부분적으로 도체가 덮인 임의의 단면의 유전체 시린더에 의한 TM 파의 산란현상

°김 남 태 이 상 설*
한양대학교 전자공학과 한양대학교 전자통신공학과*

Scattering of TM Waves by Dielectric Cylinder with Arbitrary Cross Section Partially Covered by a Conductor

Nam Tae Kim * Sang Seol Lee **
Dept. of Electronic Eng. Hanyang Univ.* Dept. of Elec. Comm. Hanyang Univ.**

ABSTRACT

The scattering characteristics are analysed for the dielectric cylinder with arbitrary cross section partially covered by thin conductors. The integrodifferential equations consistant with boundary conditions of conductor and dielectric boundaries are derived by the equivalence principle. They are transrormed into matrix equations by moment method.

The circular dielectric cylinder covered by conductors at the upper and bottom side of the cylinder is chosen for the numerical example. Current distributions on conductors and scattering cross section by the cylinder are computed for incident wave perpendicular to the conductor plane.

1. 서론

시린더형의 도체나 유전체에 의한 전자파산란에 관한 문제는 마이크로파 시스템에서 자주 부딪히는 문제이다. 유전체 또는 도체만으로 되어 있는 시린더에 의한 산란현상은 이미 해석된 바 있다.[1],[2],[3] 여기서는 마이크로스트립라인과 같이 부분적으로 도체가 덮인 유전체시린더에 의한 산란현상을 해석한다.

등가원리에 의하면 유전체 또는 도체가 경계를 이루고 있을때 각 부분에 형성되는 전자파는 경계면에 등가전류원과 등가자류원을 정의하므로써 구해질수 있다.[4] 그들에 의하여 발생된 전계와 자계는 시린더 경계면에서 경계조건을 만족해야 한다.

그림 1은 부분적으로 도체가 덮인 유전체 시린더의 단면을 나타내고 있다.

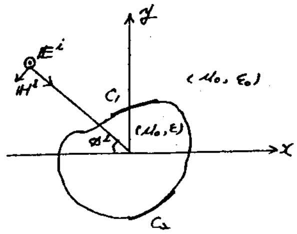

그림 1. 유전체시린더에 입사되는 TM 파

Fig.1 TM Waves incident to dielectric cylinder

C_1과 C_2는 도체가 덮인 부분이다. 도체의 두께는 무시하고 유전체는 비자성체로 한다. ϕ^i 의 각도에서 전자파가 입사될 때 각 경계면에 대하여 다음 관계식이 성립된다.

$$C_d \text{ 에서} \quad E_z^{int}(f) - E_z^s(g) = E_z^i \quad \cdots (1)$$

$$C_d \text{ 에서} \quad n \times (H^{int}(f) - H^s(g)) = n \times H^i \quad \cdots (2)$$

$$C_c \text{ 에서} \quad E_z^{int}(f) = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

$$C_c \text{ 에서} \quad E_z^s(g) = -E_z^i \quad \cdots\cdots (4)$$

여기서 C_d 와 C_c 는 각각 유전체및 도체부분의 경계선이다. z 는 전자계의 z 성분, n 은 C_d, C_c 에서 밖으로 향하는 단위 법선 벡터이다. $E^{int}(f)$ 와 $H^{int}(f)$ 는 시린더 내부에 발생되는 전자계이고 $E^s(g)$ 와 $H^s(g)$ 는 시린더 밖으로 산란되는 전자계이다. $E^{int}(f)$ 와 $H^{int}(f)$ 는 C_d 와 C_c 에 있는 등가전류 f 에 의하여 전 공간이 매질 (μ_0, ϵ) 으로 되어 있을때 복사되는 전자계이고 $E^s(g)$ 와 $H^s(g)$ 는 C_d 와 C_c 에 있는 등가전류 g 에 의하여 전 공간이 매질 (μ_0, ϵ_0) 로 되어 있을 때 복사되는 전자계이다. E^i, H^i 는 입사파의 전자계이다.

(1), (2)는 유전체 경계면에서 전자계의 접선성분이 연속임을 나타내는 식이고 (3), (4)는 도체경계면에서 전계의 접선성분이 0임을 나타내는식이다.

