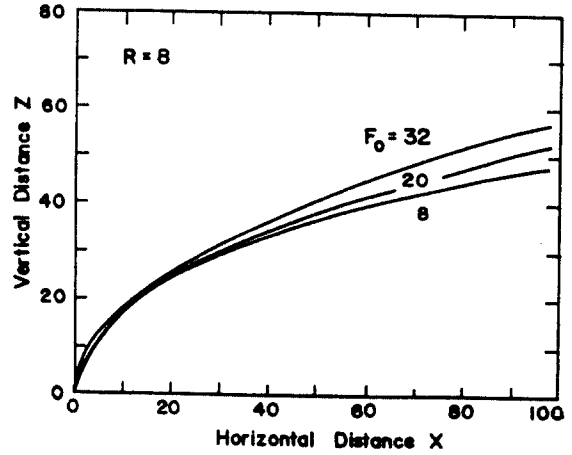


그림 8. $R = 8$ 일 때 점중심선 경로

점중심선 속도변화와 온도감쇠

$R = 8, R = 15$ 일 때 점중심선의 속도변화와 온도감쇠는 각각 그림 9, 10에 보인 바와 같으며 속도변화는 R 과 F_0 의 영향을 크게 받으며 온도감쇠는 정지수역의 그것과 거의 같은 모양을 나타내음을 알 수 있다.

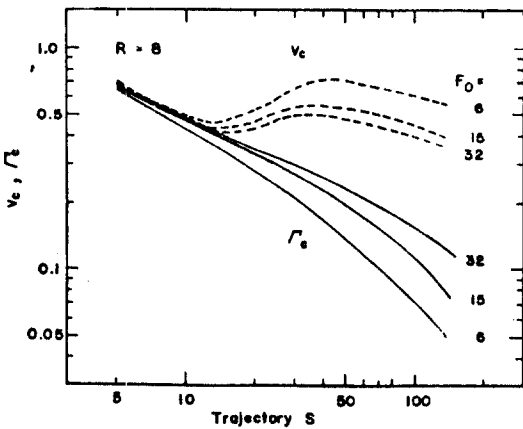


그림 9. $R = 8$ 일 때 점중심선
속도변화 및 온도감쇠

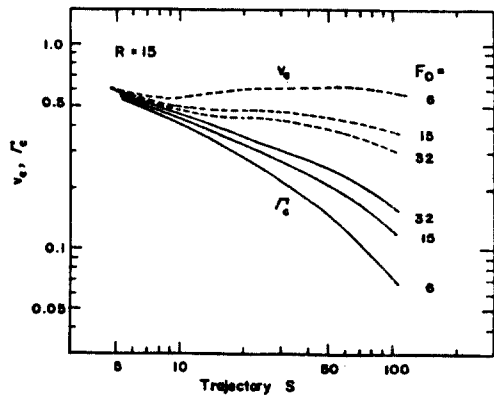


그림 10. $R = 15$ 일 때 점중심선
속도변화 및 온도감쇠

절중심선의 수직방향 속도 및 온도차이분포

절중심선의 속도분포와 온도차이분포는 각각 그림 11, 12에 보인 바와 같으며 이들을 겹쳐 놓고 보면 온도차이분포가 속도분포보다 넓게 퍼져 있는데 이 점이 바로 확산비가 존재한다는 사실을 의미한다.

