

경계요소법에 의한 손실매질에서의 전자파 산란 해석

○이 태경, 성 낙선, 이 수영, 나 정웅

한국과학기술원, 전기 및 전자공학과

Analysis of Electromagnetic Scattering in Lossy Medium

by Boundary Element Method

Taek-Kyung Lee, Nak-Sun Sung, Soo-Young Lee, Jung-Woong Ra

Department of Electrical Engineering, KAIST

ABSTRACT

Electromagnetic wave scattering from the two-dimensional scatterer was calculated by the Boundary Element Method (BEM). For the circular cylindrical scatterer, the BEM solutions agreed very well with the analytic solutions. The rectangular dielectric cylinder was also treated in the case of the lossy scatterer and the lossy medium.

1. 서론

전자파 산란문제의 해석에 있어서 수치해석에 의한 방법은 해석적 해가 알려지지 않고 있는 임의의 경계면을 가진 산란체일 경우에 매우 유용하다. 유한요소법(Finite Element Method)은 제한된 영역에서 임의의 매질에 대해서 적용 가능하며 [1], 이에 비해서 경계요소법(Boundary Element Method)은 영역내부의 매질이 균일할 때 경계면에서의 적분을 이용하므로 matrix의 크기를 줄일 수 있고, 무한영역에 대해서도 적용할 수 있다 [2]-[4]. 여기서는 손실이 있는 매질에 무한길이의 원통형 산란체가 있을 때의 산란문제를 1차의 기초함수(basis function)를 사용한 경계요소법을 이용하여 계산하고, 이결과를 해석적 해와 비교하였다 [5]. 또한 사각형 유전체 기둥에 의한 산란현상을 계산하였다.

2. 경계요소법 (Boundary Element Method)

그림1에서 보는 바와 같이 각각의 균일한 매질로 이루어

진 2차원 영역 R_1 와 R_2 가 경계면 B로 분리되어 있고, 각 영역에서 potential u 는 Helmholtz 방정식

$$(\nabla^2 + k^2)u(r) = -f(r) \tag{1}$$

을 만족한다고 하자. 여기서 k 는 영역내에서의 파수(wave number)에 해당하고, f 는 source이다. 또한 파수 k 인 자유공간 Green 함수 $G(r,r')$ 는

$$(\nabla^2 + k^2)G(r,r') = -\delta(r-r') \tag{2}$$

을 만족하며, r 는 관측점(observation point), r' 는 전원점(source point) 을 나타낸다. 식(1)과 식(2)로부터

$$\int_{\Gamma} (G(r,r')\nabla^2 u(r) - u(r)\nabla^2 G(r,r')) ds = - \int_{\Gamma} f(r)G(r,r') ds + u(r)$$

가 되고, Green's identity를 이용하면

$$u(r) = \int_{\Gamma} f(r)G(r,r') ds + \int_{\Gamma} (G(r,r') \frac{\partial u(r)}{\partial n} - u(r) \frac{\partial G(r,r')}{\partial n}) dl \tag{3}$$

가 된다. 이 때 $\frac{\partial}{\partial n}$ 은 경계면 위에서 각 영역의 바깥으로 향하는 수직방향의 미분을 나타내며, 이 식을 이용하면 경계면에서의 u 와 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 으로부터 영역내부의 $u(r)$ 을 구할 수 있다. 여기서 적분은 모두 r' 에 대하여 행한 것이며, 우변의 첫째항은 영역 내의 source에 의한 potential을 나타낸다.

source 가 R_2 에만 존재한다고 하면, 영역 R_2 에서의 u 는

식(3)으로부터

$$u_e(r) = u^{inc}(r) + \int_{\Gamma} (G_e \frac{\partial u_e}{\partial n_e} - u_e \frac{\partial G_e}{\partial n_e}) dl$$

로 구할 수 있고, 영역 R_1 에서는 source가 없으므로

$$u_i(r) = \int_{\Gamma} (G_i \frac{\partial u_i}{\partial n_i} - u_i \frac{\partial G_i}{\partial n_i}) dl \tag{5}$$

가 된다. 경계면 B 에서의 경계조건으로서

$$u_i(r) = u_e(r) = u(r), \quad \frac{\partial u_i}{\partial n_i} = -\frac{\partial u_e}{\partial n_e} = q(r)$$

로 두고, 경계면에서 $n_i = -n_e = n$ 이므로, 관측점 r 을 경계면으로 이동하면

$$u^{inc}(r) = u(r) + \int_{\delta} [G_e(r, r')q(r') - u(r')\frac{\partial G_e(r, r')}{\partial n}] dl \quad (7)$$

$$0 = u(r) - \int_{\delta} [G_i(r, r')q(r') - u(r')\frac{\partial G_i(r, r')}{\partial n}] dl \quad (8)$$

이 된다.

