상태 및 입력변수에 시간지연이 있는 시스템을 위한 LQG/LTR 방법

°이 상 정* 권 욱 현

서울대학교 제어계측공학과

LQG/LTR METHODS FOR LINEAR SYSTEMS WITH DELAYS IN STATE AND CONTROL

ABSTRACT

In this paper, the stability margins of LQ regulators for the systems with delays in both state and control are analyzed and represented explicitly in terms of system parameters when the systems are open-loop stable. And, the LQG/LTR method is considered as a robust control design method. The results in this paper generalize the well-known ones for ordinary systems.

1. 서 론

제환 제어시스템을 구성하기 위해서는 일반적으로 시스템을 수학적으로 표현한 모델에 근거하여 제어기를 설계한다. 그러나, 대부분의 경우에 주어진 시스템을 정확히 모델링하기는 거의 불가능하며 모델링 과정에서 비선형을 선형화하거나 시간지연 요소를 무시하거나 시스템 차수를 줄이는등으로 인해 모델링 되지 않은 동특성이 존재하기 마련이고 예측하지 못한 외란이나 측정오차등도 존재한다. 따라서, 모델에 근거를 두어 설계 목적에 맞게 잘 설계된 제어기가 모델이 아닌 실제 시스템 사용되었을 때는 제어 시스템의 안정도를 유지할 수 있으리라는 보장은 없다. 그러므로, 모델에 어느정도 오차가 포함되어 있더라도 제어시스템이 안정도를 유지할 수 있도록 제어기를 설계 하여야 한다. 이러한 성질을 강인 안정도 (robust stability)라하며 강인 안정도를 갖는 제어기를 강인한 제어기(robust controller)라 부른다.

이러한 강인 안정도 문제는 고전적인 주파수 영역 설계기법에서는 강인성의 척도로 이득 여유와 위상 여유를 사용하여 여러가지 그래프 방법(Nyquist, Bode, Nichols plot)을 통해 자연적으로 다루어 진다[1]. 한편 다변수 시스템을 위한 강인한 제어기 설계 방법은 크게 두가지로 나누어 볼수 있다. 그 첫째가 Youla등[2] 에 의해 시작된 것으로 다항식 행렬과 전달 함수를 이용하여 시스템을 안정화 시키는 제어기를 매개 변수화하고 시스템의 강인성을 향상시키는 방향으로 선택하는 것이다. 이 방법은 전달 함수 행렬의 coprime factorization 이론[3] 에 근거하며 Antsaklis[4], Desoer[5] 및 Zames [6] 등에 의해 개선되었다. 두번째 방법은 최적 제어 설계에서 설계 변수를 조정하여 강인성을 구현시키는 것으로 LQG/LTR 방법[7 - 9] 이 그 대표적인 것이다. LQG/LTR 방법은 LQG 조정기의 루우프전달 함수를 LQ 조정기 또는 Kalman 필터의 그것과 점근적으로 같아지도록 함으로써 출력 궤환 제어기인 LQG 조정기의 강인성을 상태궤환 제어기인 LQ조정기의 강인성으로 복구시키는 것이다. LQG/LTR 방법은 시스템이 최소위상이 아닌 경우에는 강인성 복구에 제한이 있으나[9] 어느 정도 체계적인 설계과정이 정립되어 있으며 여러분야에 응용이 시도되고 있다 [10 - 12].

한편, 많은 물리적인 시스템들이 상미분 방정식 보다는 시간지연 미분 방정식으로 보다 더 정확히 모델링된다. 이들 시간지연 시스템에 대한 강인성에 대한 연구로는 입력변수에 시간지연이 있는 시스템의 경우에는 Smith 예측기의 강인성 분석 [13-15] 및 LQ 조정기의 강인성 분석과 LQG/LTR 방법에 관한 것[16], 상태변수에 시간지연이 있는 시스템을 위한 LQ조정기의 강인성 분석[17 - 19] 및 LQG/LTR 방법에 관한것 [19]등이 있다. 본 논문에서는 다음과 같이 상태 및 입력변수에 시간지연이 있는 시스템을 위한 LQ 조정기의 강인성을 분석하고 LQG/LTR 방법을 이 시스템에로 확장하고자 한다.