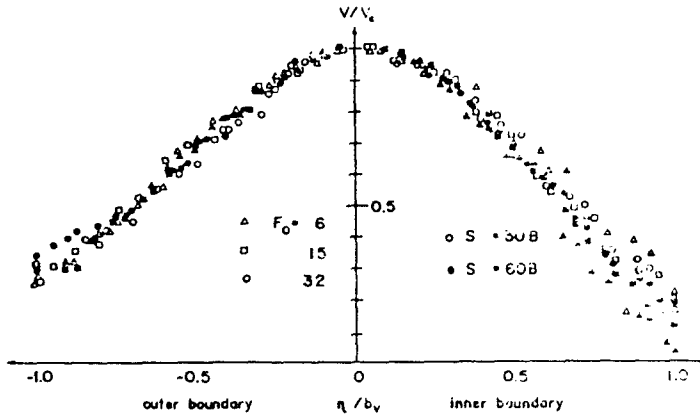


그림 11. 절중심선의 수직방향 속도분포

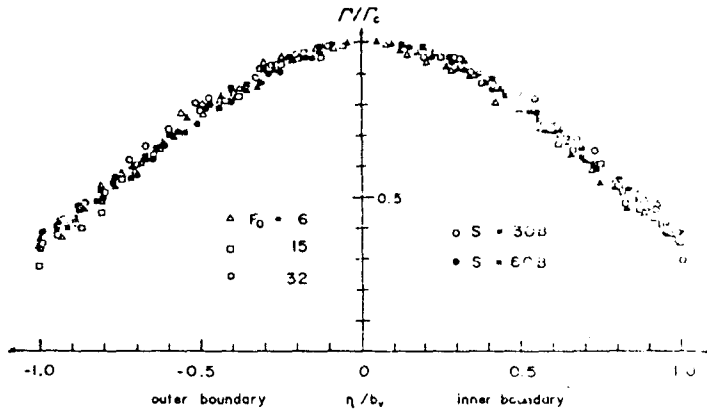


그림 12. 절중심선의 수직방향 온도차이분포

퍼짐률과 확산비

속도분포 및 온도차이분포는 Gaussian상사분포에 의해 각각 식(20), (21)로 주어진다.

$$\frac{v}{v_c} = e^{-\left(\frac{\eta}{b_v}\right)^2} \quad (20)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_c} = e^{-\left(\frac{\eta}{b_T}\right)^2} = e^{-\left(\frac{\eta}{\lambda b_v}\right)^2} \quad (21)$$

여기서 b_v 는 v/v_c 의 값이, b_T 는 $\Delta T/\Delta T_c$ 의 값이 각각 η 방향으로 $1/e=0.386$ 되는 점까지의 폭으로 정의되나 흐름수역에서는 절충심선에 대하여 상류쪽 경계와 하류쪽 경계가 대칭이 아니므로 b_v 를 두 경계의 평균치로 취한다. 국부밀도후르드수는 식(22)으로 정의되며 R 이 8, 15인 경우에 주어진 F_0 에 대한 F_L 의 변화는 각각 그림 13, 14에 보인 바와 같다.

$$F_L = \frac{w}{\sqrt{\frac{\rho_a - \rho}{\rho_o} g 2 b_w}} \quad (22)$$

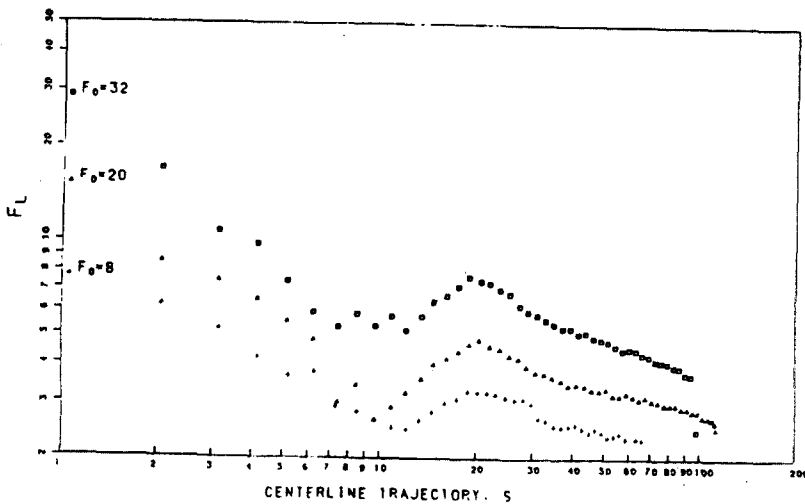


그림 13. $R=8$ 일 때 국부밀도후르드수의 변화

R 이 8, 15인 경우 퍼짐률 k 및 확산비 λ 의 변화가 각각 그림 15, 16, 17, 18에 나타나 있다.

