Routh 배열을 이용한 전달함수 행렬의 최소실현

○이 원 규 대전 개방대학
이 상 혁 아 주 대 학 교

Minimal Realization of Transfer-function Matrices using Routh Array

Lee Won Kyu Daejoen Open university
Lee Sang Hyuk A-Jou University

1. 서 론

다변수 계통의 해석 및 합성에 있어서 전달함수 행렬의 최소실현 문제는 계통의 내부구조, 안정도 면에서 매우 중요하다. 즉, 전달함수의 최소실현은 계통의 아날로그 또는 디지탈 시뮬레이션 하는데 필요한 적분기 및 미분방정식의 수를 최소로 한다는 점에서 바람직 하게 된다. 최소 실현 기법으로는 계통 행렬을 이용한 기법[1-3]과 주파수 영역에서 실현하는 방법으로 대별할 수 있는데 후자의 경우 Wolovich의 구조이론[4]과 여러가지 Cauer형 행렬 연분수 전개를 이용한 방법이 있다.[5-7]

Cauer형 연분수 전개는 대부분 오름차순의 분자, 분모의 계수를 이용하여 역 알고리즘에 의해 연분수 전개를 수행하고 이로부터 Routh 배열을 구성하는 것이다.

본 연구에서는 기존의 연분수 전개의 역 알고리즘을 적용하기 위해 전달함수 행렬을 정방향으로 제한하여 내림차순의 분자, 분모의 계수행렬에 대한 연분수 전개를 통해 Routh 배열을 구성, 이로부터 최소 실현 하는 방법을 제시한다. 또한, 전달함수 행렬이 Coprime 경우에 대해서도 언급한다.

2. 최소 실현 기법

2-1 전달함수 행렬의 연분수 전개

다음식으로 기술되는 m 입력 m 출력의 다변수 계통을 생각한다.

$$Y(s) = G(s)U(s) \qquad \text{------(1)}$$

여기서

$$G(s) = A1(s)^{-1} A2(s)$$
$$= [A_{11}s^{n} + A_{12}s^{n-1} + \dots + A_{1n}s + A_{1,n+1}]^{-1}$$
$$\cdot [A_{21}s^{n-1} + A_{22}s^{n-2} + \dots + A_{2n}] \qquad \text{------(2)}$$

$A_2(s)$가 정치(nonsingular) 일 때

$$G(s)^{-1} = A2(s)^{-1}A_1(s)$$
$$= K_1 s + A_2(s)^{-1}A_3(s) \qquad \text{------(3)}$$

또는

$$A_1(s) = A_2(s)K_1 s + A_3(s) \qquad \text{------(4)}$$

여기서 K_1은 m x m 행렬의 몫으로 다음에 의해 구한다.

$$K_1 = \lim_{s\to\infty} [\, A_2(s)^{-1} A_1(s) \,/s] \qquad \text{------(5)}$$

그리고 $A_3(s)$는 차수가 (n-1)인 행렬 다항식으로 $A_2(s)^{-1}A_1(s)$ 의 나머지 이다.

$$A_3(s) = \sum_{j=1}^{n} A_{3,j}\, s^{n-j} \qquad \text{------(6)}$$

또한 (2)에서 $A_3(s)$가 정치이면

$$[A_2(s)^{-1} A_3(s)]^{-1} = A_3(s)^{-1} A_2(s)$$
$$= H_2 + A_3(s)^{-1} A_4(s) \qquad \text{------(7)}$$

또는

$$A_3(s) = [A_2(s) - A_4(s)]\, H_2^{-1} \qquad \text{——(8)}$$

여기서 H 는 m x m 행렬몫

$$H_2 = \lim_{s\to\infty} A_3(s)^{-1} A_2(s) \qquad \text{——(9)}$$

그리고 $A_4(s)$는 차수 (n-2)인 행렬 다항식 이다.

$$A_4(S) = \sum_{j=1}^{m-1} A_{4j}\, s^{m-j-1} \qquad \text{——(10)}$$

(8)을 (4)에 대입하면

$$\begin{aligned} A_1(s) &= A_2(s)(K_1 s + H_2^{-1}) - A_4(s)H_2^{-1} \\ &= A_2(s)Q_1(s) - A_4(s)H_2^{-1} \qquad \text{——(11)} \end{aligned}$$