2차원 문제에서 복사 조건(radiation condition)을 만족하는 Green함수는

$$G(r, r') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|r-r'|) \quad (9)$$

이며

$$\frac{\partial G(r, r')}{\partial n} = \frac{j}{4} k H_1^{(2)}(k|r-r'|) \frac{(r-r') \cdot n}{|r-r'|} \quad (10)$$

이다. 여기서 $H_0^{(2)}$ 와 $H_1^{(2)}$ 는 각각 0차와 1차의 2종 Hankel함수이다.

$H_0^{(2)}(k|r-r'|)$ 과 $H_1^{(2)}(k|r-r'|)$ 은 r 과 r' 이 같을 경우 Singular하므로, 식(7)과 식(8)에서 적분시 주의를 요한다. 그림 1에서 보는 바와 같이 r' 근처에서 반경 ϵ 인 작은 원을 따라서 적분경로를 취하여 특이점(singular point)을 피하면, 적분경로는 B 로부터 B'+B'' 으로 바뀌며 영역 R_1 에서 생각할 때 B'' 위에서의 적분은 다음과 같다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta'} \frac{\partial G}{\partial n} dl = -\frac{\theta}{2\pi} u(r) \quad (11)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta'} qG dl = 0 \quad (12)$$

따라서 식(7)과 식(8)은 각각

$$u^{inc}(r) = \frac{\theta(r)}{2\pi} u(r) + \int_{\delta'} [G_e(|r-r'|)q(r') - u(r')\frac{\partial G_e(|r-r'|)}{\partial n}] dl \quad (13)$$

$$0 = (1 - \frac{\theta(r)}{2\pi})u(r) - \int_{\delta'} [G_i(|r-r'|)q(r') - u(r')\frac{\partial G_i(|r-r'|)}{\partial n}] dl \quad (14)$$

이 된다. 여기서 $\int_{\delta'}$ 은 특이점을 제외한 적분으로서 Cauchy의 principal value of integration이다.

적분방정식 (13)과 (14)를 풀기 위하여 $u(r)$ 과 $q(r)$ 을 각

각 선형독립인 function set $\phi_i(r)$ 로 근사하면

$$u(r) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(r) \quad (15)$$

$$q(r) = \sum_{i=1}^N q_i \phi_i(r) \quad (16)$$

가 된다. 여기서 ϕ_i 는 중세 기초함수(global basis function)이다. 식(15)와 식(16)을 식(13)과 식(14)에 대입하고, 양변에 가중함수(weight function)로서 $W_i(r) = \delta(r-r_i)$ 를 곱하여 적분하면

$$u_i^{inc} = \frac{\theta_i}{2\pi} u_i - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^e u_j + \sum_{j=1}^N \beta_{ij}^e q_j \quad (17)$$

$$0 = (1 - \frac{\theta_i}{2\pi})u_i + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^i u_j - \sum_{j=1}^N \beta_{ij}^i q_j \quad (18)$$

where

$$\alpha_{ij} = \int_{\delta'} \frac{\partial G(|r_i-r'|)}{\partial n} \phi_j(r') dl$$

$$\beta_{ij} = \int_{\delta'} G(|r_i-r'|) \phi_j(r') dl$$

이 된다. 이 식을 matrix 형태로 쓰면

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{11}^e + (\theta_1/2\pi)\delta_{11} & \beta_{11}^e & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{11}^i + (1 - (\theta_1/2\pi))\delta_{11} & -\beta_{11}^i & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{inc} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (19)$$

이 되므로, 경계면의 각 node에서 u_i 와 q_i 를 구할 수 있다.