2. 모먼트법의 적용

그림 1 에서 입사파는 다음식으로 쓸수 있다.

$$E^i = u_z\, e^{-jk_0(x\cos\phi^i - y\sin\phi^i)} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$H^i = -\frac{1}{\eta_0}(u_x\sin\phi^i + u_y\cos\phi^i)\, e^{-jk_0(x\cos\phi^i - y\sin\phi^i)} \quad \cdots (6)$$

여기서 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ 이고 ϕ^i 는 입사각이다. 2차원 전류 J 에 의한 전계 $E(J)$ 와 $H(J)$ 는 다음 식으로 주어진다.[5]

$$E(J) = -\frac{k\eta}{4}\int_C J(\ell')\, H_0^{(2)}(k|\ell-\ell'|)\, d\ell' \quad \cdots (7)$$

$$H(J) = \pm\frac{1}{2}J(\ell)\times n - \frac{1}{4j}\int_C J(\ell') \times \nabla H_0^{(2)}(k|\ell-\ell'|)\, d\ell' \quad \cdots\cdots (8)$$

이 식에서+기호는 n 이 시린더 안으로향하는 경우이고, - 기호는 n 이 시린더 박으로 향하는 경우이다. f 와 g 를 다음과 같이 전개함수형으로 놓는다.

$$f = \sum_{j=1}^{N} I_j^f J_j \,,\quad g = \sum_{j=1}^{N} I_j^g J_j \quad \cdots\cdots (9)$$

여기서

$$J_j = \begin{cases} 1\ u_z & t_j \le t \le t_{j+1} \\ 0 & \text{그 밖에서} \end{cases}$$

이고 $\{t_j, j=1,2\cdots N\}$ 은 C_d 와 C_c 에 있는 점이다. $\{I_j^f\}$ 와 $\{I_j^g\}$는 전개함수의 계수로서 그들을 구하면 등가전류 f 와 g 를 알게 된다.

(9), (10)을 (1)−(4) 에 대입하면 다음식을 얻는다.

$$C_d \text{ 에서 } \sum_{j=1}^{N}\{I_j^f E_z^{int}(J_j) - I_j^g E_z^s(J_j)\} = E_z^i \quad \cdots (11)$$

$$C_d \text{ 에서 } \sum_{j=1}^{N}\{I_j^f \cdot n\times H^{int}(J_j) - I_j^g \cdot n\times H^s(J_j)\} = n\times H^i \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

$$C_c \text{ 에서 } \sum_{j=1}^{N} I_j^f E_z^{int}(J_j) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (13)$$

$$C_c \text{ 에서 } \sum_{j=1}^{N} -I_j^g E_z^s(J_j) = E_z^i \quad \cdots\cdots\cdots (14)$$

N_d 와 N_c 를 각각 C_d 와 C_c 에 놓여 있는 전개 함수의 수라하면 $N = N_c + N_d$ 로 된다. (11), (12)의 양변에는 J_i, $i=1,2 \cdots\cdots N_d$ 를 스캘러프로덕트하고 (13), (14)의 양변에는 J_i, $i=N_d+1,\cdots N$ 을 스캘러 프로덕트하면 다음 행렬식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} [Z_1^{int}] & [Z_1^s] \\ [Y^{int}] & [Y^s] \\ [Z_2^{int}] & [0] \\ [0] & [Z_2^s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^f \\ -I^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ I \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \cdots (15)$$

여기서

$$I^f = \begin{bmatrix} I_1^f \\ I_2^f \\ \vdots \\ I_N^f \end{bmatrix} \qquad I^g = \begin{bmatrix} I_1^g \\ I_2^g \\ \vdots \\ I_N^g \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (16)$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N_d} \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} V_{N_d+1} \\ V_{N_d+2} \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (17)$$

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{N_d} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (18)$$

이고 (17)에서 V_i 는 다음과 같이 계산된다.

$$V_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} J_i \cdot u_z E_z^i\, dt = \frac{\Delta C_i \sin k_0\beta}{k_0\beta} e^{-jk_0\alpha} \quad \cdots (19)$$

$$1 \le i \le N$$

여기서

$$\alpha = \frac{1}{2}\{(x_{i+1}+x_i)\cos\phi^i - (y_{i+1}+y_i)\sin\phi^i\} \quad \cdots (20)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\{(x_{i+1}-x_i)\cos\phi^i - (y_{i+1}-y_i)\sin\phi^i\} \quad \cdots (21)$$

이다. (x_i, y_i) 는 t_i 의 좌표이고 $\Delta C_i = t_{i+1} - t_i$ 이다. $[Z_1^{int}]$, $[Z_1^s]$, $[Y^{int}]$ 및 $[Y^s]$는 $N_d\times N$ 행렬, $[Z_2^{int}]$ 와 $[Z_2^s]$ 는 $N_c\times N$ 행렬이다. $[0]$ 는 $N_c\times N$ 행렬로서 그의 모든 원소가 0이다. 0는 그의 모든 원소가 0인 $N_c\times 1$ 벡터이다.

