두개의 시간스케일 추계 이산시간 시스템의 다중표본화 복합제어기

○박 종 욱 , 홍 재 근 , 김 수 중
경북대학교 공과대학 전자공학과

Multirate and Composite Control of Two-Time-Scale Stochastic Discrete-Time Systems

Park,Jong-Wook , Hong,Jae-Keun and Kim,Soo-Joong
Dept.of Electronics , Graduate School , Kyungpook Natl.Univ.

ABSTRACT

It is shown that the singularly perturbed continuous-time system is led to two different discrete versions according to slow or fast sampling rates. The design of stabilizing feedback control of singularly perturbed discrete-time stochastic system is decomposed into the design of slow and fast controllers , which is combined to form the composite control. Composite control law is derived for the case of both single rate measurement and multirate measurement.

1. 서론

우주 항공분야및 전력발전소 등과 같은 대규모 시스템에서는 모델의 차수가 높을 뿐만 아니라 서로 다른 동적모드들의 상호결합으로 이루어져 "나쁜조건"이 발생되어 시스템의 해석 및 제어가 어려운 경우가 많다. 이러한 대규모 시스템의 효과적 제어를 위한 시스템 모델의 간략화 및 제어방법에는 계층적 제어,집성법,특이섭동법 및 시간스케일 분리방법 등이 있다.

최근에 특이섭동법[1] 및 시간스케일 분리법을[2] 이용한 이산시스템의 해석에 관한 많은 논문이 발표되었다. 이들은 빠른 시간스케일 접근방법과 느린 시간스케일 접근방법으로 나눌 수 있다. 앞의 경우는 빠른 시간스케일 관점에서 시스템의 동작을 해석한 방법이고,[3][4] 뒤의 경우는 느린 시간스케일 관점에서 해석한 방법이다.[5][6]

Sandel 등은[1] 이론적으로 다중 표본화 주기를 가진 이산시간 제어기를 구성할때 특이섭동 이론이 유용함을 보였고, Litkouhi 등은[9] 위의 두 방법을 조합함으로써 다중 표본화 주기를 가진 안정화 궤환제어기를 구성하였다.

본 논문에서는 외부 및 내부에 잡음이 존재하는 특이섭동 연속시간 시스템의 상태방정식으로부터 이에 대응하는 차분방정식을 분리변환을 이용하여 유도하고 복합 안정화 궤환제어기를 단일 표본화주기 및 다중표본화주기인 경우에 대해 각 각 구하였다.

2. 특이섭동 추계 차분방정식

입력과 출력에 잡음이 존재하는 연속시간 특이섭동 시스템의 상태방정식을 다음과 같이 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ e\dot{X}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} V(t) \qquad (1A)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + E(t) \qquad (1B)$$

여기서 X_1은 느린 상태벡터,X_2는 빠른 상태벡터 이며,V(t)와 E(t)는 백색 가우스 잡음이고 e는 양의 작은 매개상수이다. 시스템 (1)을 분리변환을[8] 한 후 지수행렬 exp(AT)를 계산하면 다음과 같은 특이섭동 추계 시스템의 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X_1(i+1) \\ X_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^d & A_{12}^d \\ A_{21}^d & A_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(i) \\ X_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^d \\ B_2^d \end{bmatrix} U(i) + \begin{bmatrix} E_1^d \\ E_2^d \end{bmatrix} V(i) \qquad (2A)$$

$$Y(i) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(i) \\ X_2(i) \end{bmatrix} + E(i) \qquad (2B)$$

