

3차 INTERMODULATION의 LOWER BOUND에 관한 연구

○ 장 기 송, 이 영 철
한국전기통신공사 사업지원본부

THE LOWER BOUND OF THE THIRD-ORDER INTERMODULATION PRODUCTS

Ki-Soong Jang, Young-Choul Lee
KTARC

ABSTRACT

In this paper, a relationship between difference triangular sets and sum triangular sets is developed to evaluate the weighted number of the third-order intermodulation products. In addition, a lower bound of the intermodulation products falling into the worst signal channel has been derived using the relationship between difference triangular sets and sum triangular sets. The formulas of the lower bound are useful for estimating the intermodulation impairment level in satellite communication systems.

I. 서론

위성통신방식에 있어서 여러개의 캐리어가 한 트랜스폰더의 TWTA(Traveling Wave Tube Amplifier)에서 동시에 증폭이 되는 FDMA 나 SCPC 방식의 경우 TWTA 의 비직선성으로 인하여 IM(Intermodulation) Noise 가 생기게 되므로 위성통신 시스템의 통신품질에 나쁜 영향을 미치게 된다. 이러한 IM Noise는 트랜스폰더 내의 캐리어 주파수 배열과 직접적인 관계가 있다. 즉, 트랜스폰더의 대역폭에 각 캐리어 주파수를 적절히 배열함으로써 IM 의 수를 줄일 수 있다. [1, 2, 3]

일반적으로 위성통신 시스템에서 RF 캐리어 주파수는 트랜스폰더의 대역폭에 비해 훨씬 크므로 홀수차의 IM 만 생기게 되는데, 5차 이상의 IM Noise는 3차 IM에 비해 그 크기가 무시할 수 있을 정도로 작으므로 본 논문에서는 3차 IM만 고려하였다. 3차 IM에는 A + B - C type 과 2A - B type 이 있으며 2A - B type IM은 A + B - C type IM 보다 Power 가 6dB 낮으므로 본 논문에서는 A + B - C type IM 에

4, 그리고 2A - B type IM에 1의 Weighting 을 줌으로써 정확한 IM의 수를 구하였다. 또한 Difference Triangular Set 와 Sum Triangular Set와의 관계를 유도하여 종래의 IM Lower Bound 보다 상당히 개선된 IM Lower Bound를 제시하였다.

II. 이론적 해석

K 개의 같은 진폭과 대역폭을 가진 캐리어를 $\Omega_k (Z_k)$ 의 트랜스폰더 대역 내에 배열할 경우 각 신호채널의 주파수 배열은 (1) 과 같이 정수의 집합으로 표시할 수 있다.[4]

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_s, \dots, a_k\} \quad (1)$$

단, a_s : S 번째 신호채널의 주파수
 a_1 : 가장 낮은 신호채널의 주파수 (=1)
 a_k : 가장 높은 신호채널의 주파수
 (= Normalized Transponder Bandwidth)
 k : 신호채널의 수

여기서 신호채널 a_s 에 발생하는 3차 IM은 (2) 식과 같이 표시할 수 있다.

$$a_s = a_i + a_j - a_k \quad (2)$$

(2) 식에서 a_i, a_j, a_k, a_s 가 서로 같지 않거나 $a_s = a_k$ 일때 A + B - C type IM 이 되고, $a_i = a_j$ 일때는 2A - B type IM이 된다.

1. Difference Triangular Set

신호채널 a_s 에 발생하는 3차 IM 중 A+B-C type IM 의 수를 $N_1(a_k, k, S)$, 2A - B type IM 의 수를 $N_2(a_k, k, S)$ 라 두면 (2) 식으로 부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$= 2N_1(a_k, k, S) + N_2(a_k, k, S) \\ = \sum_{\lambda=1}^{S-1} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\nu=j+1}^k \delta(d_{\lambda S} - d_{j\nu}) + \sum_{\lambda=3+1}^k \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\nu=j+1}^k \delta(d_{S\lambda} - d_{j\nu}) \\ - (k-1) \quad (3)$$

단, $d_{xy} = a_y - a_x, y > x. \delta(x) = \begin{cases} 1; & x=0 \\ 0; & x \neq 0 \end{cases}$

그림 1은 Difference Triangular Set 의 일반 형태와 한 예를 보인 것이다.

