

칼만필터 이득의 적응적 계산 방법

○  
저 학 영  
한 전 기 술 연 구 원

An Adaptive Approach to Kalman Filter Gain

Jung, Hak - Yeong  
KEPCO Research Center

1. 서 론

어떤 계통을 제어하고 어느 특정변수의 상태를 추정하고자 할시에는 해당 시스템의 정확한 정적 동적 특성분석을 요하게 된다.

이를 위해서는 계통의 열수력학적으로 비교적 정확한 모델을 세워야 하고 유도된 수리 모델은 실측자료로부터 모델 보정을 해야한다.

칼만필터는 시스템변수를 최적 추정하는 상태 추정기로서 계통의 수학적 동적 모델을 직접 이용하게 된다.

그러나 최적 칼만필터 이득을 구하는데 있어서는 계통의 동적 모델뿐만 아니라 계통상태노이즈 covariance 행렬 (Q), 측정노이즈 covariance 행렬 (R), 초기 계통상태 추정편차 covariance 행렬 (P(0)) 등을 이용하게 되는데 이들은 계통의 실측자료의 통계학적 처리로 얻어지며 주위 환경이나 물리적 현상 및 시간 경과에 따라 상당한 영향을 받게 된다.

이로써 이번 연구에는 계통 운전중에 Q, P(0)에 무관하게 출력 측정 자료를 이용실시간 칼만필터 이득을 구할 수 있는 새로운 방법을 제시한다. 이로써 측정하기 힘든 계통 변수등을 보다 용이하고 쉽게 추정할 수 있으며 이에 따른 측정기기 고장진단 및 보상 제어도 가능하게 된다.

2. 칼만필터의 수학적 표현

유도된 계통의 비선형 모델을 선형화하고 이산 형태로 나타내면

$$X(k+1) = \Phi(k+1, k)X(k) + \Theta(k)u(k) + w(k) \quad (1)$$

$$Y(k) = H(k)X(k) + v(k) \quad (2)$$

여기서 X는 상태벡터,  $\Phi$ 는 계통행렬, Y는 출력벡터, H는 출력행렬,  $\Theta$ 는 입력행렬,

u는 입력벡터, w는 계통노이즈벡터, v는 측정노이즈벡터이다.

계통상태를 추정하기 위한 칼만필터는

$$\hat{X}(k|k) = \hat{X}(k|k-1) + K(k)[Y(k) - H(k)\hat{X}(k|k-1)] \quad (3)$$

$$\hat{X}(k+1|k) = \Phi(k+1, k)\hat{X}(k|k) + \Theta(k)u(k) \quad (4)$$

로 표현되며 여기서  $\hat{X}$ 는 상태추정벡터, K(k)는 칼만필터 이득이다.

그리고 칼만필터 이득 K(k)는

$$K(k) = P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (5)$$

로 주어지며 P(k|k) 및 P(k|k-1)은 다음 관계식을 만족한다. 즉

$$P(k|k) = [I - K(k)H(k)]P(k|k-1) \quad (6)$$

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + Q(k) \quad (7)$$

여기서 P는 상태추정편차 covariance 행렬이다.

3. 방법 제시

칼만필터는 실측치와 추정치의 차이인 Innovation을 발생시킨다. 즉

$$d(k) = Y(k) - H(k)\hat{X}(k|k-1) \quad (8)$$

$$\text{여기서 } E[d(k)] = 0 \quad (9)$$

$$E[d(k)d(j)] = V(k)\delta(k, j) \quad (10)$$

을 만족하고  $\delta(k, j)$  및 V(k)는 각각

$$\delta(k, j) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \quad (11)$$

$$V(k) = H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k) \quad (12)$$

로 주어진다.

한편 식 (5)와 (12)를 이용하여

$$K(k) = H(k)^{-1}[V(k) - R(k)]V(k)^{-1} \quad (13)$$

로 유도되며  $H(k)$  가 non-singular square matrix 이고  $V(k)$  및  $R(k)$  를 구할수 있으면 칼만필터 이득을 구할수 있다.  
(여기서  $R(k)$  는 실속 자료로 부터 쉽게 구할수 있음)

4. Innovation 의 계산

이산모델식 (1) (2) (출력  $m$  개, 입력  $n$  개) 은 다음과 같이 ARMA (Auto Regressive Moving Average) 모델 형태로 나타낼수 있다.

