

동적 프로그래밍 알고리즘에 의한 신호의
임펄스 잡음제거

○신현익 이진일
경북대학교 공과대학 전자공학과

Impulse Noise Cancelling of Signals Using a
Dynamic Programming Algorithm

Hyun-Ik Shin and Kuhn-Il Lee
Department of Electronics, Kyungpook National University

Abstract

A non-linear filtering for the noise cancelling of signals degraded by random impulsive noise is proposed. The non-linear algorithm is based on a criterion for the overall smoothness of the signal. The smoothness criterion is optimized by a dynamic programming strategy. It performs considerably better than a LDNF(low-distortion non-linear filter), although being comparable in computing time.

우수하며, 최적의 보너스값도 쉽게 찾을 수 있음을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 입증하였다.

II. 이 론

1. 보너스 개념에 의한 비선형 평활화

평활화하고자 하는 입력신호 A를 다음과 같이 표현한다.

$$A = [a(i)] = a(1), \dots, a(i), \dots, a(N). \quad (1)$$

평활화 알고리즘에 의해 평활화된 신호로 선택된 샘플시간 열 J는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$J = [j(k)] = j(1), \dots, j(k), \dots, j(K). \quad (2)$$

선택된 샘플시간열 J에 의해 평활화된 신호 \bar{A} 는

$$\begin{aligned} \bar{A} &= [a(j(k))] \\ &= a(j(1)), \dots, a(j(k)), \dots, a(j(K)) \end{aligned} \quad (3)$$

과 같이 표현된다. \bar{A} 는 A와 동일 시간순서로 구성되어 있으므로 식(2)의 J는 단조성을 가져야 한다. 즉,

$$j(k) < j(k+1), \quad k=1, \dots, K-1. \quad (4)$$

또한 J는 A의 시간 범위내에서 존재하기 때문에 j(k)는

$$1 \leq j(k) \leq N, \quad k=1, \dots, K \quad (5)$$

로 범위가 제한된다.

식(4)의 단조성조건과 식(5)의 경계조건을 이용하여 평활화 알고리즘을 수행하기 위해서는 적절한 기준함수를 정의하여야 한다. 그중 유용한 몇가지를 다음과 같이 정의한다.

i) 두 샘플값의 차

$$d(i, \ell) = |a(i) - a(\ell)| \quad (6a)$$

ii) 두 샘플사이의 기울기에 대한 절대값

$$d(i, \ell) = \left| \frac{a(i) - a(\ell)}{i - \ell} \right| \quad (6b)$$

I. 서 론

1971년 Tukey¹⁾에 의해 제안된 메디안 필터는 임펄스 잡음을 제거하면서도 에지(edge)를 보존할 수 있는 특성으로 인하여 선형필터를 대신하여 신호처리의 여러분야에 폭넓게 활용되고있다.^{2,3,4)} 그러나 메디안필터는 근(root) 신호일 경우에 대해서는 왜곡을 발생시키지 않으나 일반적 신호에 대해서는 왜곡을 발생시킨다.^{5,6)} 이러한 난점을 보완하기 위해 1984년 Pasian⁷⁾은 입력신호와 메디안 필터의 출력신호 차이값에 대한 히스토그램을 이용하여 왜곡을 줄일 수 있는 LDNF(low-distortion non-linear filter) 방법을 제안하였다. 그러나 이러한 히스토그램은 양봉성(bimodality)을 가져야 하며, 잡음이 무다기로 발생하는 경우 이의 제거가 어렵다는 단점을 갖는다.

이러한 단점은 1983년 Ney⁷⁾가 신호의 평활화를 위해 제안한 동적 프로그래밍 알고리즘을 임펄스 잡음제거에 적용함으로써 해결될 수 있다. 그러나 이경우 최적의 보너스 값을 찾기가 어렵다는 새로운 난점을 갖는다.