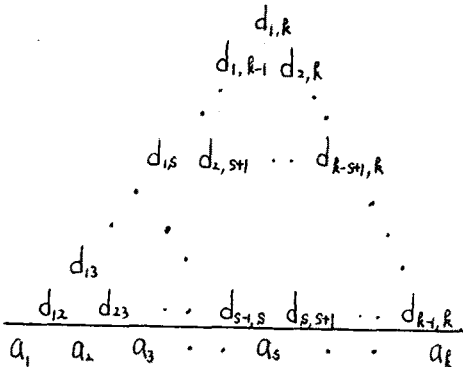
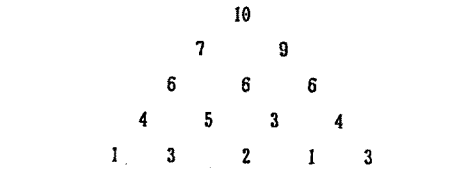


그림 1a. Difference Triangular Set의 구성



$$2N_1(a_k, k, S) + N_2(a_k, k, S)$$

그림 1b. Difference Triangular Set의 예

3차 IM의 수는 Difference Triangular Set로부터 쉽게 구할 수 있다. 예를들면 그림 1b에서 3번째 신호채널 $a_3 (=5)$ 에 발생하는 IM의 수는 a_3 와 관련된 Triangular Set의 elements ($d_{13}, d_{23}, d_{34}, d_{35}, d_{36}$)가 4, 3, 2, 3, 6이고 이것은 각각 2, 3, 1, 3, 3번씩 나타나므로 (3)식에서 $2N_1(a_k, k, S) + N_2(a_k, k, S)$ 는 $2 \times 3 + 1 + 3 + 3 - 5 = 7$ 임을 알 수 있다.

이제 모든 신호채널($a_1 \sim a_k$)에 발생하는 IM에 있어서 A + B - C type IM의 총수 $T_1(a_k, k)$, 2A - B type IM의 총수 $T_2(a_k, k)$ 라 두면 $2T_1(a_k, k) + T_2(a_k, k)$ 는 (3)식으로 부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$2T_1(a_k, k) + T_2(a_k, k) \\ = \sum_{s=1}^k \{ 2N_1(a_k, k, S) + N_2(a_k, k, S) \}$$

$$= \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\nu=j+1}^k \delta(d_{\lambda S} - d_{j\nu}) \\ + \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=3+1}^k \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\nu=j+1}^k \delta(d_{S\lambda} - d_{j\nu}) - \sum_{s=1}^k (k-1) \\ = \sum_{\lambda=1}^{s-1} \sum_{s=2+1}^k \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\nu=j+1}^k \delta(d_{\lambda S} - d_{j\nu}) \\ + \sum_{s=1}^{s-1} \sum_{\lambda=3+1}^k \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\nu=j+1}^k \delta(d_{S\lambda} - d_{j\nu}) - k(k-1) \\ = 2 \sum_{\lambda=1}^{s-1} \sum_{s=2+1}^k \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\nu=j+1}^k \delta(d_{\lambda S} - d_{j\nu}) - k(k-1) \quad (4)$$

(4)식의 $\sum_{\lambda=1}^{s-1} \sum_{s=2+1}^k \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\nu=j+1}^k \delta(d_{\lambda S} - d_{j\nu})$ 은 $d_{\lambda S} = d_{j\nu}$ 이 되는 경우의 수를 의미하는 것이므로 Difference Triangular Set의 element dis가 L인 경우의 수가 A(L)일때 $d_{j\nu}$ 이 L이 되는 경우의 수도 A(L)이 되므로 (4)식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$2T_1(a_k, k) + T_2(a_k, k) \\ = 2 \sum_{L=1}^{a_k-1} A^2(L) - k(k-1) \quad (5)$$

여기서 L : Difference Triangular Set의 elements
A(L) : Difference Triangular Set에서 L이 나타나는 횟수

그림 1b에서 A(1)=2, A(2)=1, A(3)=3, A(4)=2, A(5)=1, A(6)=3, A(7)=1, A(8)=1, A(10)=1 이므로 (5)식에서 $2T_1 + T_2$ 는 $2\{2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\} - 6 \times 5 = 32$ 가 되는 것을 알 수 있다.

