이산형 적분형태를 부가한 극 배치 제어

°오 연 식 , 허 욱 열
인하대학교 전기공학과

Pole Assignment Control with Discrete Integral Action

°Yeon-Sik Oh and Uk-Youl Huh
Dept. of Electrical Engineering, Inha University

ABSTRACT

In this paper, the pole assignment control algorithm with a discrete integral action is discussed in that it reduces the impact of an external step disturbance upon the output. The sensitivity of output is viewed according to changes of delay-time which this algorithm is applied to a continuous plant with.

I. 서 론

1970년대 초반 마이크로 프로세서가 개발된 이후 이를 이용한 단일 루우프 프로그래머블 디지탈 제어기가 산업공정에 응용되면서 그에 적합한 알고리즘들(PID 알고리즘, Dead-beat알고리즘, 최소분산 알고리즘 등)에 관한 연구와 성능평가가 이루어졌다. 하지만 이들 알고리즘들은 제어대상공정이 변화할 때, 또는 계단잡음이나 스토캐스틱한 잡음등 외부잡음들이 인가될 경우에 출력의 감도가 커지거나 정상상태에서 오차가 생기는등의 단점을 나타내기도 하여 그에 대한 개선책들이 요구되고 있다.[1]

극 배치의 개념은 폐루우프 극점이 시스템의 안정도와 과도응답의 성능에 영향을 주며, 직접디지탈제어(Direct Digital Control)에서 보다 더 원활한 제어형태를 꾸며낼 수 있다는 잇점을 지니고 있다. 한편, 외부에서 가해지는 저주파성분의 외란에 따른 오차는 저주파성분에 대한 루우프 이득을 크게함으로써 줄여 줄 수 있다. 이는 적분제어의 고전적인 원리에서 제시해 주고 있다. 그리고 연속형인 제어대상공정에서 지연시간이 샘플링 구간의 정수 곱이 아닌 형태로 나타날 때, 비최소 위상인 영점들이 빈번히 발생한다.[2,3]

이상과 같은 문제들을 고려하여 이산형 적분형태를 갖는 극 배치 제어알고리즘을 구성하여 외부의 계단잡음과 지연시간을 갖는 연속형 3차 모델에 적용시켜 그 출력의 감도를 간단한 시뮬레이션을 통해 살펴 본다.

II. 극 배치 제어

2-1. 극 배치 제어의 개요

$$A(q^{-1})y(t)=B(q^{-1})u(t)\ ;$$
$$B(q^{-1}) \triangleq q^{-k}B'(q^{-1}) \tag{1}$$

와 같이 DARMA 모델로 표현되는 대상플랜트에 식(2)와 같은 구조를 갖는 제어칙을 적용하여 보면, 식(3)으로의 폐루우프 시스템이 구성된다.

$$L(q^{-1})u(t)=-P(q^{-1})y(t)+M(q^{-1})y^*(t+k) \tag{2}$$

$$[L(q^{-1})A(q^{-1})+q^{-k}B'(q^{-1})P(q^{-1})]y(t)$$
$$=B'(q^{-1})M(q^{-1})y^*(t) \tag{3}$$

여기서 $y(t)=y^*(t)$ 를 충족시키려면 $M(q^{-1})=1$ 로 두었을 때,

$$L(q^{-1})A(q^{-1})+q^{-k}B'(q^{-1})P(q^{-1})=B'(q^{-1}) \tag{4}$$

이 얻어진다.

식(4)에서 $B'(q^{-1})$ 를 원하는 폐루우프 다항식 $A^*(q^{-1})$로 대체하면;

$$L(q^{-1})A(q^{-1})+q^{-k}B'(q^{-1})P(q^{-1})=A^*(q^{-1}) \tag{5}$$

이는 제시된 정리1로 부터임의의 폐루우프 극점을 배치하는 대수적인 절차를 통하여 얻어진다.