V_1, V_2 는 (19)에 의해서 계산할 수 있다. I 의 원소는다음 식으로 주어진다.

$$I_i = \eta_0\int_{t_i}^{t_{i+1}} J_i\cdot(n\times H^i)\, dt \qquad 1\le i\le N_d \quad \cdots (22)$$

$\hat{t}_i$ 를 t_i 에서 t_{i+1} 으로 향하는 단위벡터라 하면 단위벡터 n 은 다음과 같이 x, y 성분으로 표시할 수 있다:

$$n = u_z\times\hat{t}_i = u_y(\hat{t}_i\cdot u_x) - u_x(\hat{t}_i\cdot u_y) \quad \cdots (23)$$

(6), (23)을 (22)에 대입하면

$$I_i = (\hat{t}_i\cdot u_x\sin\phi^i + \hat{t}_i\cdot u_y\cos\phi^i)\, V_i \quad \cdots (24)$$

$$1 \le i \le N_d$$

로 된다. 여기서 $\{V_i, i=1,2\cdots N_d\}$ 는 (19)로 주어진다.

(15)에서 행렬 $[Z]$의 원소는 (7)에 의하여 다음식으로 표시된다.

$$Z_{ij}^{int} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} J_i\cdot u_z E_z^{int}(J_j)\, dt = -\frac{k\eta}{4}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_j}^{t_{j+1}} H_0^{(2)}(k|\ell-\ell'|)\, dt'dt \quad \cdots (25)$$

$$Z_{ij}^s = \int_{t_i}^{t_{i+1}} J_i\cdot u_z E_z^s(J_j)\, dt \qquad ,\ 1\le i,j\le N$$

$$= -\frac{k_0\eta_0}{4}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_j}^{t_{j+1}} H_0^{(2)}(k_0|\ell-\ell'|)\, dt'dt \quad \cdots (26)$$

여기서 $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 이다. $i=j$ 일때 Hankel 함수 $H_0^{(2)}(x)$ 는 다음 근사식으로 계산할 수 있다.[3]

$$H_0^{(2)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 - j\frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma x}{2} \quad \cdots (27)$$

여기서 $\ln\gamma$ 는 Euler 상수이고 $\gamma = 1.781$ 이다. I_p 를 다음과 같이 정의한다.

$$I_p = \int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_j}^{t_{j+1}} H_0^{(2)}(k_p|\ell-\ell'|)\, dt'dt \quad \cdots (28)$$

여기서 k_p 는 k_0 또는 k 이다. $i=j$ 에 대하여 I_p 는

$$I_p = \frac{\Delta C_i^2}{4}\left\{4 + j\frac{4}{\pi}\left(3 - 2\ln\frac{k_p\Delta C_i\gamma}{2}\right)\right\} \quad \cdots (29)$$

이고, $i\ne j$ 에 대하여는 다음식으로 된다.

$$I_p = \frac{\Delta C_i\Delta C_j}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H_0^{(2)}\left(k_p\left|R_{ij} + \frac{\Delta C_i}{2}u\hat{t}_i - \frac{\Delta C_j}{2}u'\hat{t}_j\right|\right)du\,du' \quad \cdots (30)$$

여기서 R_{ij} 는 j 번째 소자의 중심에서 i 번째 소자의 중심에 이르는 벡터이다.

(15)에서 행렬 $[Y]$의 원소는 다음 식으로 주어진다.

$$Y_{ij}^{int} = \eta_0 \int_{t_i}^{t_{i+1}} J_i \cdot n_i \times H^{int}(J_j)\, dt \quad \cdots (31)$$

$$Y_{ij}^{s} = \eta_0 \int_{t_i}^{t_{i+1}} J_i \cdot n_i \times H^{s}(J_j)\, dt \quad \cdots (32)$$

(31), (32)를 계산하기 위하여 다음 관계식을 이용한다.[4]

$$\nabla H_0^{(2)}(k|\rho-\rho'|) = \frac{-k(\rho-\rho')}{|\rho-\rho'|} H_1^{(2)}(k|\rho-\rho'|) \quad \cdots (33)$$

$$n_i \times (J_i \times (\rho-\rho')) = u_z(-t_{iy} a_x + t_{ix} a_y) \quad \cdots (34)$$