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + B_0u(t) + B_1u(t-h) + w(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (1.2)$$

초기조건 : $x(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \in [-h,0]$ (1.3)

$$u(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \in [-h,0) \quad (1.4)$$

여기서 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$ 이고 A_0 와 A_1 은 $n\times n$ 상수행렬, B_0 와 B_1 은 $n\times m$ 상수행렬이며 C는 $m\times n$ 상수행렬이다. 플랜트 잡음 w(t)와 측정잡음 v(t)는 영평균 백색잡음으로서 $E\{w(t)w'(\tau)\} = \Xi\,\delta(t-\tau)$, $E[v(t)v'(\tau)] = \Theta\,\delta(t-\tau)$라 둔다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에선 LQ조정기의 주파수 영역에서의 최적을 위한 필요조건 즉, Kalman 부등식을 유도하고 시스템이 개루우프 안정할 경우에 LQ 조정기의 안정도 여유를 분석한다. 제3장에선 LQG 조정기의 강인성을 시간지연 입력만 존재하는 경우에 LQ 조정기의 그것으로 복구 시킬수 있음을 보이고 제4장에서 결론 및 앞으로의 연구과제에 대해 언급한다.

2. LQ조정기의 강인성 분석

이 장에서 다루는 시스템은 다음과 같다 :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + B_0u(t) + B_1u(t-h) \quad (2.1)$$

초기조건은 식(1.3) 및 식(1.4)와 같으며 다음과 같은 경비함수를 생각한다 :

$$J(u) = \int_0^\infty \{x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)\}dt \quad (2.2)$$

여기서 $Q=Q'\geq 0$ 이며 $R=R'\geq 0$ 이다. 이와 같은 LQ 문제의 해는 stabilizability 조건하에 다음과 같이 주어진다 [20] :

$$u(t) = -R^{-1}\{B_0'E_0 + B_1'E_3'(0)\}x(t) - R^{-1}\int_{-h}^{0}\{B_0'E_1(\theta) + B_1'E_5(\theta,0)\}\cdot x(t+\theta)d\theta - R^{-1}\int_{-h}^{0}\{B_0'E_3(\theta) + B_1'E_4(0,\theta)\}B_1u(t+\theta)\,d\theta \quad (2.3)$$

여기서 E_0, $E_1(\theta)$, $E_2(\eta,\theta)$, $E_3(\theta)$, $E_4(\eta,\theta)$ 및 $E_5(\eta,\theta)$는 다음과 같이 서로 결합되어 있는 일단의 방정식의 해로 주어진다 :

$$0 = -E_0A_0 - A_0'E_0 - E_1(0) - E_1'(0) - Q - \{E_0B_0 + E_3(0)B_1\}R^{-1}\{B_0'E_0 + B_1'E_3'(0)\} \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{d\theta}E_1(\theta) = A_0'E_1(\theta) + E_2(0,\theta) - \{E_0B_0 + E_3(0)B_1\}R^{-1}\{B_0'E_1(\theta) + B_1'E_5'(\theta,0)\} \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_2(\eta,\theta) = -\{E_1'(\eta)B_0 + E_5(\eta,0)B_1\}R^{-1}\cdot\{B_0'E_1'(\theta) + B_1'E_5'(\theta,0)\} \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{d\theta}E_3(\theta) = A_0'E_3(\theta) + E_5(0,\theta) - \{E_0B_0 + E_3(0)B_1\}R^{-1}\{B_0'E_3(\theta) + B_1'E_4(0,\theta)\} \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_4(\eta,\theta) = -\{E_3'(\eta)B_0 + E_4(\eta,0)B_1\}R^{-1}\cdot\{B_0'E_3(\theta) + B_1'E_4(0,\theta)\} \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_5(\eta,\theta) = -\{E_1'(\eta)B_0 + E_5(\eta,0)B_1\}R^{-1}\cdot\{B_0'E_3(\theta) + B_1'E_4(0,\theta)\} \quad (2.9)$$