정리1: 만약 $A(q^{-1})$와 $B(q^{-1})$가 서로 소이고 $n = \max \text{degree}(A(q^{-1}),B(q^{-1}))$이면, $(2n-1)$인 임의의 다항식 $A^*(q^{-1})$은 $(n-1)$ 차의 유일한 다항식 $L(q^{-1})$와 $P(q^{-1})$에 대하여 $A(q^{-1})L(q^{-1})+B(q^{-1})P(q^{-1})=A^*(q^{-1})$ 로써 얻어질 수 있다.[4]

2-2. 적분형태를 부가한 극 배치 제어

단일 입.출력 이산형 제어 시스템의 출력단에 계단 잡음이 인가되었을 때

$$y(t)=q^{-k}\frac{B'(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t)+d \qquad (6)$$

으로 표현되는 개루우프 시스템을 생각하면, $u(t)$ 와 $y(t)$ 는 시스템의 입력과 출력이다.

식(6)과 같이 표현되는 시스템의 입력측에 적분기를 부가하면 새로운 개루우프 시스템은 다음의 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} y(t)&=q^{-k}\frac{B'(q^{-1})}{A'(q^{-1})}u'(t)+d \ ; \\ u'(t)&=(1-q^{-1})u(t) \\ A'(q^{-1})&=(1-q^{-1})A(q^{-1}) \end{aligned} \qquad (7)$$

이 같은 시스템에 극 배치 제어를 행하면

$$u'(t)=y^*(t+k)-\left(\frac{R(q^{-1})}{Q(q^{-1})}u'(t)+\frac{P(q^{-1})}{Q(q^{-1})}y(t)\right) \qquad (8)$$

이 얻어진다. 여기서 $Q(q^{-1})$ 는 관측자의 특성다항식이고, $R(q^{-1})$ 와 $P(q^{-1})$ 는

$$L(q^{-1})A'(q^{-1})+q^{-k}B(q^{-1})P(q^{-1})=A^*(q^{-1}) \qquad (9)$$

의 관계를 만족하는 다항식이다. 여기서 $A^*(q^{-1})=Q(q^{-1})\bar{A}(q^{-1})$ 이며, $R(q^{-1})$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$R(q^{-1})\triangleq L(q^{-1})-Q(q^{-1}) \qquad (10)$$

식(7)과(8)로 부터

$$y(t)=\frac{B'(q^{-1})Q(q^{-1})}{A'(q^{-1})L(q^{-1})}y^*(t)-q^{-k}\frac{B'(q^{-1})P(q^{-1})}{A'(q^{-1})L(q^{-1})}y(t)+d \qquad (11)$$

이 얻어지고, 식(9)의 관계를 통하여 폐루우프 시스템의 출력방정식은

$$A^*(q^{-1})y(t)=B'(q^{-1})Q(q^{-1})y^*(t)+A^*(q^{-1})L(q^{-1})d \qquad (12)$$

와 같다.

식(12)에서 $A'(q^{-1})=(1-q^{-1})A(q^{-1})$ 이므로 정상상태에서는 계단잡음이 포함된 항은 0이된다. 그러므로 극 배치 제어 알고리즘에 이산형 적분기를 부가하는 형태의 제어 방식을 이용하면 정상상태에서 계단잡음의 영향을 제거할 수 있다.

만일 PI 형태의 제어기를 사용하는 경우에는 제어기의 전달함수가

$$\frac{K_i}{1-q^{-1}}+K_p=\frac{(K_p+K_i)\left(1-\frac{K_p}{(K_p+K_i)}q^{-1}\right)}{1-q^{-1}} \qquad (13)$$

로 된다. 이 경우는 $B'(q^{-1})$ 대신에

$$\begin{aligned} \bar{B}(q^{-1})&=\beta(1-\alpha q^{-1})B'(q^{-1}) \ ; \\ \alpha&=K_p/(K_p+K_i) \\ \beta&=K_p+K_i \end{aligned} \qquad (14)$$

를 사용하여 제어기의 계수를 구한다.

