

임의의 모양을 갖는 회전형 유전체의
전자파 산란 현상

○ 신 용재 김 정기
중앙 대학교 전자공학과

Electromagnetic Scattering from arbitrarily
shaped dielectric Bodies of Revolution

SHIN YONG JHE
Dept. of Electronics

KIM JUNG KI
CHUNG-ANG UNIV.

ABSTRACT

The problem of electromagnetic scattering from arbitrarily shaped lossy dielectric bodies of revolution is studied. Two coupled vector integral equations are formulated from the potential formulas, the equivalence principle and boundary condition. The unknown surface currents (both electric and magnetic) can be found by the moment method, Galerkin's procedure. After the surface currents are determined, the scattering pattern can be evaluated.

1. 서 론

임의의 회전형 유전체에 평면파가 입사하였을 때 전자파 산란 현상을 해석한다. 이들의 해를 구하는 데는 두 과정으로 구분되는데, 첫째 과정은 입사파와 물체에 대한 상호작용의 수식화이며 그 다음 과정으로 수치해법에 의한 적분방정식의 해석이다. 본론에서는 먼저 유전체에 적용되는 적분방정식에 Moment Method(Galerkin's method)를 적용하여 구하였으며, 수치해석의 과정에서 Homogeneous Dirichlet boundary condition을 적용하여 3차원 구조의 회전체 표면을 span하는 t와 경도각θ에 의한 적분방정식으로 formulation하였다. 또한 복잡한 적분을 피하기 위하여 기저함수로 사용된 삼각함수를 4개의 pulse함수로 근사하여 simulation time을 감소시켰다. 일단 전류분포가 결정되면 scattered field를 구할 수 있다.

2. 본 론

자유공간상에 존재하는 3차원 구조의 회전체를 고려할 때, 여기서 μ_1 과 ϵ_1 , μ_2 와 ϵ_2 는 각각 두 Region에서의 투자율과 유전율을 나타낸다. 이때 Equivalence principle을 이용하여, potential 식으로부터 다음과 같은 한 쌍의 적분방정식을 유도할 수 있다.

$$\hat{n} \times \vec{E}^i = \hat{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_S [j\omega\mu_2 \vec{J}_s(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) - \nabla' \cdot \vec{J}_s / j\omega\epsilon_2 (\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2}) - \vec{K}_s \times \nabla(\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2})] ds \quad (1)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}^i = \hat{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_S [\vec{J}_s \times \nabla(\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2}) + j\omega\vec{K}_s(\epsilon_1 \vec{r}_1 + \epsilon_2 \vec{r}_2) - \nabla' \cdot \vec{K}_s / j\omega\mu_2 (\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2})] ds \quad (2)$$

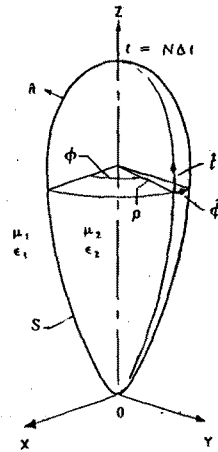


그림1. 산란체 표면에서 사용된 좌표계

\vec{J}_s, \vec{K}_s : 표면 전계 및 자기 전류분포
 $\epsilon_1 = \epsilon_0, \epsilon_2 = \epsilon_r \epsilon_0, j\omega/\omega$

$$\vec{\Phi}_s = \exp(-jk_1 R)/R, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (3)$$

$k_1 = k_0, \quad k_2 = k_0(\epsilon_2/\epsilon_0)^{1/2}$
R : source point와 field point간의 거리
 \vec{r}' : source point의 위치 vector
 \vec{r} : field point의 위치 vector

식(1) 및 (2)의 적분방정식은 다음과 같이 Operator형의 방정식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{J}_s \\ \vec{K}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}^i \\ \vec{H}^i \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$L_{11}(\vec{J}_s) = \frac{1}{4\pi} \int_S [j\omega\mu_2 \vec{J}_s(\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2}) - \nabla' \cdot \vec{J}_s / j\omega\epsilon_2 (\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2})] ds$$

$$L_{12}(\vec{K}_s) = -\frac{1}{4\pi} \int_S [\vec{K}_s \times \nabla(\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2})] ds$$

$$L_{21}(\vec{J}_s) = \frac{1}{4\pi} \int_S [\vec{J}_s \times \nabla(\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2})] ds$$

$$L_{22}(\vec{K}_s) = \frac{1}{4\pi} \int_S [j\omega\vec{K}_s(\epsilon_1 \vec{r}_1 + \epsilon_2 \vec{r}_2) - \nabla' \cdot \vec{K}_s / j\omega\mu_2 (\frac{\vec{r}_1}{\epsilon_1} + \frac{\vec{r}_2}{\epsilon_2})] ds$$