경계조건 : $E_1(-h) = E_0A_1$ (2.10)

$$E_2(-h,\theta) = A_1'E_1(\theta) \quad (2.11)$$

$$E_3(-h) = E_0 \quad (2.12)$$

$$E_4(-h,\theta) = E_3(\theta) \quad (2.13)$$

$$E_5(\eta,-h) = E_1'(\eta) \quad (2.14)$$

여기서 $E_2'(\eta,\theta)=E_2(\theta,\eta)$, $E_4'(\theta,\eta)=E_4(\eta,\theta)$, $-h\leq\eta\leq 0$, $-h\leq\theta\leq 0$ 이다. 또한, 최적폐회로 시스템은 점근적으로 안정하며 최적 경비는

$$J(u^*) = \phi'(0)E_0\phi(0) + \phi'(0)\int_{-h}^{0}\{E_1(\theta)\phi(\theta) + E_3(\theta)B_1\psi(\theta)\}\,d\theta + \int_{-h}^{0}\{\phi'(\theta)E_1'(\theta) + \psi'(\theta)B_1'E_3'(\theta)\}d\theta\,\phi(0) + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\phi'(\eta)\cdot E_2(\eta,\theta)\phi(\theta)\,d\eta d\theta + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi'(\eta)B_1'\cdot E_5'(\theta,\eta)\phi(\theta)\,d\eta d\theta + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\phi'(\eta)E_5(\theta,\eta)\cdot B_1\psi(\theta)\,d\eta d\theta + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi'(\eta)B_1'E_4(\eta,\theta)B_1\cdot\psi(\theta)\,d\eta d\theta \quad (2.15)$$

와 같이 주어진다.

위와 같은 LQ조정기에 대한 Kalman 부등식을 유도하기위해 편의상 다음과 같은 변수들을 정의한다.

$$E_1(s) = \int_{-h}^{0}e^{s\theta}E_1(\theta)d\theta \quad (2.16)$$

$$E_2(s) = \int_{-h}^{0}e^{s\theta}E_2(0,\theta)d\theta \quad (2.17)$$

$$E_3(s) = \int_{-h}^{0}e^{s\theta}E_3(\theta)d\theta \quad (2.18)$$

$$E_4(s) = \int_{-h}^{0}e^{s\theta}E_4(0,\theta)d\theta \quad (2.19)$$

$$E_5(s) = \int_{-h}^{0}e^{s\theta}E_5'(\theta,0)d\theta \quad (2.20)$$

$$\bar{E}_5(s) = \int_{-h}^{0}e^{s\theta}E_5(0,\theta)d\theta \quad (2.21)$$

$$F_0(s) = R^{-1}(B_0'E_0 + B_1'E_3(0) + B_0'E_1(s) + B_1'E_5(s)) \quad (2.22)$$

$$F_1(s) = R^{-1}(B_0'E_3(s) + B_1'E_4(s))B_1 \quad (2.23)$$

이와 같은 변수들을 이용하여 식(2.3)의 LQ 조정기를 Laplace 변환하여 주파수 영역에서 표시하면

$$u(s) = -[I+F_1(s)]^{-1}F_0(s)x(s) \quad (2.24)$$

와 같이 된다. 이제 상미방 시스템에서와 같이 return difference matrix를 다음과 같이 정의한다.

$$T_F(s) = I + R^{\frac{1}{2}}F(s)\Phi(s)(B_0 + B_1e^{-sh})R^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

여기서 $F(s) = [I+F_1(s)]^{-1}F_0(s)$ (2.26)

$$\Phi(s) = (sI - A_0 - A_1e^{-sh})^{-1} \quad (2.27)$$

이다. 이와 같이 정의되는 return difference matrix 를 사용하여 상태 및 입력변수에 시간지연이 있는 시스템을 위한 LQ 조정기의 주파수 영역에서의 최적을 위한 필요조건을 유도한다.