그림1은 구성한 폐루우프 시스템의 블럭도이다.

2-3. 안정도 문제

전달함수가 G_o 인 공정이 $G=B'/A$ 로 간략화된 모델로 되었을 때, 이 폐루우프 시스템의 안정도에 대한 충분조건은 다음의 정리2로써 주어진다.

정리2 : 폐루우프 전달함수가 $G_m=Q/P$ 이어야 한다는 규정을 갖고서 안정한 모델 $G=B/A$ 에 극점-영점 배치법을 적용함으로써 얻어지는 조정기 ($Ru=Tu_c-Sy$)를 고려할 때, 이 조정기가 전달함수 G_o 를 갖는 안정한 시스템을 제어한다고 하자. 이때 임계곡선 Γ 와 $z=\infty$ 에서

$$|G-G_o|<\left|\frac{BPT}{AQS}\right|=\left|\frac{G}{G_m}\right|\cdot\left|\frac{G_{ff}}{G_{fb}}\right|$$

이면, 이 폐루우프 시스템은 안정하다.[5]

정리2에서 제시된 안정도 조건을 적분형태를 부가한 극 배치 제어 알고리즘이 만족하는 범위를 구하여 본다.

식(8)로 부터

$$(Q(q^{-1})+R(q^{-1}))u'(t)=Q(q^{-1})y^*(t+k)-P(q^{-1})y(t) \qquad (15)$$

이고, 식(11)과 (15)로 부터 다음의 관계가 얻어진다.

$$G_{ff}=\frac{Q(z^{-1})}{Q(z^{-1})+R(z^{-1})} \qquad (16)$$

$$G_{fb}=-\frac{Q(z^{-1})}{Q(z^{-1})+R(z^{-1})} \qquad (17)$$

$$G=\frac{\beta(1-\alpha z^{-1})B'(z^{-1})}{(1-z^{-1})A(z^{-1})} \qquad (18)$$

$$G_m=\frac{Q(z^{-1})\,\beta(1-\alpha z^{-1})B'(z^{-1})}{\{(Q(z^{-1})+R(z^{-1}))(1-z^{-1})A(z^{-1})+P(z^{-1})\,\beta(1-\alpha z^{-1})B'(z^{-1})\}} \qquad (19)$$

그리고 원래의 플랜트가 시간지연을 갖는다고 하면,

$$G_o=\frac{\beta(1-\alpha z^{-1})}{1-z^{-1}}z^{-k}\frac{B'(z^{-1})}{A(z^{-1})} \qquad (20)$$

이 되고, 식(16)~(20)을 정리하면

$$|G-G_o|\Big/\left|\frac{G}{G_m}\right|\cdot\left|\frac{G_{ff}}{G_{fb}}\right| =\left|\frac{1-z^{-1}}{1+\frac{(Q(z^{-1})+R(z^{-1}))}{P(z^{-1})}\,\frac{(1-z^{-1})A(z^{-1})}{\beta(1-\alpha z^{-1})B'(z^{-1})}}\right| \qquad (21)$$

가 얻어진다.

식(21)에서 다항식 $Q(z^{-1})$와 $P(z^{-1})$는 monic 이고, $R(z^{-1})$는 zero-leading factor 를 가지며 모델링한 G 가 안정하기때문에, $z=\infty$ 에서 $\beta>0$ 인 경우에는 식(21)은 1보다 크게 된다.

따라서 $\beta>0$ 인 경우에는

$$|G-G_o|<\left|\frac{G}{G_m}\right|\cdot\left|\frac{G_{ff}}{G_{fb}}\right|$$

가 보장되어 구성한 폐루우프 시스템은 안정하다.