본 논문에서는 LDNF의 단점을 보완하기 위해 동적 프로그래밍 알고리즘을 신호의 임펄스 잡음제거에 이용하였으며, 기준함수(criterion function)들의 차이에 대한 히스토그램을 이용하여 신호의 평활화시 가장 어려운 문제였던 보너스값의 선택도 쉽게하였다. 제안된 방법이 LDNF 보다

iii) 두 샘플사이의 Euclid 거리

$$d(i, \ell) = [(i-\ell)^2 + (a(i) - a(\ell))^2]^{1/2} \quad (6c)$$

iv) 두 샘플사이의 Euclid 거리제곱

$$d(i, \ell) = (i-\ell)^2 + (a(i) - a(\ell))^2 \quad (6d)$$

식(6)으로 정의되는 기준함수들을 인접한 샘플들에 적용하여 신호의 평활화를 위한 동적 프로그래밍 알고리즘의 성능지수를 정의하는 것은 간단하다.

식(6)으로 주어지는 기준함수들은 음의 값을 갖지 않는다. 따라서 동적 프로그래밍 알고리즘이 주어진 성능지수를 최소로 한다는 관점에서 볼때, 식(6)의 기준함수들을 그대로 적용하는 경우 평활화된 신호는 단지 1개 또는 같은 값을 가지는 몇개의 샘플들로만 구성될 수 있다. 이러한 문제를 피하기 위해 보너스로 정의되는 양의 값 B의 도입이 필요하며, 이러한 보너스 개념이 도입된 경우의 성능지수는 다음과 같이 표현된다.

$$\min \left\{ \sum_{j=2}^k (d(j(k), j(k-1)) - B) \right\}, \quad (7)$$

따라서 식(7)의 값을 최소로 하는 샘플시간열 J를 얻음으로써 입력신호를 효과적으로 평활화할 수 있다.

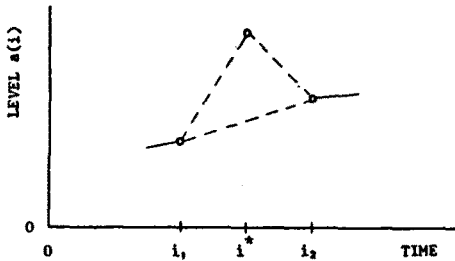


Fig. 1. Effect of the bonus on the amount of smoothing.

그림 1은 식(7)에서 주어진 보너스 B의 효과를 나타내고 있다. 만약 샘플 $a(i_1)$ 및 $a(i_2)$ 가 모두 평활화된 신호에 포함된다면 가정하면 샘플 $a(i^*)$ 가 평활화된 신호가 되기 위한 필요충분조건은 다음과 같다. 즉,

$$d(i_2, i_1) > d(i_2, i^*) + d(i^*, i_1) - B \quad (8)$$

식(8)은 $i_1 = i^* - 1$ 및 $i_2 = i^* + 1$ 의 인접신호에 대해서도 또한 성립한다.

이상에서 설명한 보너스값 B는 평활화의 양을 결정하며 보너스값이 작을수록 신호에 대한 평활화 효과는 커지게 된다.

2. 동적 프로그래밍에 의한 비선형평활화 해석

식(7)로 주어지는 비선형 최적화 문제는 동적 프로그래밍⁹⁾에 의해 쉽게 해결될 수 있다. 입력신호 i 번째 샘플까지의 최소성능지수 $D(i)$ 는

$$D(i) \triangleq \min_J \left\{ \sum_{k=2}^{k^*} (d(j(k), j(k-1)) - B) \right\}, \quad j(k^*) \leq i \quad (9)$$

와 같이 표현된다. 식(9)는 다음과 같이 분리하여 표현될 수 있다.

$$D(i) = -B + \min_J \left\{ d(i, j(k^*-1)) + \sum_{k=2}^{k^*-1} (d(j(k), j(k-1)) - B) \right\}, \quad (10)$$

식(5)의 경계조건으로 부터

$$1 \leq j(k^*-1) < i \quad (11)$$

의 관계를 얻을 수 있으며, 식(4)의 단조성조건으로 부터 $k^* = 1$ 일때에는 i 가 첫번째 샘플임을 알 수 있다.