<그림3>과 같은 좌표계에 식(4)의 적분방정식을 적용하기 위해 (x,y,z) 3차원상의 회전체 표면을 t, ϕ에 의한 2차원 좌표계로 표현할 수 있다. 즉, 회전체 표면의 임의의 점은 접선성분 t와 회전성분 로 나타낼 수 있으며, ρ는 회전체의 반경을 나타낸다. 이 좌표계에 의해 미지의 표면전류밀도 \vec{J}_s 와 \vec{K}_s 는 두 성분벡터의 합으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= \vec{J}_t + \vec{J}^\phi \\ \vec{K}_s &= \vec{K}^t + \vec{K}^\phi \end{aligned} \quad (5)$$

수치해석에 의해 적분방정식(4)의 해를 구하기 위하여 Moment Method를 적용하며, 식(5)의 $\vec{J}_s, \vec{J}^\phi, \vec{K}^t$ 및 \vec{K}^ϕ 는 임의의 기저함수의 수열로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{J}_t &= \hat{t} \sum_{n_j=1}^N a_{n_j} f_j(t) \exp(jn_j\phi) \\ \vec{J}^\phi &= \hat{\phi} \sum_{n_j=1}^N b_{n_j} f_j(t) \exp(jn_j\phi) \\ \vec{K}^t &= \hat{t} \sum_{n_k=1}^N c_{n_k} f_k(t) \exp(jn_k\phi) \\ \vec{K}^\phi &= \hat{\phi} \sum_{n_k=1}^N d_{n_k} f_k(t) \exp(jn_k\phi) \end{aligned} \quad (6)$$

식(5)와 (6)으로부터 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= \sum_{n_j} (a_{n_j} \vec{J}_{n_j}^t + b_{n_j} \vec{J}_{n_j}^\phi) \\ \vec{K}_s &= \sum_{n_k} (c_{n_k} \vec{K}_{n_k}^t + d_{n_k} \vec{K}_{n_k}^\phi) \end{aligned} \quad (7)$$

단, $\vec{J}_{n_j}^t (= \vec{K}_{n_j}^t) = \hat{t} f_j(t) \exp(jn_j\phi)$, $\vec{J}_{n_j}^\phi (= \vec{K}_{n_j}^\phi) = \hat{\phi} f_j(t) \exp(jn_j\phi)$ 이며 $a_{n_j}, b_{n_j}, c_{n_k}$ 및 d_{n_k} 는 구하여야 할 미지의 계수들이다. 즉, 기저함수 $\vec{J}_{n_j}^t, \vec{J}_{n_j}^\phi, \vec{K}_{n_k}^t$ 및 $\vec{K}_{n_k}^\phi$ 를 알기 때문에 이 계수들을 구하면 자연히 전류분포 \vec{J}_s 와 \vec{K}_s 는 결정되어진다. Moment Method를 적용하기 위해 Weight function을 정의할 필요가 있는데 이 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{W}_{n_j} = \hat{t} f_j(t) e^{-jn_j\phi} + \hat{\phi} f_j(t) e^{-jn_j\phi} \quad (8)$$

이 함수는 Galerkin 형태로서 지수함수의 부호만이 기저함수와 다르다. 즉, $\vec{W}_{n_j} = (\vec{J}_{n_j}^t)^* = (\vec{K}_{n_j}^\phi)^*$ 이며, $t = t \text{ or } \phi$ 이다. Moment Method에서 내적은 다음과 같다.

$$\langle \vec{W}, \vec{J} \rangle = \int_S \vec{W} \cdot \vec{J} \, ds \quad (9)$$

Weight function W로 식(4)의 양변에 내적을 취하면 다음과 같은 일반화된 회로형 Matrix 방정식을 얻는다.