2. Sum Triangular Set

본 논문에서는 Sum Triangular Set 라는 새로운 방법을 사용하여 A + B - C type IM과 2A - B type IM의 수를 효율적으로 구할 수 있도록 하였다.

(2)식에서 $a_5 + a_1 = a_2 + a_3$ 의 관계가 있으므로 신호채널 a_5 에 발생하는 3차 IM 중 A + B - C type IM의 수 $N_1(a_k, k, S)$ 와 2A - B type IM의 수 $N_2(a_k, k, S)$ 는 각각 (6)식과 (7)식으로 나타낼 수 있다.

$$N_1(a_k, k, S) = \sum_{\lambda=1}^S \sum_{\lambda=1}^{k-1} \sum_{j=\lambda+1}^k \delta(S_{\lambda S} - S_{\lambda j}) \\ + \sum_{\lambda=3+1}^k \sum_{\lambda=1}^{k-1} \sum_{j=\lambda+1}^k \delta(S_{S\lambda} - S_{j\lambda}) - (k-1) \quad (6)$$

$$N_2(a_k, k, S) = \sum_{\lambda=1}^{s-1} \sum_{\lambda=1}^k \delta(S_{\lambda S} - S_{\lambda \lambda}) \\ + \sum_{\lambda=3+1}^k \sum_{\lambda=1}^k \delta(S_{S\lambda} - S_{\lambda \lambda}) \quad (7)$$

여기서 $S_{xy} = a_x + a_y, y \geq x$

그림 2는 Sum Triangular Set의 일반형태와 한 예를 보인 것이다.

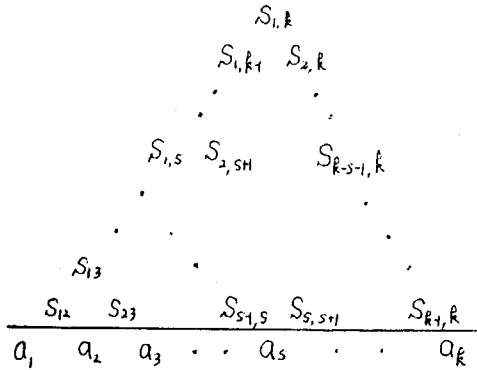


그림 2a. Sum Triangular Set의 구성

			12			
			9	13		
		8	10	16		
	6	9	13	18		
3	7	12	15	19		
<hr/>						
a_5 :	1	2	5	7	8	11
N_1 :	2	2	3	2	3	2
N_2 :	0	1	1	0	1	1

그림 2b. Sum Triangular Set의 예

이제 모든 신호채널($U_1 \sim a_k$)에 발생하는 IM에 있어서 A + B - C type IM의 총수 $T_1(a_k, k)$ 과 2A-B Type IM의 총수 $T_2(a_k, k)$ 는 (6)식과 (7)식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T_1(a_k, k) &= \sum_{s=1}^k N_1(a_k, k, s) \\
 &= \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \sum_{i=1}^k \delta(S_{ls} - S_{ij}) + \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \sum_{i=1}^{k-1} \delta(S_{ls} - S_{ij}) \\
 &\quad - k(k-1) + \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{ss} - S_{ij}) \\
 &= \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \sum_{i=1}^k \delta(S_{ls} - S_{ij}) + \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{st} - S_{ij}) \\
 &\quad - k(k-1) + \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{ss} - S_{ij}) \\
 &= 2 \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{ls} - S_{ij}) \\
 &\quad + \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{ss} - S_{ij}) - k(k-1) \\
 &= 2 \sum_{l=3}^{20k-1} B^2(L) + \sum_{s=1}^k B(2a_s) - k(k-1) \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_2(a_k, k) &= \sum_{s=1}^k N_2(a_k, k, s) \\
 &= \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{ls} - S_{ij}) + \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{st} - S_{ij}) \\
 &= \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{ls} - S_{ij}) + \sum_{s=1}^k \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-l} \delta(S_{st} - S_{ij})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^k \delta(S_{sl} - S_{il}) \\
 &= 2 \sum_{s=1}^k B(2a_s) \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서 L : Sum Triangular Set의 elements

B(L) : Sum Triangular Set에서 L이 나타

나는 횟수

B(2a_s) : B(L) 중에서 $l=2a_s$ 를 만족하는 L의 횟수

그림 2b에서 A(3), A(6), A(7), A(8), A(10), A(15), A(16), A(18), A(19)는 1, A(9), A(12), A(13)은 2이고, B(2a_3)=1, B(2a_5)=1 이므로 (8)식에서 $T_1(a_k, k) = 2 \times (1 \times 7 + 2 \times 3) + (1+1) \times 5 = 14$ 이고 (9)식에서 $T_2(a_k, k) = 2(1+1) = 4$ 가 된다. 이것을 그림 1b의 결과와 비교하면 서로 일치하는 것을 알 수 있다.