그림2에서와 같이 1차원 표준요소에 대해 1차의 국소기초함수 (local basis function) 로서 $\phi_1(\xi) = (1-\xi)/2$,

$\phi_2(\xi) = (1+\xi)/2$ 를 도입하고, node j 로부터 node $(j+1)$ 까지의 경계요소를 직선으로 근사화 하면 B_j 상에서의 좌표는

$$x = x_j \phi_1(\xi) + x_{j+1} \phi_2(\xi)$$

$$y = y_j \phi_1(\xi) + y_{j+1} \phi_2(\xi)$$

로 표현되고, 식(21)에서의 matrix element는 각각

$$\alpha_{ij} = \frac{B_j}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial G(|r_i-r_j-B_j(1+\xi)/2|)}{\partial n} \phi_1(\xi) d\xi + \frac{B_{j-1}}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial G(|r_i-r_{j-1}-B_{j-1}(1+\xi)/2|)}{\partial n} \phi_2(\xi) d\xi \quad (20)$$

$$\beta_{ij} = \frac{B_j}{2} \int_{-1}^1 G(|r_i-r_j-B_j(1+\xi)/2|) \phi_1(\xi) d\xi + \frac{B_{j-1}}{2} \int_{-1}^1 G(|r_i-r_{j-1}-B_{j-1}(1+\xi)/2|) \phi_2(\xi) d\xi \quad (21)$$

가 된다.

여기서 각각의 matrix element는 node i 가 j 와 일치하지 않을 경우에는 Gauss의 적분공식을 이용하여 구하고, node i 가 j 와 일치할 때는 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 이 발산하므로 해석적 해를 이용하여 구한다.

3. 무한길이의 유전체 기둥에 의한 전자파의 산란

앞에서 설명한 경계요소법을 이용하여, 그림3과 같이 균일한 매질내에 균일한 물질로 이루어진 무한길이의 원기둥이 있을 때, 전자파의 산란현상을 계산하였다. 원기둥은 z 축과 평행하게 세워져 있으며, 입사전계는

$$E_z^{inc} = E_z^{inc}(x) \hat{z} = Ae^{-jk_z x} \hat{z} \quad (22)$$

로서, A 는 $x=0$ 에서의 입사파의 크기를 나타내고, k_z 는 매질의 파수이다. 이 때 전계 E 는 z 방향의 성분만 존재하게 되며 E_z 는 식(1)의 Helmholtz 방정식을 만족한다. 그리고 경계면에서 E_z 와 $\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial n}$ 이 연속이므로, 내부와 외부영역에서 μ 가 같다고 가정하면 식(6)의 경계조건을 만족하게 되므로, 경계요소법을 이용하여 식(19)의 matrix 방정식을 만들어 경계면상의 각 node에서 E_z 와 $\frac{\partial E_z}{\partial n}$ 을 구할 수 있다.

이렇게 하여 얻은 경계면상의 E_z 와 $\frac{\partial E_z}{\partial n}$ 으로부터, 각 영역의 전계는 식(4)와 식(5)에 의하여 구할 수 있다.

그림4에서는, 그림3과 같은 원통형 구조에서 원기둥에 손실이 있을 경우와 매질에 손실이 있을 경우에 대하여, 각각 경계요소법에 의한 결과와 해석적 해를 비교하였다. 여기서 반지름 a 는 1.05m이고, 계산시 1차의 기초함수(basis function)를 사용하여 collocation method에 의한 경계요소법으로 구하였다. 이 때 경계면에서의 node수는 40이며, $k_0 a=2$ 이고, k_0 는 자유공간에서의 파수이다.

그림4(a)에서 경계요소법에 의하여 계산된 경계면 상의 산란전계는 각각의 node에서 해석적 해와 잘 일치함을 알 수 있다. 그림4(b)는 원통의 중심으로부터 x -축을 따라 2m 떨어진 지점에서 y -방향으로 계산된 총전계이며, 매질과 산란체간의 유전율의 비에 따라 크게 다른 형태로 나타난다. 여기서 산란체의 유전율이 매질의 유전율에 비하여 클 경우에는 $y_0=0$ 에서는 전계가 크게 나타나고 $y_0=a$ 근처에서 감쇄가 일어난다. 유전율

이 산란체에서보다 매질에서 더욱 크면, $k_0 a$ 가 작을 때는 $y_0=0$ 에서 전계의 감쇄가 생기다가 $k_0 a$ 가 점점 커지면 이러한 감쇄는 더욱 심하게 일어나서, 어느 값을 지나면 감쇄가 강하게 일어나는 지점이 $y_0=0$ 를 중심으로 하여 상하로 옮겨가게 된다. 경계요소법에 의한 전계의 계산결과는 관측점에서도 해석적 해와 잘 일치한다.