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (14)$$

여기서  $A(z^{-1}) = I + A_1 z^{-1} + \dots + A_n z^{-n}$  (15)

$$B(z^{-1}) = z^{-d}(B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_\ell z^{-\ell}) = z^{-d} B'(z^{-1}) \quad (16)$$

이다.

(14)식을  $d$ - 단계 앞선 출력 형태로 다시 표현하면

$$y(k+d) = \alpha(z^{-1})y(k) + \beta(z^{-1})u(k) \quad (17)$$

으로 되며  $\alpha, \beta$  는 각각

$$\alpha(z^{-1}) = G(z^{-1}) \quad (18)$$

$$\beta(z^{-1}) = F(z^{-1})B'(z^{-1}) \quad (19)$$

이다.

그리고  $G(z^{-1})$  과  $F(z^{-1})$  은 다음을 만족한다.

$$z^{-1}G(z^{-1}) = F(z^{-1})A(z^{-1}) + G(z^{-1}) \quad (20)$$

$$F(z^{-1}) = I + F_1 z^{-1} + \dots + F_d z^{-d} \quad (21)$$

$$G(z^{-1}) = G_0 + G_1 z^{-1} + \dots + G_{n-1} z^{-n+1} \quad (22)$$

$$F_0 = I \quad (23)$$

$$F_i = -\sum_{j=1}^{i-1} F_j A_{i-j}; \quad i=1, \dots, d-1 \quad (24)$$

$$G_i = -\sum_{j=0}^{d-i} F_j A_{i+d-j}; \quad i=0, \dots, n-1 \quad (25)$$

한편 (16) 식은

$$y(k+d) = \theta_0^T \phi(k) \quad (26)$$

로 표현할수 있고

$$\phi^T(k) = (y^T(k), \dots, y^T(k-n+1), u^T(k), \dots, u^T(k-d+1)) \quad (27)$$

$\theta_0^T$  는  $\alpha(z^{-1})$  과  $\beta(z^{-1})$  행렬의 구성 변수 행렬이다.

그리고 식 (26)을  $d$ - 단계 앞선 추정 방정식

$$\hat{y}(k+d, \theta) = \theta^T \phi(k) \quad (28)$$

을 가정할수 있고  $\theta_0$  를 모르는 상태에

$$\hat{y}(k+d, \theta) \cong y(k+d) \quad (29)$$

가 되도록  $\theta$  값을 택해야 하는데 이에 필요한 알고리즘은 다음과 같다.

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{a(k)P(k-d-1)\phi(k-d)}{\lambda(k) + a(k)\phi^T(k-d)P(k-d-1)\phi(k-d)} \times [y(k) - \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k-1)] \quad (30)$$

$$P(k-d) = \lambda^{-1}(k) \left[ P(k-d-1) - \frac{P(k-d-1)\phi(k-d)\phi^T(k-d)P(k-d-1)}{\lambda(k) + a(k)\phi^T(k-d)P(k-d-1)\phi(k-d)} \right] \quad (31)$$

$$\lambda(k) = \lambda_0 \lambda(k-1) + (1 - \lambda_0) \quad (32)$$

$$\lambda_0 = 0.99; \quad \lambda(0) = 0.95 \quad (33)$$

$$P(0) = \epsilon I; \quad P(-1) = P(0) \quad (34)$$

$$\epsilon = \frac{10}{N+1} \sum_{i=1}^N y^2(i) \quad (35)$$

$$\hat{\theta}(0) = 0 \quad (36)$$

이렇게 해서 Innovation  $d(k)$  는

$$d(k) = y(k) - \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k-1) \quad (37)$$

로 구해지며 변수행렬  $\hat{\theta}$  가 충분히 추정된 상태에서  $V(k)$  를 구할수 있어 칼만필터 이득  $K(k)$  는  $Q$  와  $P$  에 무관하게 구할수 있다.