정리 2.1 : 식(2.1)과 같이 상태 및 입력변수에 시간지연이 있는 시스템에 대해 2차 경비함수 식(2.2)를 최소화하는 LQ 조정기 식(2.3)은 주파수 영역에서 다음과 같은 관계를 만족시킨다 :

$$T_F^*(j\omega)\,[I+R^{\frac{1}{2}}F_1(j\omega)R^{\frac{1}{2}}]^*[I+R^{\frac{1}{2}}F_1(j\omega)R^{\frac{1}{2}}]T_F(j\omega) = I+R^{-\frac{1}{2}}(B_0+B_1e^{-j\omega h})^*\,\Phi^*(j\omega)Q\Phi(j\omega)(B_0+B_1e^{-j\omega h})\cdot R^{-\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

정리 2.1의 식(2.28)의 좌변은 Hermitian 이고 우변은 $L(j\omega)=\Phi(j\omega)(B_0+B_1e^{-j\omega h})R^{\frac{1}{2}}$로두면 $I+L^*(j\omega)Q\cdot L(j\omega)$ 의 형태이다. 한편, 무게행렬 $Q=Q'\geq 0$ 이므로 식(2.28)로부터

$$T_F^*(j\omega)[I+R^{\frac{1}{2}}F_1(j\omega)R^{\frac{1}{2}}]^*[I+R^{\frac{1}{2}}F_1(j\omega)R^{\frac{1}{2}}]T_F(j\omega)\geq I \quad (2.29)$$

과 같은 Kalman 부등식을 얻게된다. 이 부등식에서 $F_1(j\omega)$ 는 연산자 형태의 Riccati 방정식의 해로부터 구해지는것으로 그의 상한이 주어지면 LQ 조정기의 안정도 여유를 분석할 수 있게 된다.

보조정리 2.1 : 식(2.1)로 주어지는 시스템이 개루우프 안정하다고 가정하면 다음의 관계가 성립된다.

$$\nu[B_0'E_3(\theta)B_1]\leq\bar{\sigma}[M_1(\theta)] \quad , \quad -h\leq\theta\leq 0 \quad (2.30)$$

$$\nu[B_1'E_4(0,\theta)B_1]\leq\bar{\sigma}[M_2(\theta)] \quad , \quad -h\leq\theta\leq 0 \quad (2.31)$$

여기서 $\bar{\sigma}(\cdot)$는 최대 특이치를 나타내고 $\nu(\cdot)$은 임의의 $n\times m$ 행렬 $D=(d_{ij})$에 대해

$$\nu(D)=\max_{i,j}|d_{ij}| \quad (2.32)$$

로 정의되는 norm 이며 $M_1(\theta)$ 와 $M_2(\theta)$ 는

$$M_1(\theta)=\begin{bmatrix} B_0'KB_0 & B_0'\Phi'(h+\theta)KB_1 \\ B_1'K\Phi(h+\theta)B_0 & B_1'KB_1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$M_2(\theta)=\begin{bmatrix} B_1'KB_1 & B_1'\Phi'(-\theta)KB_1 \\ B_1'K\Phi(-\theta)B_1 & B_1'KB_1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

와 같다. 또, K 와 상태전이 행렬 $\Phi(t)$는

$$K=\int_0^\infty\Phi'(t)Q\Phi(t)dt \quad (2.35)$$

$$\dot{\Phi}(t)=A_0\Phi(t)+A_1\Phi(t-h),\ \Phi(0)=I,\ \Phi(t)=0,\ t<0 \quad (2.36)$$

와 같은 식을 만족한다.

이제 보조정리2.1의 결과를 이용하여 $F_1(j\omega)$의 상한을 유도하고 Kalman 부등식(2.29)와 함께 LQ 조정기의 안정도 여유를 분석한다.