여기서

$A_{11}^d = \exp(A_s T)(I+eML) - eM\exp(A_f/e\ T)L$

$A_{12}^d = e[\exp(A_s T)M - M\exp(A_f/e\ T)]$

$A_{21}^d = -L\exp(A_s T)(I+eML) + (I+eLM)\exp(A_f/e\ T)L$

$A_{22}^d = -eL\exp(A_s T) + (I+eLM)[\exp(A_f/e\ T)]$

$B_1^d = [\exp(A_s T) - I]A_s^{-1}B - eM[\exp(A_f/e\ T) - I]A_f^{-1}B_f$

$B_2^d = -L(\exp(A_s T) - I)A_s^{-1}B + (I+eLM)[\exp(A_f/e\ T) - I]A_f^{-1}B_f$

$E_1^d = [\exp(A_s T) - I]A_s^{-1}E_s - eM[\exp(A_f/e\ T) - I]A_f^{-1}E_f$

$E_2^d = -L[\exp(A_s T) - I]A_s^{-1}E_s + (I+eLM)[\exp(A_f/e\ T) - I]A_f^{-1}E_f$

$A_s = A_{11} - A_{12}L$, $A_f = A_{22} + eLA_{12}$, $B_s = B_1 + MB_f$

$B_f = B_2 + eLB_1$, $E_s = E_1 + ME_f$, $E_f = E_2 + eLE_1$

이다.

3.단일 표본화 복합제어기

이산시간 제어계에서 느린 모드와 빠른 모드가 같은 주기로 표본화될 때의 특이섭동 추계 시스템의 복합제어기를 구하기로 한다.

식(2)에 빠른 시간스케일 표본화주기 T_f=e을 대입하면

$$\begin{bmatrix} X_1(n+1) \\ X_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + e\tilde{A}_{11} & e\tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(n) \\ X_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e\tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} U(n) + \begin{bmatrix} e\tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \end{bmatrix} V(n) \qquad (3A)$$

$$Y(n) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(n) \\ X_2(n) \end{bmatrix} + E(n) \qquad (3B)$$

이 된다.여기서 n은 빠른 시간스케일 점을 나타낸다. 시간스케일 분리특성을 이용하면 식(3)의 시스템은

$$X_s(n+1) = (I_1 + e\tilde{A}_s)X_s(n) + e\tilde{B}_s U_s(n) + E_o V(n) \qquad (4A)$$

$$Y_s(n) = C_o X_s(n) + D_o U_s(n) + E(n) \qquad (4B)$$

의 느린 부시스템과

$$X_f(n+1) = \tilde{A}_{22}X_f(n) + \tilde{B}_2 U_f(n) + \tilde{E}_2 V(n) \qquad (5A)$$

$$Y_f(n) = C_2 X_f(n) + E(n) \qquad (5B)$$

의 빠른 부시스템으로 분리될 수 있다.

분리된 각 부시스템에 대해 각 각 독립적으로 상태변수의 최적예측을 위한 칼만필터와 예측된 상태변수로써 나타낸 시스템에 대한 안정화 궤환 제어기를 구성한다. 식(4)의 빠른 부시스템에 대한 one-step-ahead 칼만필터는 다음과 같다.

$$\hat{X}_f(n+1) = \tilde{A}_{22}X_f(n) + \tilde{B}_2 U_f(n) + K_f(n)[Y_s(n) - C_2\hat{X}_f(n)] \qquad (6)$$

$$K_f(n) = \tilde{A}_{22}P_f(n)C_2^T[R_2 + C_2P_f(n)C_2^T]^{-1}$$

$$P_f(n+1) = \tilde{A}_{22}P_f(n)\tilde{A}_{22}^T + R_1 - \tilde{A}_{22}P_f(n)C_2^T [R_2 + C_2P_f(n)C_2^T]^{-1} C_2P_f(n)\tilde{A}_{22}^T$$

$$R_1 = E[v(n)v(n)^T] , \quad R_2 = E[e(n)e(n)^T]$$

$$P(0) = Cov[X_2(0) - (I_2 - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{A}_{21}X_1(0)]$$

식(6)에 의해 예측된 상태변수 $\hat{X}_f(n)$으로 나타낸 빠른 부시스템은

$$\hat{X}_f(n+1) = \tilde{A}_{22}\hat{X}_f(n) + \tilde{B}_2 U_f(n) \qquad (7A)$$

$$\hat{Y}_f(n) = C_2\hat{X}_f(n) \qquad (7B)$$

이며, 같은 방법으로 예측된 상태변수 $\hat{X}_s(n)$으로 나타낸 느린 부시스템은

$$\hat{X}_s(n+1) = (I_1 + e\tilde{A}_s)\hat{X}_s(n) + e\tilde{B}_s U_s(n) \qquad (8A)$$

$$\hat{Y}_s(n) = C_2\hat{X}_s(n) \qquad (8B)$$

이다.