3. Difference Triangular Set 와 Sum Triangular Set와의 관계

(5), (8), (9) 식으로부터 다음과 같이 Difference Triangular Set 와 Sum Triangular Set와의 관계를 구할 수 있다.

$$\sum_{L=1}^{20k-1} A^2(L) = 2 \sum_{L=3}^{20k-1} B^2(L) + 2 \sum_{s=1}^k B(2a_s) - \frac{k(k-1)}{2} \quad (10)$$

이상의 (5), (8), (9), (10)식으로부터 $T_1(a_k, k)$ 와 $T_2(a_k, k)$ 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T_1(a_k, k) &= \sum_{L=1}^{20k-1} A^2(L) - \sum_{s=1}^k B(2a_s) - \frac{k(k-1)}{2} \\
 &= 2 \sum_{L=3}^{20k-1} B^2(L) + \sum_{s=1}^k B(2a_s) - k(k-1) \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$T_2(a_k, k) = 2 \sum_{s=1}^k B(2a_s) \quad (12)$$

A + B - C type IM의 Power는 2A - B type IM의 Power보다 6dB 더 크므로 $T_1(a_k, k)$, $T_2(a_k, k)$ 에 각각 4와 1의 Weighting을 준 $T_w(a_k, k)$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned}
 T_w(a_k, k) &= 4T_1(a_k, k) + T_2(a_k, k) \\
 &= 4 \sum_{L=1}^{20k-1} A^2(L) - 2 \sum_{s=1}^k B(2a_s) - 2k(k-1) \\
 &= 8 \sum_{L=3}^{20k-1} B^2(L) + 6 \sum_{s=1}^k B(2a_s) - 4k(k-1) \quad (13)
 \end{aligned}$$

III. IM 의 Lower bound

이장에서는 IM 의 Lower bound 를 Difference Triangular Set와 Sum Triangular Set를 이용하여 신호 채널의 수와 대역폭의 함수로 나타내었다.

1. 등간격 주파수 배열시의 IM

K 개의 캐리어 주파수를 등간격으로 배열했을때 S 번째 신호채널에 발생하는 Weighted IM 의 수 $I_{low}(k, s)$ 는 (7), (8) 식으로 부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$I_{low}(k, s) = (k-2)(k-\frac{3}{2}) + 2(s-1)(k-s) + \frac{(-1)^s}{2} \cdot \frac{1-(-1)^k}{2} \quad (14)$$

(14)식으로 부터 등간격 채널 배열시 만일 캐리어 수 k 가 많으면 가운데 채널($S = \frac{k}{2} + \frac{1-(-1)^k}{2}$)에서 발생하는 IM 의 수는 가장자리 채널($S=1$ or k)에서 발생하는 IM 수의 약 1.5 배가 된다는 것을 알 수 있다.

2. IM 의 Lower bound

IM 의 Lower bound 는 Difference Triangular Set 와 Sum Triangular Set의 관계로 부터 구한 (13) 식의 $T_w(A_k, k)$ 를 최소화 함으로써 구할 수 있다. 즉, $T_w(A_k, k) = 4 \sum_{L=1}^{Q_k-1} A^2(L) - 2 \sum_{S=1}^k B(2A_S) - 2k(k-1)$ 로 부터 IM 의 Lower bound $T_{lw}(A_k, k)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$T_w(A_k, k) \geq T_{lw}(A_k, k) = \min \left\{ 4 \sum_{L=1}^{Q_k-1} A^2(L) \right\} - \max \left\{ 2 \sum_{S=1}^k B(2A_S) \right\} - 2k(k-1) \quad (15)$$