III. 시뮬레이션

연속형 플랜트의 전달함수는

$$G(s)=\frac{(1+2s)}{(1+10s)(1+7s)(1+3s)}$$

의 3차 모델로 주었고, 기준입력은 단위 계단입력 그리고 외부잡음은 출력측에 단위 계단잡음을 주어 시스템을 구성하였다. 극점은 평면의 단위원 내의 0.4050, 0.3333, 0.2500 에 각각 배치하였으며, 관측자는 Dead-beat 형태로 관측자의 극점이 z-평면상의 원점에 위치하도록 하였다. 그리고 제어입력은 샘플링 주기동안 그 값을 유지하도록 zero-order hold를 거친 후 연속형 플랜트에 입력시켰으며, 플랜트의 출력은 매 1.0 초 마다 샘플링하였다. PI 제어기의 계수는 $K_p=0.03972$, $K_i=2.81652$로 정하여 시뮬레이션을 행하였다. 한편 연속형 플랜트가 각각 0.2 초와 0.1 초의 지연시간을 갖도록 하여 그에 대한 출력의 감도를 살펴 보았다.

IV. 검토 및 결론

시스템 출력이 정상상태에서 갖는 외부 계단잡음에 대한 오차는 극 배치 제어 알고리즘에 이산형 적분기를 포함시켜 줌으로써 제거된다.

연속형 플랜트가 지연시간을 가질 때, 이 알고리즘을 포함하는 페루우프 시스템의 안정도에 대한 보다 구체적인 제약조건과 구성한 제어기의 강인성 문제의 이론적인 연구가 필요하다.

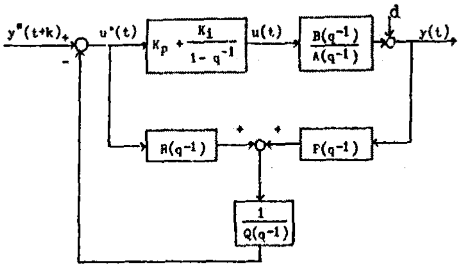

그림 1 페루우프 시스템의 블럭도

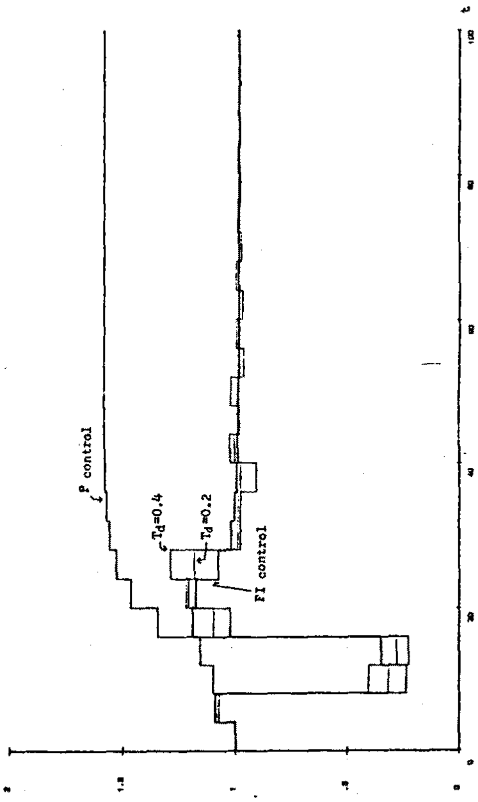

그림 2. 지연시간에 따른 출력응답

참 고 문 헌

1. 허욱열, 강대열, "산업 공정제어를 위한 D.D.C. 알고리즘들에 관한 연구," 인하대학교 산업과학기술연구소 논문집 No.14, pp.247-256, 1986.
2. P.E. Wellstead, D. Prager and P. Zanker, "Pole assignment self-tuning regulater," Proc.IEE, Vol.126, pp.781-787, 1979.
3. K.J. Astrom and B. Wittenmark, Computer Controlled Systems - Theory and Design, Prentice-Hall Inc., 1984.
4. G.C. Goodwin and K.S. Sin, Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice-Hall Inc., 1982.
5. K.J. Astrom, "Robustness of a Design Method Based on Assignment of Poles And Zeros," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-25, pp.588-591, 1980.