식(10)에서 $\ell = j(k^*-1)$ 이라 두고 식(9)의 정의를 사용하면 식(10)은 다음과 같은 반복관계로 표현된다.

$$D(i) = -B + \min \{ 0, d(i, \ell) + D(\ell) \}, \quad \ell = 1, \dots, i-1, \quad (12)$$

$i=1$ 일때 선행하는 샘플이 없기 때문에 식(12)에서

$$D(1) = -B \quad (13)$$

과 같이 주어진다. 알고리즘의 수행을 간편하게 하기위해 $D(i)$ 의 모든 초기값을 0으로 만들면 식(12)는 다음과 같이 표현된다.

$$D(i) = -B + \min \{ d(i, \ell) + D(\ell) \}, \quad \ell = 1, \dots, i. \quad (14)$$

식(14)는, 식(7)이 신호전체에 대한 최적화 문제를 다룬것과는 달리, 동적 프로그래밍에 의해 성능지수의 최소화를 인접신호에 대한 최적화 문제로 변형시킨 형태의 표현식이다.

입력신호 i 번째 샘플까지에서의 평활화된 신호는 $\min \{ d(i, \ell) + D(\ell), \ell = 1, \dots, i \}$ 에 의해 결정되며, 최종적인 결과를 얻기위해 각 반복과정에서 얻어진 평활화된 신호의 마지막 샘플은 별도의 배열에 기억되어야 한다. 따라서 최적으로 평활화된 신호는 별도의 배열에 기억된 값을 마지막 역으로 찾아냄으로써 얻어진다.

3. 임펄스 잡음제거를 위한 동적 프로그래밍

임펄스 잡음이 섞인 입력신호 $x(k)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$x(k) = s(k) + n(k), \quad k = 1, \dots, N \quad (15)$$

여기서 $s(k)$ 는 원신호이며, $n(k)$ 는 임펄스 잡음이다. 식(8)을 $s(k)$ 의 인접신호들에 적용하면

$$B > d(i-1, i) + d(i, i+1) - d(i-1, i+1), \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (16)$$

과 같이 표현된다. 임펄스 잡음의 크기가 식 (16)을 만족시키는 최소의 B값보다 절대값에 있어서 크다고 가정하면 신호 $x(k)$ 로부터 얻을 수 있는 가장 인접한 3개의 샘플들에 대한 기준함수의 차이(단, i_1 과 i_2 는 원신호) DIF는

$$DIF = \Delta d(i_1, i_1^*) + d(i_1^*, i_2) - d(i_1, i_2), \quad i_1 < i_1^* < i_2 \quad (17)$$

로서 이에 대한 히스토그램의 형태는 다음과 같이 나타난다. 즉, i_1^* 가 원신호인 경우에 대해서는 작은값을 가지며 집중분포되고 잡음인 경우에 대해서는 큰값을 가지며 산재해 있어 최적의 보너스값인 경계값을 쉽게 찾을 수 있다.

이러한 히스토그램의 형태는 동적 프로그래밍 수행시 보너스값 B가 정확하지 못하여 임펄스 잡음을 제대로 찾아 내지 못한 경우 (i_1, i_2 중 1개라도 원신호가 아닌 경우)에도 거의 변화가 없으며, 보너스값이 크게 틀린 경우 경계값이 조금 변하기만 한다. 따라서 임펄스 잡음제거를 위한 최적의 보너스값은 임의의 B값에 대해 동적 프로그래밍을 수행한후 그 출력에 대한 히스토그램으로부터 얻을 수 있다.

이렇게 얻어진 보너스값에 의해 동적 프로그래밍을 수행함으로써 임펄스 잡음을 효과적으로 제거할 수 있으며, 보다 정확한 보너스값은 위의 보너스값 선택과정을 한번 더 반복하여 얻을 수 있다. 임펄스 잡음으로 인식된 샘플들은 내삽법등과 같은 방법에 의해 추정되어질 수 있다.