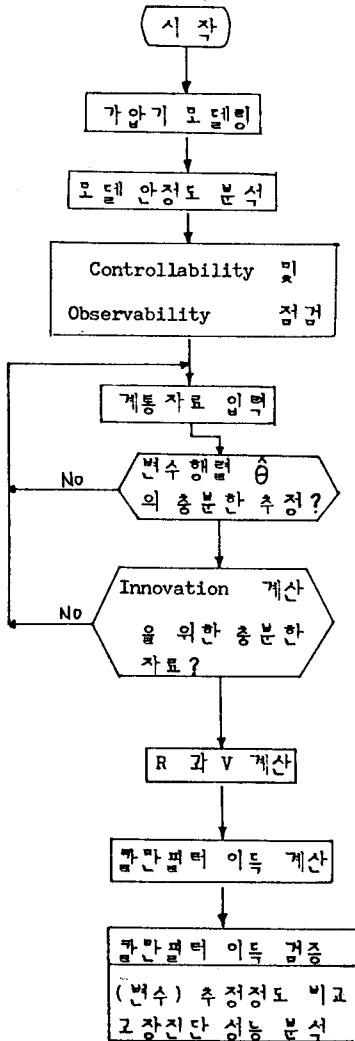
5. 원자력 발전소 가압기에의 적용

원자력 발전소 임차축의 압력을 조절하는 가압기를 대상 계통으로 하고 여기에 질량 및 에너지 밸런스식으로 부터 비선형 모델을 유도하고 정상 운전 상태점을 중심으로 선형화시킨 다음 이산 모델을 식 (1) (2) 와 같은 동적 모델을 완성시킨 다음 모델 보정을 한다.

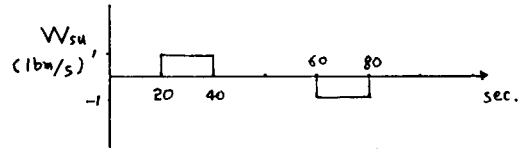
식 (1) (2) 의 각 변수 및 행렬값들은 부록에 소개한다.

이렇게 하여 구한 동적모델과 LOFT (Loss of Flow Test) 원자로 출력 자료로 부터 구한 측정노이즈 covariance 행렬  $R$ , 앞에서 제시한 방법을 이용 칼만필터 이득을 구하여 실제 모델의 추정 정도를 검증하고 실제 압력 측정기기 고장 발생시 예고장 검출능력을 알아 보았다.

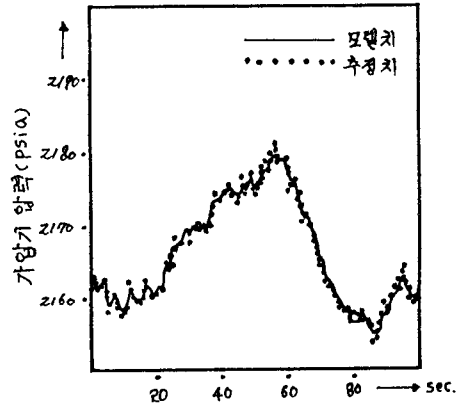
전체적인 흐름도를 나타내면



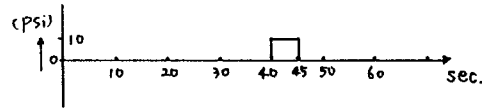
covariance 행렬에 무관하게 계통 입력 출력자료로부터 칼만 필터 이득을 구할 수 있는 방법을 보여 주었다.