같은 방법으로 $A_2(s)$를 구하면

$$\begin{aligned} A_2(s) &= A_4(s)(K_3 s + H_4^{-1}) - A_6(s)H_4^{-1} \\ &= A_4(s)Q_3(s) - A_6(s)H_4^{-1} \qquad \text{——(12)} \end{aligned}$$

$$K_3 = \lim\, [\, A_4(s)^{-1} A_2(s)/s] \qquad \text{——(13)}$$

같은 방법으로 역행열에 의한 연산을 반복 수행하면 다음의 일반식을 얻는다.

$$\left.\begin{aligned} &A_i(s) = A_{i+2}(s)Q_{i+1}(s) - A_{i+4}(s)H_{i+2}^{-1} \\ &A_{2m+2}(s) = O_m \\ &\quad i = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n-2 \end{aligned}\right] \quad (14)$$

여기서

$$\left.\begin{aligned} &A_0(s) \triangleq A_1(s) \\ &Q_{i+1}(s) = K_{i+1}s + H_{i+2}^{-1} \end{aligned}\right] \quad (15)$$

그리고 행렬 다항식 $A_i(s)$의 계수 행렬은 A_{ij}, $j = 1,2,\ldots$라 한다.

(13)의 관계를 이용하여 (2)에 대한 연분수를 구하면

$$G(s) = [Q_1(s) - [Q_3(s) - [\ \ldots [Q_{2m-1}(s)]^{-1} H_{2m}]^{-1} H_6]^{-1} H_4]^{-1} H_2]^{-1} \qquad \text{——(16)}$$

2-2 Routh 배열의 구성

앞절에서 구한 행렬 몫 K_i, H_i를 좀 더 간단히 구하기 위해 (3)식을 계수 행렬을 이용하여 다시쓰면

$$\begin{aligned} &[A_{31}s^{m-1} + A_{32}s^{m-2} + \ldots + A_{3m}] \\ &= [A_{11}s^{m} + A_{12}s^{m-1} + \ldots\ldots + A_{1m}s + A_{1,m+1}] \\ &\quad - [A_{21}s^{m} + A_{22}s^{m-1} + \ldots\ldots + A_{2m}s\ ]\ K_1 \qquad \text{——(17)} \end{aligned}$$

(17)에서

$$\left.\begin{aligned} A_{31} &= A_{12} - A_{22}K_1 \\ A_{32} &= A_{13} - A_{23}K_1 \\ &\ \vdots \end{aligned}\right] \quad (18)$$

또한 (7)식에서 $A_4(s) = A_2(s) - A_3(s)H_2$ 관계로 부터

$$\left.\begin{aligned} A_{41} &= A_{22} - A_{32}H_2 \\ A_{42} &= A_{23} - A_{33}H_2 \\ &\ \vdots \end{aligned}\right] \quad (19)$$

계속해서 A_{2m+1}, $A_{2m+1,1}$까지 구하면

$$\left.\begin{aligned} A_{2m,1} &= A_{2m-2,2} - A_{2m-1,2}H_{2m-2} \\ A_{2m+1,1} &= A_{2m-2,2} \end{aligned}\right] \quad (20)$$

이 관계로 부터 Routh 배열을 구성하면

$$\begin{array}{lll|lllll} K_1 & & & A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots\ldots & A_{1m}\ A_{1,m+1} \\ & & & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ldots\ldots & A_{2,m-1}\ A_{2m} \\ & H_2 & & & & & & \\ K_3 & & & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \ldots\ldots & A_{3,m-1}\ A_{3m} \\ & & & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \ldots\ldots & A_{4,m-2}\ A_{4,m-1} \\ & H_4 & & & & & & \\ K_5 & & & A_{51} & A_{52} & A_{53} & \ldots\ldots & A_{5,m-2}\ A_{5,m-1} \\ & & & A_{61} & A_{62} & A_{63} & \ldots\ldots & A_{6,m-3}\ A_{6,m-2} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & \\ & & & A_{2m-2,1} & A_{2m-2,2} & & & \\ K_{2m-1} & H_{2m-2} & & A_{2m-1,1} & A_{2m-1,2} & & & \\ & & & A_{2m,1} = & A_{2m-2,2} - A_{2m-1,2}H_{2m-2} & & & \\ & H_{2m} & & A_{2m+1,1} = & A_{2m-2,2} & & & \end{array} \quad (21)$$