III. 시뮬레이션 결과 및 고찰

본 논문의 타당성을 조사하기 위한 컴퓨터 시뮬레이션에 사용된 원신호 $s(k)$ 와 임펄스 잡음이 섞인 신호 $x(k)$ 는 각각 그림 2(a) 및 그림 2(b)와 같았다. 여기서 임펄스 잡음의 크기와 발생위치는 임의로 정하였고 잡음의 양은 전

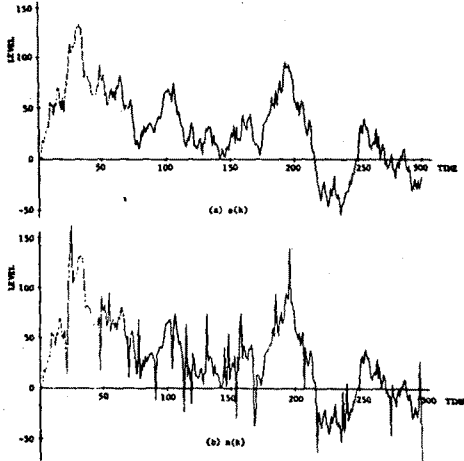


Fig. 2. (a) The waveforms of an original signal $s(k)$, suppose noise-free. (b) A noisy signal $x(k)$, obtain impulse noise (10 % noisy data to total ratio) to original signal (a).

체 샘플의 10%로 하였으며, 기준함수로는 식 (6b)를 사용하였다.

그림 3은 임의의 보너스값으로 동적 프로그래밍을 수행한 후 얻은 출력의 히스토그램으로서 원신호에 의한 분포는 작은값을 가지며 집중 분포되고, 잡음에 의한 분포는 큰값을 가지며 산재하는 형태가 모든 B값에 대해 나타남을 알 수 있다.

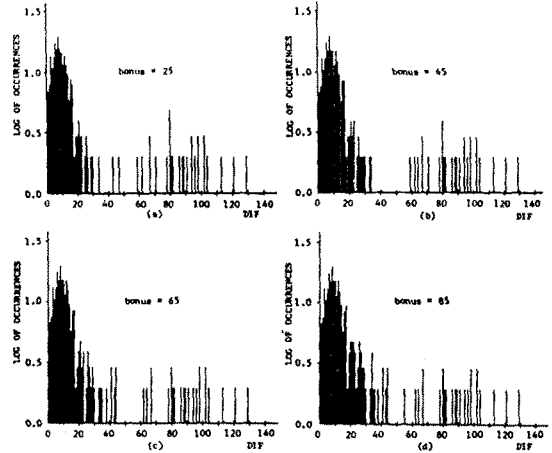


Fig. 3. The histograms of DIF of output for arbitrary bonus of (a) B = 25, (b) B = 45, (c) B = 65 and (d) B = 85.

이러한 임의의 B값에 대해 얻어진 히스토그램을 최적의 B값으로 얻어진 히스토그램 그림 4와 비교할때 전체적인 형태에 있어서는 변화가 없이, 보너스값이 크게 틀린 경우 경계값만 조금 커지는 경향이 있음을 알 수 있다. 따라서 최적의 보너스값을 쉽게 찾을 수 있다.

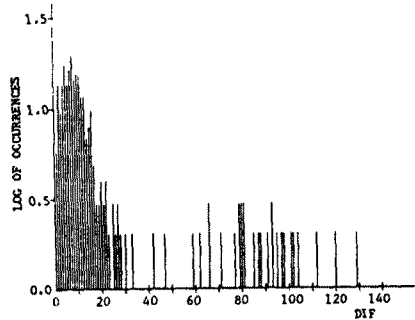


Fig. 4. The histogram of DIF of output for optimal bonus.

예로서 B = 85에 대해 동적 프로그래밍을 수행한후 얻어진 히스토그램 그림 3(d)에서 보너스값으로는 대략 45를 얻을 수 있다. 보다 정확한 B값을 얻기위해 B = 45로 동적 프로그래밍을 한번더 수행하면 그림 3(b)의 히스토그램을 얻는다. 이 경우 얻을 수 있는 보너스값은 그림 4에서 얻을 수 있는 최적의 보너스값과 거의 일치함을 알 수 있다.

그림 5는 인식된 임펄스 잡음을 제거하고 그에 해당하는

샘플값을 내삽법으로 추정하여 재생한 출력신호이다. 이를 그림 2(a)의 원신호와 비교할때 제안된 방법이 LDNF 보다 우수함을 시각적으로도 쉽게 알 수 있다.