느린 부시스템에 대해 $\tilde{A}_s$의 모든 극점이 제어가능하다고 가정하면 Re $\lambda(\tilde{A}_s + \tilde{B}_s F_s) < 0$ 을 만족하는

$$U_s(n) = F_s\hat{X}_s(n) \qquad (9)$$

을 구할 수 있다. 빠른 부 시스템에 대해 $\tilde{A}_{22}$의 모든 극점이 제어가능하다고 가정하면 $|\lambda(\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 F_f)| < 1$ 을 만족하는

$$U_f(n) = F_f \hat{X}_f(n) \tag{10}$$

을 구할 수 있다.

시스템(3)에 대한 복합 안정화 궤환제어입력은 각 부시스템의 제어입력의 합으로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U(n) &= U_s(n) + U_f(n) \\ &= F_s X_s(n) + F_f X_f(n) \\ &= [F_s - F_f(I_2 - \tilde{A}_{22})(\tilde{A}_{21} + \tilde{B}_f F_s)] \cdot \\ &\quad X_1(n) + X_2(n) \end{aligned} \tag{11}$$

이 복합제어기의 오차는 e 에 비례한다.[7]

4. 다중표본화 복합제어기

앞에서 각 부시스템은 모두 빠른 주기로 표본화 되었지만 느린 상태변수의 n 에서 n+1 까지의 변화분은 미소하므로 빠른 시간스케일에서 느린 부시스템을 설계할 필요는 없다. 따라서 이 장에서는 빠른 부시스템과 느린 부시스템의 제어입력을 서로 다른 시간스케일에서 구한다.

느린 부시스템을 느린 시간스케일에서 구하기 위해 느린 시간스케일 표본화주기 $T_s = [1/e]$을 식(2)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} U(k)$$

$$+ \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix} V(k) \tag{12A}$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix} + E(k) \tag{12B}$$

을 얻는다.

여기서 k 는 느린 시간스케일점을 나타낸다.

시간스케일 분리특성을 이용하여 시스템(12)를 분리하면 느린 부시스템은

$$X_s(k+1) = \bar{A}_s X_s(k) + \bar{B}_s U_s(k) + \bar{E}_s V(k) \tag{13A}$$

$$Y_s(k) = \bar{C} X_s(k) + E(k) \tag{13B}$$

가 된다. 저차화된 시스템(13)에 대한 one-step-ahead 칼만필터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{X}_s(k+1) &= \bar{A}_s \hat{X}_s(k) + \bar{B}_s U_s(k) \\ &\quad + K_s(k)\,[Y_s(k) - \bar{C}\,\hat{X}_s(k)] \end{aligned} \tag{14}$$

$$K_s(k) = \bar{A}_s P_s(k) \bar{C}\,[R_2 + \bar{C}\,P_s(k)\,\bar{C}^T]^{-1}$$

$$\begin{aligned} P_s(k+1) &= \bar{A}_s P_s(k) \bar{A}_s^T + R_1 - \bar{A}_s P_s(k)\,\bar{C}^T \\ &\quad [R_2 + \bar{C}\,P_s(k)\,\bar{C}^T]\,\bar{C}\,P_s(k)\bar{A}_s \end{aligned}$$

$$P_s(0) = \mathrm{Cov}[X_1(0)]$$

식(14)에 의해 예측된 상태변수 $\hat{X}_s(k)$로 나타낸 시스템은 다음과 같다.