Difference Triangular Set 에서 $\sum_{L=1}^{Q_k-1} A(L) = A(1) + A(2) + \dots + A(Q_k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ 로 일정하므로 $A(1), A(2), A(3), \dots, A(Q_k-1)$ 이 서로 같을때 $\sum_{L=1}^{Q_k-1} A^2(L)$ 은 최소가 된다. 그러나 $A(L)$ 은 다음과 같은 특성을 가진다.

$$\begin{aligned} A(Q_k-1) &= 1 \\ A(Q_k-2) &\leq 2 \\ A(Q_k-3) &\leq 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$A(Q_k-l) \leq l, \quad l=1, 2, 3, \dots, Q_k-1$$

따라서 $\sum_{L=1}^{Q_k-1} A^2(L)$ 은 L 중에서 Q_k-l ($l=1, 2, \dots, M$) 은 l 번씩 나타나고 나머지 $1, 2, \dots, Q_k-M-1$ 은 각각 m 번씩 동일하게 나타나도록 했을때 최소가 된다. (단, $M-1 < m \leq M$)

이때

$$\sum_{L=1}^{Q_k-1} A(L) = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{M(M+1)}{2} + m(Q_k-M-1) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \min \left\{ \sum_{L=1}^{Q_k-1} A^2(L) \right\} &= \{ 1^2 + 2^2 + \dots + M^2 + m^2(Q_k-M-1) \} \\ &= \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} + \frac{m}{2} \{ k(k-1) - M(M+1) \} \quad (17) \end{aligned}$$

(12)식의 $\sum_{S=1}^k B(2A_S)$ 는 등간격으로 채널을 배열했을때 최대가 되며 그때의 최대값은 (9) 식으로 부터 구할 수 있다.

$$\max \left\{ \sum_{S=1}^k B(2A_S) \right\} = \begin{cases} \frac{(k-1)^2}{4} & k : \text{홀수} \\ \frac{k(k-2)}{4} & k : \text{짝수} \end{cases} \quad (18)$$

따라서 IM 의 Lower bound $T_{lw}(A_k, k)$ 는 다음식 으로 표시 된다.

$$T_{lw}(A_k, k) = \frac{2M(M+1)(2M+1)}{3} + 2m \{ k(k-1) - M(M+1) \} - \frac{k(5k-6)}{2} \quad (19)$$

단, $M-1 < m \leq M, \quad k ; \text{짝수}$

여기서 최악의 채널(IM 이 가장 많이 생기는 채널) 에 발생하는 IM 의 Lower bound $I_{lw}(A_k, k)$ 는 (19)식에서 구한 모든 IM의 수를 균일하게 분배함으로써 구할 수 있다.

$$I_{lw}(A_k, k) = \frac{T_{lw}(A_k, k)}{k} \quad (20)$$

(19), (20) 에서 구한 IM Lower bound의 performance 를 측정하기 위하여 (20)식의 $I_{lw}(A_k, k)$ 와 (14)식에서 $\max \{ I_{low}(k, s) \}$ 의 비, 즉 정규화된 IM 의 수(Normalized IM output) $\eta(k, x)$ 는 다음식과 같이 A_k, k , 그리고 $x (= \frac{Q_k}{k})$ 로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta(k, x) &= \frac{I_{lw}(A_k, k)}{I_{low}[k, S; S=k/2]} = \frac{1}{\frac{3}{2}(k-1)(k-2)} \\ &\times \left[\frac{2M(M+1)(2M+1)}{3k} + \frac{2m}{k} \{ k(k-1) - M(M+1) \} - \frac{5k-6}{2} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

IV. Simulation 및 결과검토

여기에는 앞에서 제시한 IM 의 Lower bound 에 대한 Simulation 결과를 제시하였다.

그림 3은 신호채널의 수(k) 를 매개 변수로 하여 정규대역폭(x) 과 정규 IM 의 수(η) 사이의 관계

를 나타낸 것이며, 그림4는 정규 IM 의 수(η) 를 매개 변수로 하여 신호채널의 수(k) 와 정규대역폭 (x) 사이의 관계를 나타낸 것이다.