정리 2.2 : 식(2.1)의 시스템이 개루우프 안정하고 $j\omega$축에 개루우프극점을 갖지 않는다고 가정한다. 이때, 식(2.3)으로 주어지는 LQ 조정기는 무게 행렬 R 이 대각인 경우에 제환 루우프에서의 비간섭교란에 대해 다음과 같은 안정도 여유를 보장한다.:

$$\text{이득여유} = \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\ ,\ \frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \quad (2.37)$$

$$\text{위상여유} = \pm\cos^{-1}\left(1-\frac{1}{2(1+\alpha)^2}\right) \quad (2.38)$$

$$\alpha=m\cdot\sigma(R^{-1})\frac{\bar{\sigma}(R^{\frac{1}{2}})}{\sigma(R^{\frac{1}{2}})}\int_{-h}^{0}\{\sigma[M_1(\theta)]+\sigma[M_2(\theta)]\}d\theta \quad (2.39)$$

와 같으며 $\sigma(.)$은 최소특이치를 나타낸다.

한편, 단일 입력의 경우에는 좀더 개선된$F_1(j\omega)$의 상한을 얻을수 있으며 따라서 개선된 안정도 여유를 구할 수 있게 된다.

따름 정리 2.1 : 식(2.1)의 시스템이 개루우프 안정하고 단일 입력인 경우에 식(2.3)으로 주어지는 LQ 조정기는 식(2.56)및 식(2.57)과 같은 안정도 여유를 보장하게 된다. 단,

$$\alpha=\frac{1}{r}\int_{-h}^{0}\{\bar{\sigma}[M_1(\theta)]+b_1'Kb_1\}d\theta \quad (2.40)$$

로 주어지며 여기서 r및 b_1은 다입력경우에서의 R 및 B_1에 대응하는 변수들이다.

따름 정리 2.1의 결과는 $m=1$인 경우에 $b_1'Kb_1\leq\bar{\sigma}[M_2(\theta)]$이므로 정리 2.2의 결과보다 개선된 것이라 할수 있다.

3. LQG/LTR 방법

이장에서는 다음과 같은 시스템에 대한 LQG/LTR 방법을 다룬다.

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+A_1x(t-h)+B_1u(t-h)+w(t) \quad (3.1)$$

$$y(t)=Cx(t)+v(t) \quad (3.2)$$

와 같은시스템에 대해 2차 경비함수

$$J(u)=E\int_0^\infty\{x'(t)Qx(t)+u'(t)Ru(t)\}dt,\quad Q=Q'\geq 0,\ R=R'>0 \quad (3.3)$$

를 최소화 시키는 LQG 조정기는 stabilizability 와 detectability 조건하에 다음과 같이 주어진다[20].

$$u(t)=-R^{-1}B_1'E_3(0)\hat{x}(t|t)-R^{-1}B_1'\int_{-h}^{0}E_5(\theta,0)\cdot\hat{x}(t+\theta|t)d\theta-R^{-1}B_1'\int_{-h}^{0}E_4(0,\theta)\cdot B_1u(t+\theta)d\theta \quad (3.4)$$

여기서 LQ Riccati 방정식은 식(2.4) - 식(2.9)에서 $B_0=0$로 둔것이며 Kalman 필터는 다음과 같은 형태로 주어진다 :

$$\dot{\hat{x}}(t|t)=A_0\hat{x}(t|t)+A_1\hat{x}(t-h|t)+B_1u(t-h)+P_0C'\theta^{-1}[y(t)-C\hat{x}(t|t)] \quad (3.5)$$

$$A_1\hat{x}(t+\theta|t)=A_1\hat{x}(t+\theta|t+\theta)+\int_{t+\theta}^{t}A_1P_1(t+\theta-\sigma)\cdot C'\theta^{-1}[y(\sigma)-C\hat{x}(\sigma|\sigma)]d\sigma \quad (3.6)$$