여기서

$$\left.\begin{aligned} &K_1 = A_{21}^{-1}A_{11} \qquad H_2 = A_{31}^{-1}A_{21} \\ &K_{i+1} = A_{i+2,1}^{-1}A_{i,1} \\ &H_{i+2} = A_{i+3,1}^{-1}A_{i+2,1} \qquad i = 2,4,6\ldots 2m-2 \end{aligned}\right. \quad (22)$$

(21)에서 행렬 몫 K_i, H_i 의 총수(2r) 는 2n 개 이다.

2-3 전달함수 행렬의 최소 실현

2-1에서 유도한 전달함수 행렬의 연분수식(16)는 블럭 정준형(block canonical form)으로 이에대한 블럭선도를 그리면 그림1과 같다. 블럭선도의 상태변수를 그림에서와 같이 정의하고 상태방정식으로 표시하면

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= \hat{A}\hat{X} + \hat{B}U \\ Y &= \hat{C}X \end{aligned}\right. \quad (23)$$

여기서

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} -(K_{2m-1}H_{2m})^{-1} & (K_{2m-3}H_{2m-2})^{-1} & \cdots & O_m & O_m & O_m \\ K_{2m-1}^{-1} & -(K_{2m-3}H_{2m-2})^{-1} & \cdots & O_m & O_m & O_m \\ O_m & O_m & \cdots & O_m & O_m & O_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O_m & O_m & \cdots & (K_5H_6)^{-1} & O_m & O_m \\ O_m & O_m & \cdots & -(K_5H_6)^{-1} & (K_3H_4)^{-1} & O_m \\ O_m & O_m & \cdots & -K_5^{-1} & -(K_3H_4)^{-1} & (K_1H_2)^{-1} \\ O_m & O_m & \cdots & O_m & K_3^{-1} & -(K_1H_2)^{-1} \end{bmatrix}$$

$\hat{B}^T = [\ O_m\ O_m\ \ldots\ O_m\ I_m\ ]$

$\hat{C} = [\ O_m\ O_m\ \ldots\ O_m\ K\ ]$

$\hat{X}^T = [\ \hat{X}_1^T\ \hat{X}_2^T\ \ldots\ \hat{X}_n^T\ ]$

이며 $\hat{X}_i$: m x 1 상태벡터

U, Y : 각각 m x 1 입력, 출력 벡터

그리고 $\hat{A}$는 2-2에서 구한 Ki, Hi를 이용하여 구성한 행렬이다. 따라서 (2)식으로 주어진 전달함수 행렬 G(s)가 left coprime 이고 행렬 몫 Ki, Hi의 총수(2r) 가 2n일때 (23)은 G(s)의 최소 실현이 된다. 또한 G(s)가 left coprime 이고 A = Im 일때 직접 다음과 같은 관측가능한 상태방정식으로 표시할 수 있다.

$$\dot{X} = AX + BU \qquad (24)$$

$$Y = CX \qquad X(0) = O_{nm\times 1}$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} O_m & O_m & \cdots & O_m & -A_{1,n+1} \\ I_m & O_m & \cdots & O_m & -A_{1,n} \\ O_m & I_m & \cdots & O_m & -A_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O_m & O_m & \cdots & I_m & -A_{1,2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{2n} \end{bmatrix}$$