그림6은 그림5와 같은 사각형 유전체 기둥에 의한 산란현상을 경계요소법에 의하여 계산한 결과이다. 여기서 a 가 원통형 구조에서와 같으면, 관측점의 총전계가 강하게 감쇄되는 지점이 원통형 구조일 때와 같고, 다만 그 크기가 다르다.

4. 결 론

2차원 구조의 전자파의 산란문제에 경계요소법을 적용하여, 손실이 있는 무한 유전체 기둥에 의한 전자파의 산란문제를 계산하였다. 무한 원통형 유전체에 대한 경계요소법의 계산결과가 해석적 해와 잘 일치하였으며, 해석적 해가 존재하지 않는 일반적인 형태의 경계면에 대해서도 적용 가능성을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] S.K. Chang and K.K. Mai, "Application of the unimoment method to electro magnetic scattering of dielectric cylinders," IEEE T-AP, vol. AP-24, no. 1, pp.35-42, Jan. 1976.
- [2] S. Kagami and I. Fukai, "Application of boundary-element method to electromagnetic field problems," IEEE T-MIT, vol. MIT-32, no. 4, pp. 455-461, Apr. 1984.
- [3] K. Yashiro and S. Ohkawa, "Boundary element method for electromagnetic scattering from cylinders," IEEE T-AP, vol. AP-33, no. 4, April 1985.
- [4] T.K. Wu and L.L. Tsai, "Electromagnetic fields induced inside arbitrary cylinders of biological tissue," IEEE T-MIT, vol. MIT-25, no. 1, pp. 61-65, Jan. 1977.
- [5] D.S. Jones, The Theory of Electromagnetism. New-York: Macmillan, 1964.

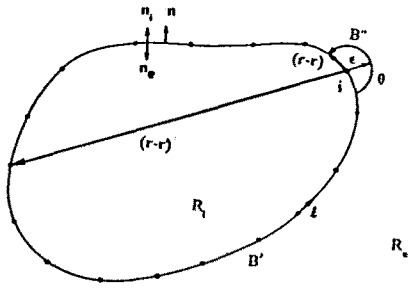


그림1 2차원 영역 및 경계

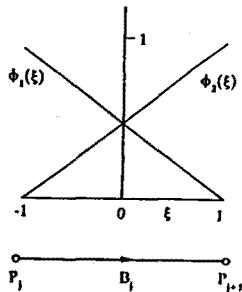


그림2 경계요소법을 위한 1차원 표준요소 및 기초함수

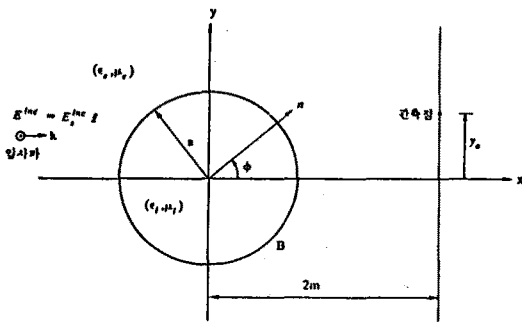
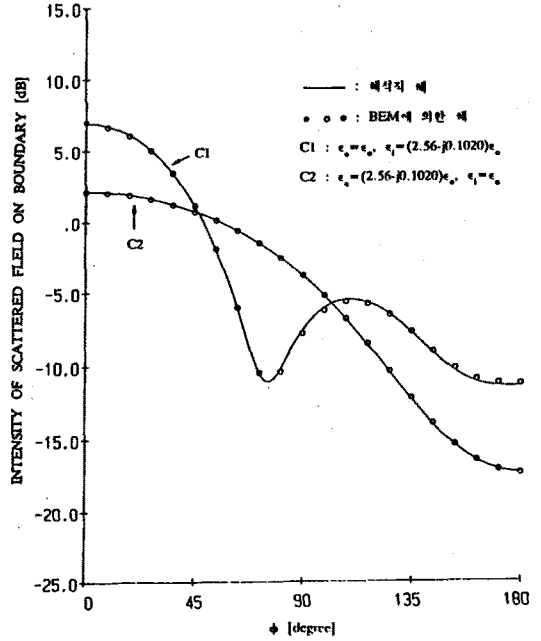
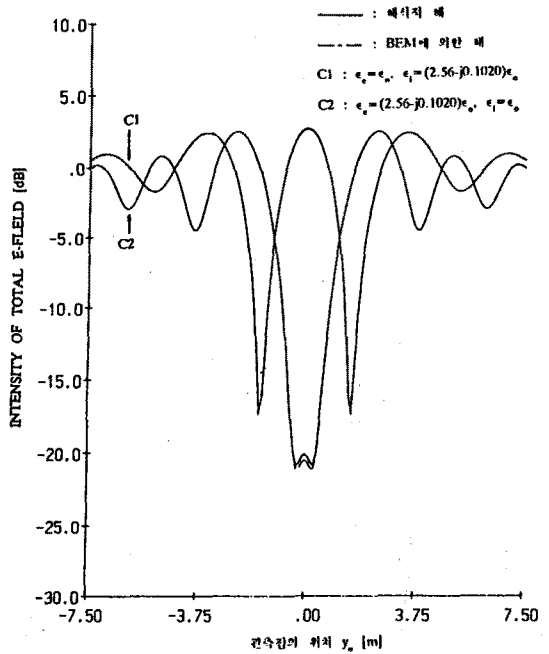