여기서 P_0, $P_1(\theta)$ 및 $P_2(\eta,\theta)$는 다음과 같은 필터 방정식의 해이다.

$$0=A_0P_0+P_0A_0'-P_0C'\theta^{-1}CP_0+\Xi+A_1P_1(-h)+P_1'(-h)A_1' \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{d\theta}P_1(\theta)=-P_1(\theta)(A_0'-C'\theta^{-1}CP_0)-P_2(\theta,-h)A_1' \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)P_2(\eta,\theta)=P_1(\eta)C'\theta^{-1}CP_1(\theta) \quad (3.9)$$

여기서 $P_0'=P_0$, $P_2'(\eta,\theta)=P_2(\theta,\eta)$, $-h\leq\eta,\theta\leq 0$ 이며

경계조건은

$$P_1(0)=P_0 \tag{3.10}$$

$$P_2(\theta,0)=P_1(\theta) \tag{3.11}$$

와 같다.

그림 1에 $B_0=0$인 경우의 LQ 조정기 및 LQG조정기의 블럭선도를 보였다. LQ조정기는 정리 2.2에서와 같은 안정도 여유를 보장하게 되며, Kalman 필터는 상미방시스템에서와 같은 비발산 여유를 보장한다[19]. 그러나, 그림 1의 루우프 절단점 (i)에서의 LQ 및 LQG 조정기의 루우프 전달 행렬은

$$T_{LQ}(s)=F(s)\Phi(s)B_1e^{-sh} \tag{3.12}$$

$$T_{LQG}(s)=[F(s)-(I+F_1(s))^{-1}Q(s)C][\Phi^{-1}(s)+H(s)C+B_1e^{-sh}\{F(s)-(I+F_1(s)^{-1}Q(s)C\}]^{-1}\cdot[H(s)-B_1e^{-sh}(I+F_1(s))^{-1}Q(s)]\ C\Phi(s)\cdot B_1e^{-sh} \tag{3.13}$$

와 같으므로 일반적으로 서로 다르다. 여기서 $Q(s)$는 평활기의 영향을 나타내는것으로

$$Q(s)=R^{-1}\int_{-h}^{0}e^{s\sigma}\int_{\sigma}^{0}B_1E_5(0,\theta)P_1(\theta-\sigma)\,d\theta\,d\sigma C'\Theta^{-1} \tag{3.14}$$

$H(s)$ 는 Kalman 필터의 이득으로서

$$H(s)=P(s)C\Theta^{-1} \tag{3.15}$$

$$P(s)=P_0+A_1e^{-sh}\int_{-h}^{0}e^{-s\theta}P_1(\theta)\,d\theta \tag{3.16}$$

와 같다. 따라서, LQG 조정기는 LQ조정기나 Kalman 필터의 보장되는 강인성을 갖는다고 이야기할수 없게 된다. 그러나, 이 경우에도 상미방시스템에서와 마찬가지로 LQG 조정기의 루우프 전달 행렬을 LQ조정기의 루우프 전달 행렬과 점근적으로 같아지게 할 수 있으며 따라서 LQG조정기의 강인성도 복구되게 할 수 있다.

정리 3.1 : Kalman 필터 이득 $H(s)$ 에 대해 다음 조건이 만족되면 LQG조정기의 루우프 전달 행렬 $T_{LQG}(s)$ 는 LQ조정기의 루우프 전달행렬 $T_{LQ}(s)$ 로 복구된다.

$$H(s)[I+C\Phi(s)H(s)]^{-1}=B_1[C\Phi(s)B_1]^{-1} \tag{3.17}$$

이제 조건식 (3.17)을 점근적으로 만족시키는 필터 이득조정 과정에 대해 살펴 보기로 한다.
식(3.1)과 식(3.2)로 주어지는 시스템의 입력단에 가상의 잡음 $\eta(t)$ 를 첨가하면 식(3.1)은

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+A_1x(t-h)+B_1u(t-h)+w(t)+B_1\eta(t-h) \tag{3.18}$$