여기서 t_{ix}와 t_{iy} 는 각각 $\hat{t}_i$ 의 x와 y 성분 이고 a_x 및 a_y는 각각 $(\rho-\rho')$의 x 와 y 성분이다. 따라서 $i=j$ 에 대하여

$$Y_{ii}^{int} = -\frac{\Delta C_i}{2}\eta_0 \qquad 1 \le i \le Nd \quad \cdots (35)$$

$$Y_{ii}^{s} = \frac{\Delta C_i}{2}\eta_0 \qquad 1 \le i \le Nd \quad \cdots (36)$$

이고, $i \ne j$ 에 대하여는

$$Y_{ij}^{p} = \frac{k_p \eta_0}{4j}\,\frac{\Delta C_i \Delta C_j}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-t_{iy} r_{ij}\cdot u_x + t_{ix} r_{ij}\cdot u_y)\,\frac{H_1^{(2)}(k_p|r_{ij}|)}{|r_{ij}|}\, du'\, du \quad \cdots (37)$$

$$1 \le i \le Nd, \quad 1 \le j \le N$$

이다. 여기서 $r_{ij} = R_{ij} + \frac{\Delta C_i}{2} u \hat{t}_i - \frac{\Delta C_j}{2} u' \hat{t}_j$

이다. k_p 는 Y^{int}에 대하여는 k 이고 Y^{s}에 대하여는 k_0 이다.

(15)의 모든 행렬원소를 계산하므로서 I^f, I^d 를 구할 수 있다. 따라서 C_d 와 C_c 로 둘러 싸인 영역 내의 전자계 E^{int} 및 H^{int}는 다음 식으로 주어진다.

$$E^{int} = \sum_{j=1}^{Nd} I_j^f E^{int}(J_j) \quad \cdots (38)$$

$$H^{int} = \sum_{j=1}^{N} I_j^f H^{int}(J_j) \quad \cdots (39)$$

또한 시린더 밖의 전자계 E^{out}, H^{out} 는

$$E^{out} = E^{i} + \sum_{j=1}^{N} I_j^d E^{s}(J_j) \quad \cdots (40)$$

$$H^{out} = H^{i} + \sum_{j=1}^{N} I_j^d H^{s}(J_j) \quad \cdots (41)$$

로 된다.

Hankel 함수 $H_0^{(2)}(x)$는 x 가 매우 클 때

$$H_0^{(2)}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \sqrt{\frac{2j}{\pi x}}\, e^{-jx} \quad \cdots (42)$$

이므로 산란파 E_z^s 는

$$E_z^s\left(\sqrt{-j8\pi k_0\rho}\; e^{jk_0\rho}\right) = \eta_0 \sum_{j=1}^{N}(-I_j^d)\, k_0 \Delta C_j\, e^{jk_0 R_j \cos(\phi-\phi_j)} \quad \cdots (43)$$

로 된다.

여기서 (ρ, ϕ)와 (ρ_j, ϕ_j)는 각각 전계점과 전원점의 좌표이다. 또한 산란단면적 $\sigma(\phi)$ 는 다음식으로 계산된다.

$$\sigma(\phi) = 2\pi\rho\left|\frac{E_z^s(\phi)}{E_z^i}\right|^2 \quad \cdots (44)$$

도체부분에 유도되는 전류 J^f 는 다음식으로 계산된다.

$$J^f = n \times (H^{out} - H^{int}) \quad \cdots (45)$$

(39), (41), (6), (8)을 (45)에 대입하여 i 번째 소자의 전류 $(J_i)^f$를 구하면 다음과 같다.

$$(J_i)^f = \frac{1}{\eta_0}(\hat{t}_i\cdot u_x \sin\phi^i + \hat{t}_i\cdot u_y \cos\phi^i)\, e^{jk_0\left(\cos\phi^i\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) - \sin\phi^i\left(\frac{y_{i+1}+y_i}{2}\right)\right)}$$
$$+ \frac{1}{2}(I_i^f + I_i^d) + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{N}\frac{\Delta C_j}{4j}\Big\{ I_j^d k_0 \int_{-1}^{1}(-t_{iy}a_x + t_{ix}a_y)\,\frac{H_1^{(2)}(k_0|\rho-\rho'|)}{|\rho-\rho'|}\, du'$$
$$- I_j^f k \int_{-1}^{1}(-t_{iy}a_x + t_{ix}a_y)\,\frac{H_1^{(2)}(k|\rho-\rho'|)}{|\rho-\rho'|}\, du'\Big\} \quad \cdots (46)$$

여기서

$$\rho_i - \rho' = R_{ij} - \frac{\Delta C_j}{2} u' \hat{t}_j$$

$$a_x = u_x\cdot(\rho-\rho'), \quad a_y = u_y\cdot(\rho-\rho')$$

이다.