$$[Z][I] = [V] \quad (10)$$

$$\text{단, } [Z] = \begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] \\ [Z_{21}] & [Z_{22}] \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[Z_{11}] = \begin{bmatrix} [\langle \vec{W}_{n_1}^t, L_{11} \vec{J}_{n_1}^t \rangle] & [\langle \vec{W}_{n_1}^t, L_{11} \vec{J}_{n_1}^\phi \rangle] \\ [\langle \vec{W}_{n_1}^\phi, L_{11} \vec{J}_{n_1}^t \rangle] & [\langle \vec{W}_{n_1}^\phi, L_{11} \vec{J}_{n_1}^\phi \rangle] \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[Z_{12}] = \begin{bmatrix} [\langle \vec{W}_{n_1}^t, L_{12} \vec{K}_{n_2}^t \rangle] & [\langle \vec{W}_{n_1}^t, L_{12} \vec{K}_{n_2}^\phi \rangle] \\ [\langle \vec{W}_{n_1}^\phi, L_{12} \vec{K}_{n_2}^t \rangle] & [\langle \vec{W}_{n_1}^\phi, L_{12} \vec{K}_{n_2}^\phi \rangle] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[Z_{21}] = \begin{bmatrix} [\langle \vec{W}_{n_2}^t, L_{21} \vec{J}_{n_1}^t \rangle] & [\langle \vec{W}_{n_2}^t, L_{21} \vec{J}_{n_1}^\phi \rangle] \\ [\langle \vec{W}_{n_2}^\phi, L_{21} \vec{J}_{n_1}^t \rangle] & [\langle \vec{W}_{n_2}^\phi, L_{21} \vec{J}_{n_1}^\phi \rangle] \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[Z_{22}] = \begin{bmatrix} [\langle \vec{W}_{n_2}^t, L_{22} \vec{K}_{n_2}^t \rangle] & [\langle \vec{W}_{n_2}^t, L_{22} \vec{K}_{n_2}^\phi \rangle] \\ [\langle \vec{W}_{n_2}^\phi, L_{22} \vec{K}_{n_2}^t \rangle] & [\langle \vec{W}_{n_2}^\phi, L_{22} \vec{K}_{n_2}^\phi \rangle] \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[I] = [[a_{n_j}] [b_{n_j}] [c_{n_k}] [d_{n_k}]] \quad (16)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} [\langle \vec{W}_{n_1}^t, \vec{E}^i \rangle] \\ [\langle \vec{W}_{n_1}^\phi, \vec{E}^i \rangle] \\ [\langle \vec{W}_{n_2}^t, \vec{H}^i \rangle] \\ [\langle \vec{W}_{n_2}^\phi, \vec{H}^i \rangle] \end{bmatrix} \quad (17)$$

식(12)-(17)의 Matrix element를 계산하기 위해서 식(7) 및 식(8)에서 사용된 Basis 및 Weight function의 element인 f(t)와 f(t)를 선정하여야 한다. Matrix element를 계산하는 과정에서 Basis 및 weight function의 미분을 필요로 하므로, 미분 가능한 삼각함수를 사용하면 되며, 계산을 간단하게 하기 위하여 J 나 K 대신 ρJ 나 ρK를 삼각함수로서 전개한다.

$$\begin{aligned} \rho f_1(t) &= T(t-t_1) \\ \rho f_2(t) &= T(t-t_2) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 T는 삼각함수이다.

$$T(t) = \begin{cases} 1-t & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad (19)$$

위 적분방정식을 계산하는데 필요한 vector식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{J}_t) + \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{J}^\phi \right) \quad (20)$$

$$\nabla \times \vec{K} = \hat{t} \frac{\partial K_t}{\partial t} + \hat{\phi} \frac{\partial K_\phi}{\partial \phi} + \hat{n} \frac{\partial K_n}{\partial n} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \hat{x} \cos\phi \cos\psi + \hat{y} \cos\phi \sin\psi - \hat{z} \sin\phi \\ \hat{t} &= \hat{x} \sin\phi \cos\psi + \hat{y} \sin\phi \sin\psi + \hat{z} \cos\phi \\ \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin\phi + \hat{y} \cos\phi \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 v는 회전체 표면상에서의 접선벡터 t와 z축간의 각을 나타낸다. 회전체의 표면에서 t는 0에서 2π까지 N-1개의 삼각함수로 걸쳐지게되며, 각 삼각함수의 중심점 t = 1/2, 3/2, ..., N-1/2에서 최대값을 갖는다. 그리고, 식(11)의 Impedance Matrix의 내적은 이중적분을 포함하고 있다. 즉, $\int ds \int ds' = \int dt \int dt' \int d\phi \int d\phi'$ 이다. 그리고, Matrix element를 계산하는데 필요한 Green 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$g_{n_i}^{(i)} = \int_0^\pi \exp(-jk_i R) / R \cos n_i \phi \, d\phi \quad (23) \quad i = 1 \text{ or } 2$$

Matrix element들을 계산함에 있어서 복잡한 적분을 피하기 위하여 삼각함수로 <그림2(a)>에서와 같이 4개의 pulse함수로 approximation시킨다. 이때의 함수와 그 미분값은 각 pulse의 중점에서 계산하며, 삼각함수의 적분값은 4개의 pulse의 함수의 합으로 나타낼 수 있다. <그림2(a)>는 삼각함수를 미분한 pulse함수이다. <그림2>에서 각 pulse의 중점은 다음과 같다.