그림3 무한 원통형 유전체와 입사파



(a) 경계면 위에서의 산란장계의 세기



(b) 공간계의 세기

그림4 무한 원통형 유전체에 의한 전자파의 산란

$k_0 a = 2, \text{ node 수} = 40$

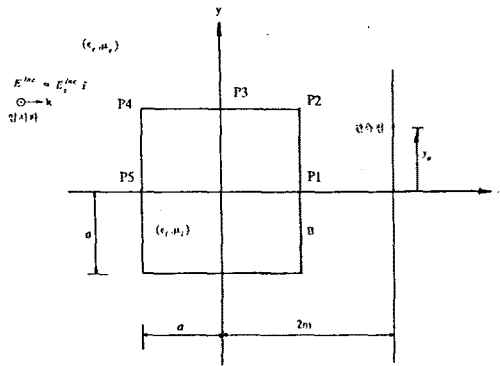


그림5 사각형 유전체 기둥과 입사파

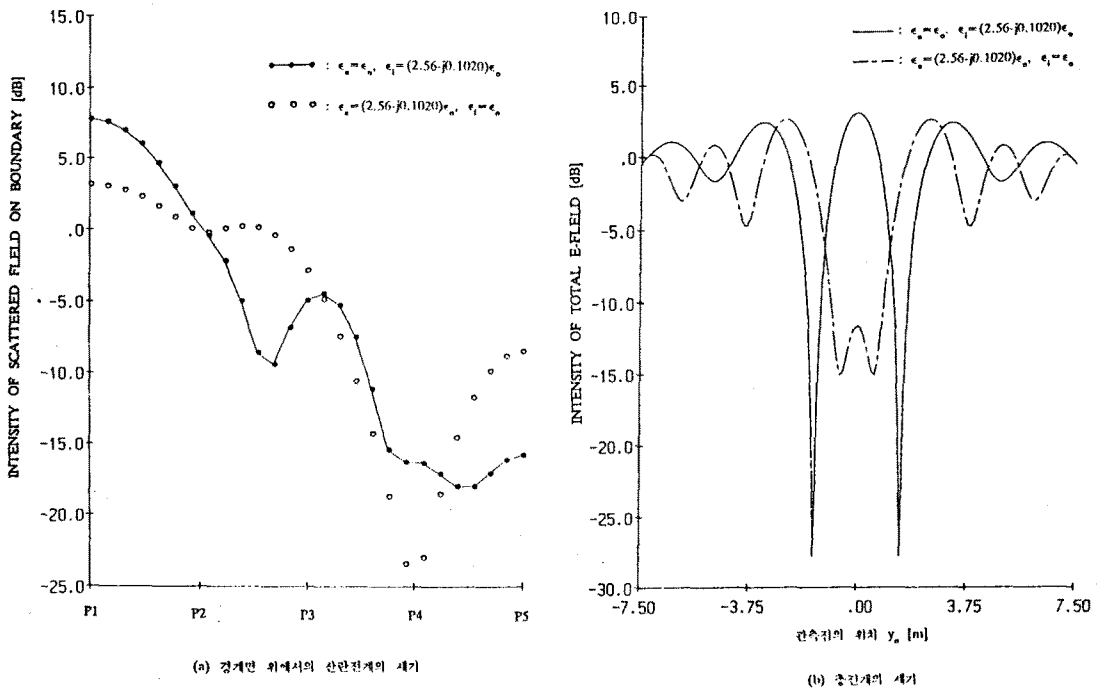


그림6 경계요소법에 의한 사각형 유전체의 전자기 산란

$k_0 a = 2$, node수 = 52