으로 된다. 여기서 $\eta(t)$는 $w(t)$ 에 독립인 영평균 백색잡음으로 $E[\eta(t)\eta'(\tau)]=q^2I\delta(t-\tau)$ 라 둔다. 이때 새로운 잡음 $\tilde{w}(t)$ 를

$$\tilde{w}(t)=w(t)+B_1\eta(t-h) \tag{3.19}$$

로 정의하면

$$E[\tilde{w}(t)]=0 \tag{3.20}$$

$$E[\tilde{w}(t)\tilde{w}'(\tau)]=(\Xi+q^2B_1B_1')\delta(t-\tau) \tag{3.21}$$

와 같으므로 새로운 잡음 $\tilde{w}(t)$를 사용하여 식(3.18)과 식(3.2)를 다시쓰면

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+A_1x(t-h)+B_1u(t-h)+\tilde{w}(t) \tag{3.22}$$

$$y(t)=Cx(t)+v(t) \tag{3.23}$$

와 같이 된다. 이와 같은 시스템에 대한 Kalman 필터는 식(3.7) - 식(3.11)에 Ξ 대신 $\Xi+q^2B_1B_1'$ 을 대입한 Riccati 방정식을 풀어 식(3.5)및 식(3.6)으로 주어지며 이때의 Riccati방정식의 해는 시스템이 개루우프 안정하고 최소위상이면 $q\to\infty$ 에 따라 $\frac{P(s)}{q^2}\to 0$가 된다[19]. 또, 필터 Riccati 방정식은 주파수 영역에서

$$\Delta(s)P'(-s)+P(s)\Delta'(-s)+P(s)C'\Xi^{-1}CP'(-s) - \Xi-q^2B_1B_1'=0 \tag{3.24}$$

를 만족하므로 [19], 식(3.24)로 부터 $q\to\infty$에 따라

$$\frac{1}{q}P(s)C'\Theta^{-1}\to B\,W(s)\Theta^{-\frac{1}{2}} \tag{3.25}$$

이 됨을 알 수 있다. 여기서 $\Delta(s)=\Phi^{-1}(s)$이고 $W(s)$ 는 $W(s)W'(-s)=I$ 인 행렬이다. 필터 이득 $H(s)$ 가(3.25)와 같은 특성을 나타내면 조건식(3.17)은 점근적으로 만족되게 되며 따라서 루우프 전달 복구가 이루어지게 된다.

4. 결 론

본 논문에서는 상태 및 입력변수에 시간지연이 있는시스템을 위한 LQ 조정기의 주파수 영역 특성을 연구하고 LQG 조정기의 강인성을 개선하기 위한 LQG/LTR 방법을 제시하였다.

LQ조정기의 안정도 여유를 시스템이 개루우프 안정하고 무게행렬 R 이 대각일때 비간섭교란에 대해 시스템 파라메타들로써 명시적으로 나타내었으며 $B_0=0$ 인 경우에 LQG조정기의 강인성을 개선하기 위한 필터 이득 조정과정 적용할수 있음을 보였다.

본 논문에서는 단일 지연이 있는 경우만 다루었으나 LQ조정기의 강인성에 관한 결과는 복수 지연이 있는 경우로 쉽게 확장될 수 있다. 한편, 본 논문에서 개루우프 시스템이 안정하다는 조건하에서 LQ 조정기의 안정도 여유를 구했으나 이 제약조건이 없는 경우에 대한 연구 및 출력변수에도 시간지연이 있는 시스템에 대한 연구도 수행되어야 할 과제이다. 또, $B_0\neq 0$ 인 경우의 LQG/LTR 방법에 관한 연구도 수행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] I.M. Horowitz, Synthesis of Feedback Systems. Academic Press, 1963.

[2] D.C. Youla, H.A. Jabr, and J.J. Bongiomo Jr., "Modern Wiener-Hopf design of optimal controller-Part II : The multivariable case," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-21, no.3, pp.319-338, June, 1976.