$$t_p = (i + (p-2.5)/2) \Delta t \quad (24)$$

여기서 t는 길이 변수이며, 삼각함수와 그 미분값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} T_p &= (1/4, 3/4, 3/4, 3/4) \\ T'_p &= (1, 1, -1, -1) \\ p &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (25)$$

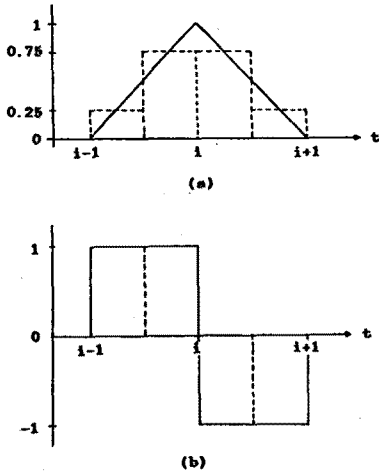


그림2. (a) 삼각함수와 4-pulse approximation
(b) 삼각함수의 미분값

위 식들을 이용하여 계산한 matrix element의 예는 다음과 같다.

$$\langle \bar{w}_{ni}^t, L_{11} \bar{w}_{nj}^t \rangle = \int_0^{Nat} dt \int_0^{Nat} dt' [j\omega\mu_0 T(t-t_i) \cdot T(t'-t_j) \{ \sin v \sin v' (g_{n+1}^{(1)} + g_{n-1}^{(1)} + g_{n+1}^{(2)} + g_{n-1}^{(2)})/2 + \cos v \cos v' (g_n^{(1)} + g_n^{(2)}) + \frac{1}{j\omega} \dot{T}(t-t_i) \dot{T}(t'-t_j) \cdot (g_n^{(1)}/\epsilon_1 + g_n^{(2)}/\epsilon_2) \}] \quad (26)$$

$$\langle \bar{w}_{ni}^t, L_{12} \bar{w}_{nj}^t \rangle = \int_0^{Nat} dt \int_0^{Nat} dt' [\frac{j\eta}{\rho} T(t-t_i) \cdot T(t'-t_j) \{ -\cos v \sin v' (g_{n+1}^{(1)} + g_{n-1}^{(1)} + g_{n+1}^{(2)} + g_{n-1}^{(2)})/2 + \sin v \cos v' (g_n^{(1)} + g_n^{(2)}) \} - j T(t-t_i) T(t'-t_j) \sin v' \cdot \frac{\partial}{\partial n} (g_{n+1}^{(1)} - g_{n-1}^{(1)} + g_{n+1}^{(2)} - g_{n-1}^{(2)})/2] \quad (27)$$

식 (27)에서 $\frac{\partial}{\partial n} g_n^{(i)}$ 는 식 (23)에서 정의된 Green 함수의 법선 성분 에 관한 미분이고 $i = 1, 2$ 이며 $j = n+1, n-1$ 이다. 식 (27)이 구 (sphere)에 적용되는 경우,

$$\frac{\partial}{\partial n} g_n = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial n} (\exp(-jkR)/R) d\varphi = \int_0^\pi (-(1+jkR) \exp(-jkR)/R^2) \frac{\partial R}{\partial n} d\varphi \quad (28)$$

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla R = \rho(\rho - \rho' \cos \varphi) + (z-a)(z-z')/(a \cdot R) \quad (29)$$

이 된다. 위에서 a는 구의 반경이며, R은 다음과 같다.

$$R = \begin{cases} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + 2\rho\rho'(1 - \cos \varphi)]^{1/2} & \text{if } R_p \neq R_q \\ [(\frac{a^2}{10})^2 + 2\rho^2(1 - \cos \varphi)]^{1/2} & \text{if } R_p = R_q \end{cases}$$

식 (17)의 element를 계산하기 위하여 입사파를 결정하여야 하는데, 입사파가 x-z평면상에 존재하는 경우 한쌍의 입사파는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \hat{u} \exp(jk_0(\rho \sin \theta \cos \phi + z \cos \theta)) \\ \vec{H} &= [(k_0 \times \hat{u})/\eta_0] \exp(jk_0(\rho \sin \theta \cos \phi + z \cos \theta)) \end{aligned} \quad (30)$$

위에서 $k_0 = 120\pi$ 이며, \hat{u} 는 본극벡터, θ 는 입사각을 나타낸다.