$$\hat{X}_s(k+1) = \bar{A}_s \hat{X}_s(k) + \bar{B}_s U_s(k) \tag{15A}$$

$$\hat{Y}_s(k) = \bar{C}\,\hat{X}_s(k) \tag{15B}$$

식(15)에서 A 의 모든 극점이 제어가능하다고 가정하면 $|\lambda(\bar{A}_s + \bar{B}_s \tilde{F})| < 1$ 을 만족하는

$$U_s(k) = \tilde{F}_s \hat{X}_s(k) \tag{16}$$

을 구할 수 있다. 각 부시스템 제어입력 (10)과 (16)을 조합하여 다음과 같은 다중표본화 복합제어 입력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U(n) &= [I_2 - F_f(I_2 - \tilde{A}_{22})\tilde{B}_2]\tilde{F}_s \hat{X}_1(k[1/e]) \\ &\quad - F_f(I_2 - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{A}_{21} X_1(n) + F_f \hat{X}_2(n) \\ &\quad k[1/e] \leq n < (k+1)[1/e] \end{aligned} \tag{17}$$

식(17)에서 $\hat{X}_1(k[1/e])$과 $\hat{X}_2(n)$은 측정할 수 있지만 빠른 시간스케일점에서 $X_1(n)$은 측정할 수 없다. 따라서 $X_1(n)$은 다음의 차분방정식에서 구하여야한다.

$$X_1(n+1) = (I_1 + eA_s)X_1(n) + \tilde{B}_s \tilde{F}_s \hat{X}_1(k[1/e]) \tag{18}$$

$$X_1(k[1/e]) = \hat{X}_1(k[1/e])$$

5.결론

이산시간 특이섭동 추계 시스템에 대해 분리변환을 이용하여 Euler-간략법보다 정확한 차분방정식을 유도하고 단일주기 및 다중 표본화주기 복합안정화 궤환제어기를 각 각 구하였다. 단일 및 다중 표본화주기에서 각 각 시간스케일 분리 특성을 이용하여 이산시간 추계 시스템을 빠르고 느린 두개의 부시스템으로 분리하고 각 부 시스템에서 칼만필터이득과 안정화 궤환제어기를 구하였다. 따라서 제안된 제어기는 원시스템보다 낮은 차수에서 Riccati 방정식의 해를 구하므로 계산량을 줄일 수 있고, 느린 시스템의 칼만이득을 느린 시간스케일에서 구하므로 on-line 계산량을 감소시킬 수 있다.

참 고 문 헌

1. Sandel J.N.R.,Varaiya, P. Athans M. and Safonov M.G., " Survey of decentralized control methods for large scale systems," IEEE Trans. Automat. Cont. , Ac-23, pp.108-128,1978.
2. V.R.Saksena, J.O'Reilly and P.V.Kokotovic, " Singular Perturbation and Time-scale Methods in Control Theory:Survey 1976-1983," Auomat. Vol.20 , No.3. pp. 273-293,1984.
3. G.Blnkenship, " Singularly perturbed differences in optimal control problems," IEEE Trans.Automat.Contr.,Vol.26,pp.911-917,1981.
4. B.Litkouhi and H.Khalil,"Infinite-time regulators for singularly perturbed difference equations," Int.J. Cont., Vol.39, NO.3, pp587-598, 1984.
5. R.G.Phillips," Reduced order modelling and control of two-time-scale discrete systems," Int. J. Contr., Vol.34, pp.765-, 1980.
6. A.K.Rao and D.S.Naidu,"Singularly perturbed boundary value problems in discrete systems," Int. J. Contr., Vol.34, pp.1163-1174, 1981.
7. B.Litkouhi and H.Khail, "Multirate and Composite Control of Two-Time-Scale Discrete-Time Systems," IEEE Trans. Autmat. Contr. Vol. AC-30, No.7, 1985.
8. P.V.Kokotovic, "A Riccati equation for block diagonalization of ill-contioned systems," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.20, PP.812-814, 1975.