[3] M.Vidyasagar, Control System Synthesis: A Factorization Approach. Cambridge, Massachusetts. The MIT Press, 1985.

[4] P.J.Antsaklis, "Some relations satisfied by prime polynomial matrices and their role in linear multivariable system theory," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-24, no.4, pp.611-616, Aug. 1979.

[5] C.A.Desoer, R.-W.Liu, J.Murray, and R. Saeks, "Feedback System design: the fractional representation approach to analysis and synthesis," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-25, no.3, pp.399-412, June 1980.

[6] G.Zames, "Feedback and optimal sensitivity: model reqerence transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverse," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-26, no.2, pp.301-320, Apr. 1981.

[7] J.C.Doyle and G.Stein, "Robustness with observers," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-24, no.4, pp.607-611, Aug. 1979.

[8] J.C.Doyle and G.Stein, "Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-26, no.1, pp.4-16, Feb. 1981.

[9] G.Stein and M.Athans. "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-32, no.2, pp.105-114, Feb. 1987.

[10] W.H.Pfeil, M.Athans, and H.A.Spang III, "Multivariable control of the GE T700 engine using the LQG/LTR design methodology," Proc. Acc, pp.1297-1312, June 1986.

[11] R.Martin, L.Valavani, and M.Athans, "Multivariable control of a submersible using the LQG/LTR design methodology," Proc. ACC, pp.1313-1324, June 1986.

[12] M.Athans, P.Kapasouris, E.Kappos, and H.A. Spang III, "Linear-Quadratic-Gaussian with loop transfer recovery methodology for the F-100 Engine, "AIAA J. of Guid. Contr. and Dyn., Vol.9, pp.45-52, Jan. 1986.

[13] A.Bhaya and C.A.Desoer, "Controlling plants with delay," Int.J.Contr., Vol. 41, no.3, pp.813-830, 1975.

[14] Y.T.Chu and W.-T.Wu, "On modelling error characterizaton of multiple dead time systems," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-31, no.2, pp.157-159, Feb. 1986

[15] Z.J.Palmor and Y.Halevi, "On the design and properties of multivariable dead time compensators," Automatica, Vol.19, no.3, pp.255-284, May 1983.

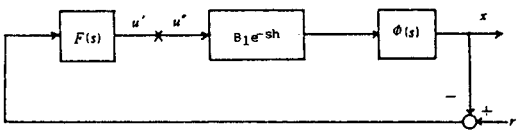
[16] S.J.Lee and W.H.Kwon, "LQG/LTR methods for linear input-delayed systems," To appear in '87 SICE Conference in Hiroshima, Japan. To appear in Int.J. Contr.

[17] K.Uchida and E. Shimemura, "Closed-loop properties of the infinite time linear-quadratic optimal regulator for systems with delays," Int.J.Contr., Vol.43, no.3, pp.773-779, 1986.

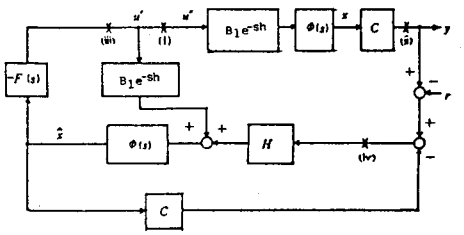
[18] W.H.Lee and B.Levy, "Robustness properties of linear quadratic hereditary differential systems," Proc.of 21st IEEE CDC, pp.1267-1272, 1982.

[19] W.H.Kwon and S.J.Lee, "LQG/LTR methods for linear systems with delay in state," To appear in IEEE Trans. Automat. Contr.

[20] R.H.Kwong, " A stability for the Linear-Quadratic-Gaussian problem for systems with delay in the state, control and observations," SIAM J. contr., Vol.18, no.1, pp.49-75, 1980.



(a) LQ 조정기



(b) LQG 조정기

그림 1. LQ 및 LQG 조정기의 블럭선도