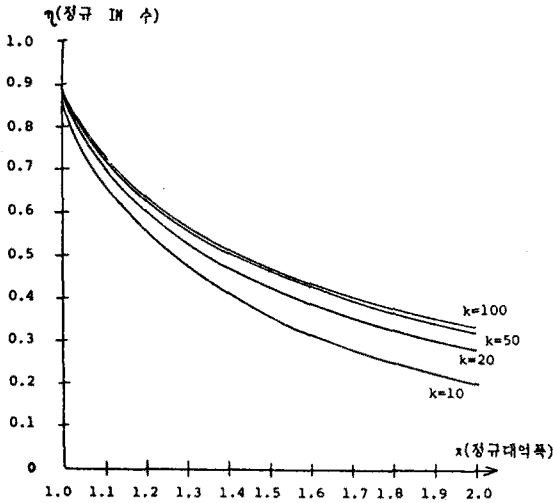


그림3 정규 IM 수와 정규 대역폭의 관계

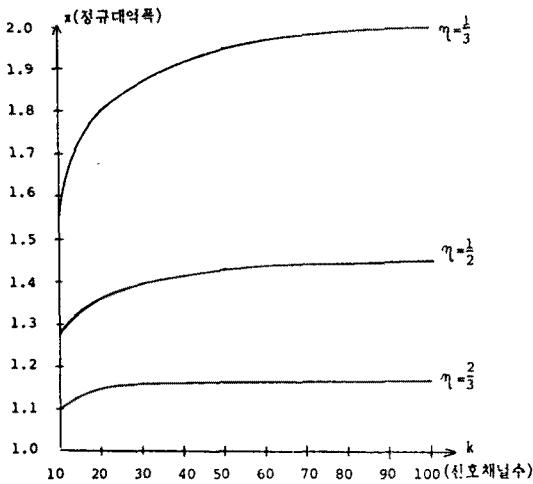


그림4 정규대역폭과 신호채널수의 관계

이상의 결과로 부터 IM 의 수를 줄이기 위해서는 그 만큼 넓은 대역폭이 필요하며 신호채널의 수가 증가할수록 대역폭의 이용효율은 감소한다는 것을 알 수 있다. 또한 이 결과로 부터, 주어진 대역폭과 신호채널의 수에 대해 최소한의 IM 수를 알 수 있으므로 위성통신 시스템의 IM Impairment level 을 estimate 할 수 있다.

V. 결론

본 연구에서는 위성통신 시스템에서 발생하는 3차 Intermodulation 의 수를 효율적으로 구할 수 있는 Sum Triangular Set 라는 새로운 방법을 제시 하였으며, Intermodulation 으로 인한 Impairment level 을 estimate 할 수 있도록 Intermodulation 의 Lower bound 를 제시하였다.

Simulation 결과 트랜스폰더 대역폭에 45% 정도의 margin 이 있으면 최적 주파수 배열의 경우 등간격 채널배열 보다 최악의 채널에 발생하는 Intermodulation 의 수를 약 반으로 줄일 수 있음을 알 수 있었다.

본 연구결과는 위성통신 시스템 뿐만 아니라 본론에서 제시한 조건을 만족하는 다른 무선통신 시스템에도 적용될 수 있다.

앞으로 Intermodulation 을 최소화 하는 최적 채널 배열의 구체적인 Algorithm 개발에 관한 연구가 계속되어야 할 것으로 생각된다.

*** 참고문헌 ***

- [1] N.F. Maxemchuck and L. shiff, "3-order IM interference bounds and interference-free channel assignment" IEEE Trans, on Comm. Vol. COM-25 PP 1041-1046, Sept. 1977
- [2] R.J.F. Fang and W.A Sandrin, "Carrier Frequency Assignment for Nonlinear Repeaters", COMSAT Technical Review, Vol 7, No.1, PP 227-245, Spring 1977
- [3] W.C. Babcock, "Intermodulation Interference in Radio Systems", BSTJ, Vol 32, No.1, PP 63, 1953
- [4] Y. Hirata, "A bound on the Relationship between Intermodulation noise and carrier frequency Assignment", COMSAT Tech. Review Vol 8, No.1, PP 141-154, 1978
- [5] H. OKINAKA, "Intermodulation Interference-Minimum Frequency Assignment for Satellite SCPC Systems" IEEE Trans. on Comm. Vol COM-32, No.4, PP 462-468, April 1984
- [6] A.A Guida, "TWT Equal Carrier Intermodulation Calculations" IEEE Trans. on Comm. Vol COM-34, No.10, PP 1024-1030, Oct. 1986