3. 계산결과

그림 2는 계산에 적용된 유전체 시린더의 단면을 나타낸다.

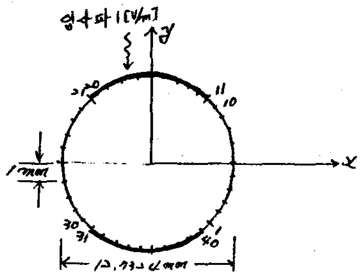

그림 2, 여러개의 작은 소자로 분할된 원형유전체 시린더의 단면

FIG. Cross section of circular dielectric cylinder divied into 40 segments

시린더 경계선을 40개로 분할하여 소자의 길이가 모두 1mm로 되게 한다. y 축 방향에서 전계의 세기 1[V/m]의 TM 파가 입사될 때 도체 표면에 유도되는 전류분포 및 산란단면적을 계산한다.

유전체단면의 길이(12.73mm)가 반파장으로 되는 주파수 (11.72 GHz)를 중심으로 $0.75f_r$ 로 부터 $1.25f_r$ 까지의 주파수에 대한 전류분포와 산란단면적을 계산한다.

그림 3은 도체부분에 발생된 전류의 계산결과이다.

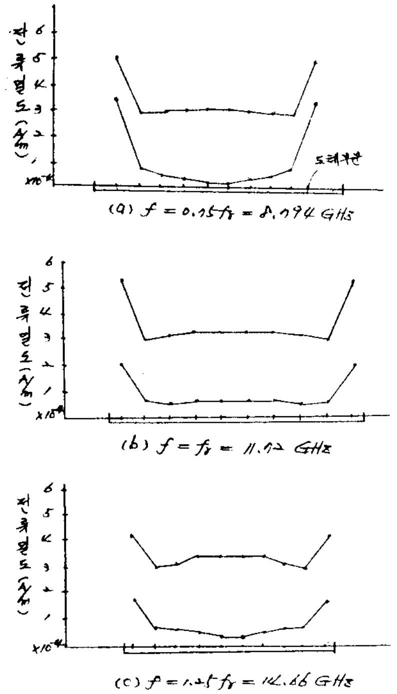

그림 3, 도체부분의 전류분포
Fig.3 Current distributions on conductors

그림 3 에서 도체부분의 전류분포는 그 중앙부분에서는 거의 일정하고 도체끝 부분에서는 크게 증가하는 경향을 보인다.

그림 4 는 산란단면적의 주파수에 따른 변화를 나타낸다. 산란단면적은 주파수가 증가함에 따라 거의 직선적으로 증가한다.

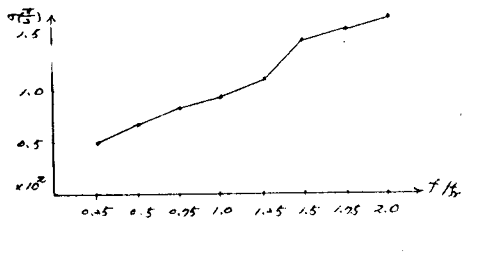

그림 4. 산란단면적의 주파수에 따른 변화
Fig.4 Variation of scattering cross section as a function of frequency

4. 결 론

부분적으로 도체가 덮인 유전체시린더에 TM 파가 입사되었을때 도체부분에 유도되는 전류분포와 산란단면적을 계산할수 있다.

직경이 12.73 mm인 원형 유전체 시린더의 양면에 10 mm의 도체가 덮여 있을때 산란단면적은 주파수가 증가함에 따라 거의 직선적으로 증가한다.

참 고 문 헌

1) K.Mei and J.Vladel,"Scattering by Perfectly Conducting Retangular Cylinders", IEEE Trans. vol.AP-11, No.2, pp.185-192, March 1963.
2) J.H.Richmond," TE Wave Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross section shape ", IEEE Trans., vol.AP-14, No.4, pp.460-464, July 1966.
3) R.F.Harrington," Field Computation by Moment Methods ", Macmillan, New York, pp.107-125, 1968.
4) R.F.Harrington," Time Harmonic Electromagnetic Fields ", McGraw-Hill Book Company, New York, pp.106-113, 1961.
5) D.T.Auckland, R.F.Harrington," A nonmodal Formulation for Electromagnetic Transmission through a Filled Slot of Arbitrary Cross Section in a Thick Conducting Screen", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-28, No.6, pp.548-555, June 1980.