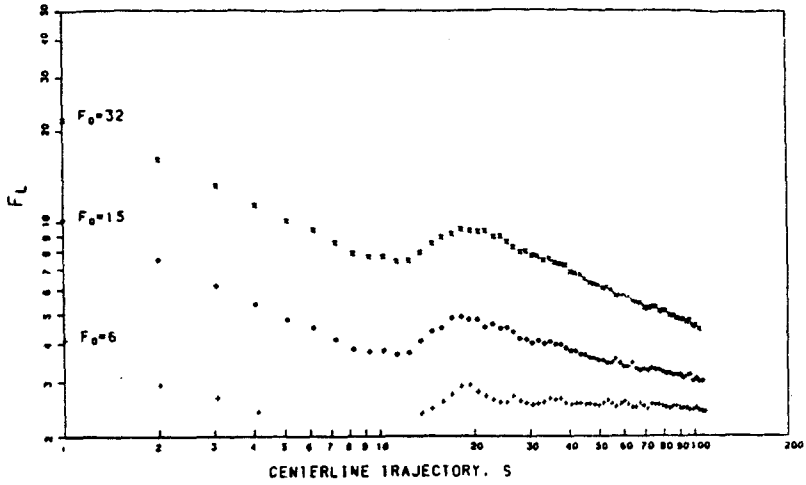


그림 14. $R=15$ 일 때 국부입도후르드수의 변화

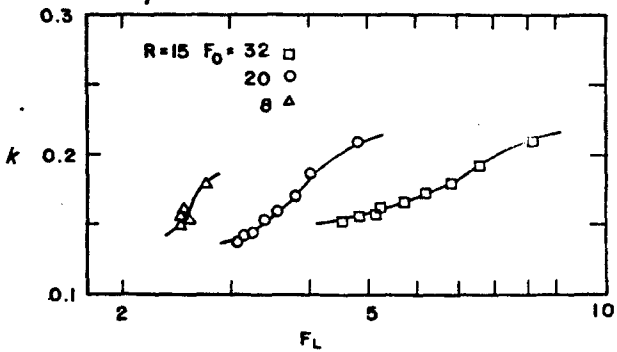


그림 15. $R=15$ 일 때 k 의 변화

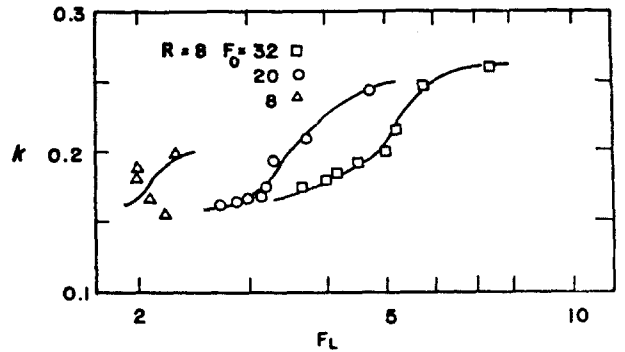


그림 16. $R=8$ 일 때 k 의 변화

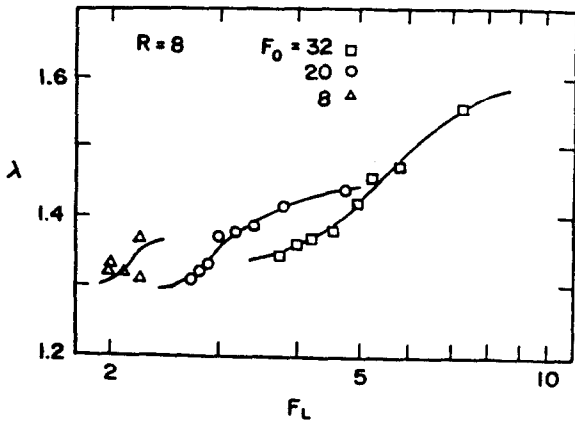


그림 17. $R=8$ 일 때 λ 의 변화

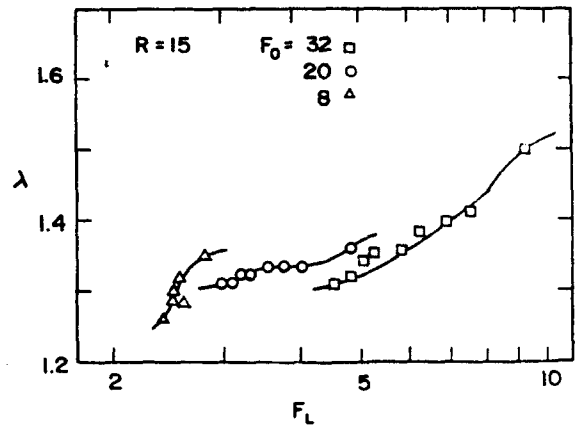


그림 18. $R=15$ 일 때 λ 의 변화

5. 결론

상이한 유속비에 대한 절중심선 경로, 절중심선 속도변화 및 온도감쇠를 방류밀도후르드수와 방류구로부터의 절중심선 경로의 항으로 해석하였다. 절중심선 속도변화는 속도비의 영향을 크게 받으며 절중심선 온도감쇠는 속도비보다는 방류밀도후르드수의 영향을 크게 받는다.

절중심선 수직방향 속도분포와 온도차이분포에서 상사가 적용될 수 있음이 밝혀졌으며, Gaussian분포를 근사시켜 대략적인 적분형해석이 가능한 것으로 밝혀졌다. 부력절에 의한 주변 흐름수의 전체의 속도분포, 유선모양과 온도차이 분포가 구해졌다.

퍼짐율과 확산비를 주어진 유속비와 방류밀도후르드수에 대해서 국부밀도 후르드수의 항으로 해석하였다. 퍼짐율의 범위는 $0.151 < k < 0.252$ 이며 확산비의 범위는 $1.26 < \lambda < 1.50$ 으로 확산비는 속도비의 영향을 적게 받음이 밝혀졌다.