$C = [\ O_m\ O_m\ \ldots\ O_m\ I_m\ ]$

$X^T = [\ X_1^T\ X_2^T \ldots\ X_n^T\ ]$

2-4 전달함수 행렬이 coprime이 아닌경우

최소실현 조건은 Routh 배열에서 Ki, Hi의 총수(2r)가 2r = 2n일때 성립한다. 그런데 2r < 2n인 경우 전달함수 행렬 $G(s)=A_1(s)^{-1}A_2(s)$는 coprime 이 아니고 최대 공약 행렬식이 존재하게된다. 이 경우 전달함수 행렬을 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{aligned} G(s) &= A_1(s)^{-1} A_2(s) \\ &= [B_1(s)\ C(s)]^{-1}\ [B_2(s)\ C(s)] \\ &= B_1(s)^{-1}\ B_2(s) \\ &= [B_{11} s^{r} + B_{12} s^{r-1} + \ldots + B_{1,r+1}]^{-1} \\ &\quad [B_{21} s^{r-1} + B_{22} s^{r-2} + \ldots + B_{2,n}] \quad \text{---(25)} \end{aligned}$$

여기서 C(s)는 최대공약 행렬 다항식으로 다음과 같이 표시한다.

$$C(s) = C_{n+1-r} s^{n-r} + C_{n-r} s^{n-r-1} + \ldots + C_1 \quad \text{---(26)}$$

이와같은 공약행렬 다항식이 존재할 경우 Routh 배열은 불완전하게 끝나게 되므로 C(s)를 축출한 나머지의 전달함수 행렬로 Routh 배열을 구성하여 전달함수 행렬의 최소실현을 할 수 있다.

3. 결론

전달함수 행렬로 주어진 다변수 계통의 최소실현을 구한 기법이 제안 되었다. 제안된 방법은 $G(s)=A_1(s)^{-1}A_2(s)$의 역 $G(s)^{-1}=A_2(s)^{-1}A_1(s)$가 존재하는 전달함수 행렬에 국한된다. 이때 행렬 연분수의 전개는 기존방법[6] 과는 달리 가장차수가 높은 계수 행렬을 이용하여 몫을 구하고 이로부터 Routh 배열을 구성했다. 최소실현 조건은 Routh 배열에서 행렬의몫의 총수(2r)가 2n일때 만족하며, 블럭선도에서 구한 상태방정식과 관측 가능한 상태방정식으로 실현할 수 있다. 그러나 2r < 2n일때 최대 공약 행렬다항식이 존재하여 Routh 배열은 불완전 하게 됨을 알 수 있다. 이 경우, Routh 배열로 부터 최소 실현을 할 수 있음을 보여 주었다. 이 방법은 일반 다변수 계통의 적용할 수 없다는 단점이 있으나 기존 방법과 같이 Routh 배열이 간단하며 2개의 분자 분모 행렬 다항식이 coprime 인지,아닌지를 알 수 있다.

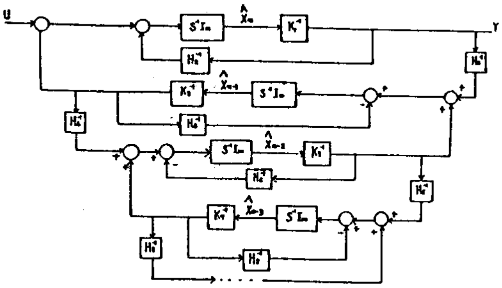

그림1. (16)식의 블럭선도

참고 문헌

1. Mayne, D.Q : 'Computational procedure for the minimal realization of transfer function matrices ' , Proc. IEE 1968, 115, (9) pp, 1363-1368

2. Roberts, D.M : ' A comuter program for the minimal realization of transfer function matrices ', IEEE. Trans 1969, AC-14, pp.412-413

3. N. Munro, et al : ' Minimal realization of transfer function matrices using the system matrix ', Proc. IEEE, Vol.118 NO.9, pp.1928-1031, 1971

4. W.A. Wolovich : Linear multivariable systems, pp.114-127. Springer-verlag New York Inc. 1974

5. T. Takahasi, N. Hamada and S.I. Takahasi, :' A state-space Realization for functions ', IEEE Trans. Circuits and systems, Vol CAS-25, NO.2, pp.78-88, 1977

6. Leangs. Shieh, Stanley Yeh, and R.E. Yates : ' Realization of Matrix Transfer function Via a state-space Approach ', CAS-28, NO.9, pp.934-939, 1981

7. Jayanta Pal : ' System reduction by a Mixed Method ', IEEE Trans. AC-25, NO.5, pp.937-976. 1980