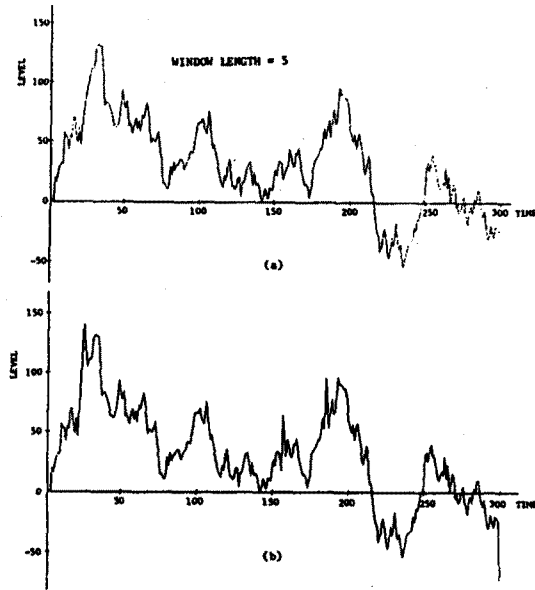


Fig. 5. The filtered signals (cancelled samples filled in by linear interpolation) of (a) proposed algorithm and (b) LDNF.

표 1은 제안된 알고리즘의 결과와 LDNF의 결과를 평균자승오차 (MSE) 면에서 비교한 것으로, 제안된 방법이 LDNF에 비해 MSE가 8 배 이상 개선됨을 알 수 있다.

Table 1. MSE comparison of output between proposed algorithm and LDNF

	proposed algorithm	LDNF	
		w = 3	w = 5
MSE	5.27	65.54	44.67

w : window length

제안된 알고리즘은 샘플전체를 한꺼번에 처리하지 않고 몇개의 블록으로 나누어 처리 함으로써 수행시간을 줄일 수 있을 것이며, 또한 잡음에 관한 확률분포등을 미리 알고 있는 경우 초기의 임의로 정하는 보너스값을 좀더 효과적으로 정할 수 있어 한번의 히스토그램에 의해 거의 최적한 B값을 얻을 수 있기 때문에 수행시간을 줄일 수 있을 것이다. 제안된 알고리즘은 2차원의 영상처리에도 적용할 수 있을 것이다.

IV. 결 론

본 논문에서는 임펄스 잡음 제거를 위해 동적 프로그래밍을 이용한 새로운 알고리즘을 제안하였다.

이 경우 잡음 제거의 성능을 나타내는 MSE는 표 1에 나타난 바와 같이 LDNF보다 우수하였으며, 최적의 보너스 값도 쉽게 찾을 수 있었다. 만약 잡음에 관한 확률분포등을 미리 알고 있다면 초기의 임의로 정하는 보너스 값을 좀더 효과적으로 정할 수 있어 한번의 히스토그램에 의해 거의 최적한 B값을 얻을 수 있기 때문에 수행시간을 줄일 수 있을 것이다. 여기서 제안된 알고리즘은 2차원의 영상 처리에도 적용될 수 있을 것이다.

REFERENCES

1. J.W. Tukey: Exploratory Data Analysis, Addison-Wesley, 1977.
2. L.R. Rabiner, M.R. Sambur and C.E. Schmitt: Application of a nonlinear smoothing algorithm to speech processing, IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-23; pp.552-557, 1975.
3. N.S. Jayant: Average and median based smoothing technique for improving digital speech quality in presence of transmission error, IEEE Trans. Communications, COM-24; pp.1043-1045, 1976.
4. P.M. Narendra: A separable median filter for image noise smoothing, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-3; pp.20-29, 1981.
5. N.C. Gallagher and G.L. Wise: A theoretical analysis of the properties of median filters, IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, ASSP-29 pp.1136-1141, 1981.
6. T.A. Nodes and N.C. Gallagher: Median filters: some modifications and their properties, IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-30 pp.739-746, 1982.
7. F. Pasián and A. Crise: Restoration of signals degraded by impulse noise by means of a low-distortion non-linear filter, Signal Processing 6; pp. 67-76, 1984.
8. H. Ney: A dynamic programming algorithm for nonlinear smoothing, Signal Processing 5; pp.163-173, 1983.
9. D.E. Kirk: Optimal Control Theory, Prentice Hall, 1970.