3. 결 과

여기서 제시되는 결과는 유전체 구 및 cone-sphere에 관한 산란 pattern이다. 앞에서 전개된 수식와 과정을 통하여 표면전류분포가 결정되면 scattering pattern도 구할 수 있다. 주파수가 300MHz일때 입사파는 z축방향으로 수직입사하는 경우를 고려하였다.

Table 1. Bistatic RCS for a dielectric sphere ($k_0 a = 1, \epsilon_r = 4$)

	0	20	40	60	80
VP	2.32405	2.21786	1.86308	1.54738	1.13147
HP	2.32364	1.89534	1.23738	.68210	.16935
	100	120	140	160	180
VP	.95202	.89248	.82180	.71373	.60917
HP	.01704	.14994	.52495	.72145	.68732

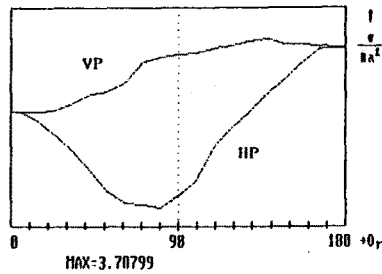


Fig7. Bistatic RCS of a lossy dielectric sphere ($k_0 a = 1.1, \epsilon_r = 1, \sigma = 10^3 \text{ U/m}$)

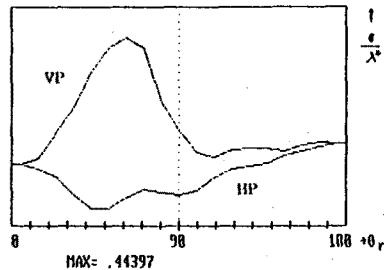


Fig8. Bistatic RCS of a highly lossy dielectric cone-sphere ($a = 0.2 \lambda, \epsilon_r = 1, \sigma = 10^3 \text{ U/m}$)

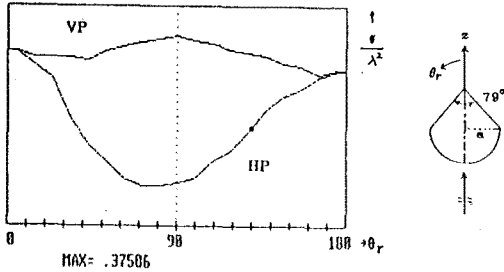


Fig9. Bistatic RCS of a lossy dielectric cone-sphere ($a=0.2\lambda$, $\epsilon_r=60$, $\sigma=10/m$)

4. 결 론

회전형 유전체의 산란현상을 해석하기 위하여 임의적인 유전체에 적용가능한 적분방정식으로부터 Moment Method를 적용하여 산란 pattern을 구하였다. 입사파가 축방향으로 수직하게 입사하는 경우만을 다루었으나, 임의의 입사파에 대해서도 적용할 수 있다. 산란현상의 고찰에 있어서 중요한 척도가 되는 Radar Cross Section은 입사파와 산란파의 방향, target의 크기와 모양 등에 의해 영향을 받을 수 있었다. 본 연구에서 다루어진 이론을 확인하기 위하여 Barber and Yeh[5]의 Data와 비교한 결과 좋은 일치 결과를 보았다.

REFERENCES

[1] R.F. Harrington, Time-Harmonic electromagnetic fields, McGraw-Hill, New York, 1961
 [2] R.F. Harrington, Field computation by moment methods, MacMillian, New York, 1968

[3] A.J. Poggio and E.K. Miller (1973) Integral equation solutions of three dimensional scattering problems, Computer techniques for Electromagnetics, Edited by R. Mittra, Pergamon, New York
 [4] M.G. Andreasen (1965) Scattering from bodies of revolution, IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-13
 [5] P.W. Barber and C. Yeh (1975) Scattering of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric bodies, Appl. Opt., Vol.14, No.12
 [6] D.E. Livesay and K.M. Chen (1974) Electromagnetic fields induced inside arbitrarily shaped biological bodies, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-22
 [7] J.R. Mautz and R.F. Harrington (1969) Radiation and Scattering from bodies of revolution, Appl. Sci. Res., 20
 [8] C. Yeh (1964) Perturbation approach to the diffraction of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric obstacles, Phys. Rev., Vol. 135, No. 5A
 [9] L.N. Medgyesi-Mitschang and J.H. Mullen (1976) Radiation and scattering from asymmetrically excited bodies of revolution, IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-24
 [10] R.J. Pogorzelski (1978) On the numerical computation of scattering from inhomogeneous penetrable objects, IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-26, No.4
 [11] P.L. Hudleston and L.N. Medgyesi-Mitschang (1986) Combined field integral equation formulation for scattering by dielectrically coated conducting bodies, IEEE Transactions Antennas Propagat., AP-34, No.4