(그림 1의 모델 검증을 위한  $W_{su}$  량)



(그림 1. 모델치 및 추정치)



(그림 2의 압력 측정기기 고장치)

6. 결과 및 검토

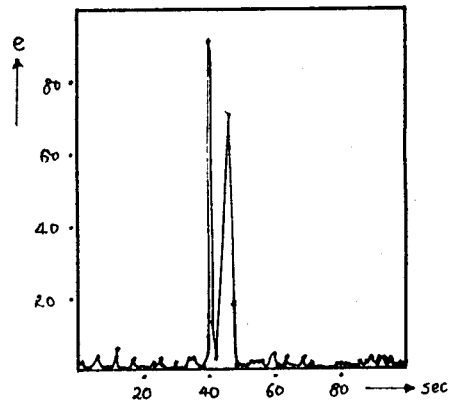
그림 1은 위에서 제시한 방법으로 구한 칼만 필터 이득을 이용 모델변수 추정정도를 나타낸다.

실선은 모델에서 발생된 값이고 점선은 추정된 값이다.

그리고 그림 2는 압력 측정기기에 40-45 초간 + 10 PSI 계단 형태의 고장을 주었을시 고장진단 정도를 나타내는 것으로 고장 판정 기준 ( $e$ )을 출력 노이즈와 변수 추정 편차를 곱하여  $e=6$ 으로 했을 때 40초에서  $e=91$ 로

그림에서 보는 바와 같이 고장진단도 잡수행함을 보여준다.

이상과 같이 새로이 제시된 방법으로 상태 노이즈 covariance 행렬과 초기계통상태 추정편차



(그림 2. 압력 측정기기 고장진단)

참 고 문 헌

1. A. GELB, Ed., Applied Optimal Estimation, MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1974).
2. A. P. SAGE and J. L. MELSA, Estimation Theory with Applications to Communication and Control, R. E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York (1979).
3. G. F. Franklin and J.D.Powell Digital Control of Dynamic Systems, Addison - Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Massachusetts (1980).
4. G. C. Goodwin and K. S. Sin, Adaptive Filtering Prediction and Control, 1984.
5. J. L. Tylee, "A Generalized Likelihood Ratio Approach to Detecting and Identifying Failures in pressurizer Instrumentation," Nucl. Technol., 56, 484 (1982).

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.24 \times 10^{-3} & 0.9512 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 4.29 \times 10^{-7} & -3.58 \times 10^{-4} & 1.07 \times 10^{-4} \\ 1.01 \times 10^{-2} & -0.72 & -5.19 \\ 1.65 \times 10^{-5} & -1.18 \times 10^3 & -8.48 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -194.3 & 0.01507 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

4. 계통 상태 노이즈 covariance 행렬 Q

$$Q = \begin{bmatrix} 2.3 \times 10^{-8} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.15 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

5. 계산된 정상상태 측정노이즈 covariance R Innovation 행렬 V 및 칼만 필터 이득 K

$$R = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.3202 \times 10^{-1} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.555 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7999 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.4745 \times 10^{-2} & 0.4721 \times 10^{-4} & 0.0 \\ 0.0 & 0.6087 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2177 \end{bmatrix}$$

부 록

1. 가압기 모델 정상운전 상태점

$$\bar{x} = [\bar{x}_p \quad \bar{p}_p \quad \bar{T}_{pm}]^T = \begin{bmatrix} 0.0959 & (-) \\ 226.0 & \text{cPsi} \\ 647.4 & \text{c}^\circ\text{F} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = [\bar{Q}_{ht} \quad \bar{W}_{sp} \quad \bar{W}_{rv}]^T = \begin{bmatrix} 0.0 & (\text{Btu/s}) \\ 0.0 & (\text{lbm/s}) \\ 0.0 & (\text{lbm/s}) \end{bmatrix}$$

$d'$  = Disturbance

$$d' = \theta' W_{su} \quad ; \quad \theta' = [-2.927 \times 10^{-4} \quad 0.818]$$

$$\bar{y} = [\bar{L}_p \quad \bar{p}_p \quad \bar{T}_{pm}]^T = \begin{bmatrix} 41.9 & (\text{cm}) & 1.336 \times 10^{-3} \\ 2159.2 & (\text{cPsi}) & \\ 647.6 & (\text{c}^\circ\text{F}) & \end{bmatrix}$$

2. 모델의 고유치  $\lambda_i$  및 고유벡터 Z

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.05 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0664 \end{bmatrix}$$

3. 이산 모델 시스템 행렬  $\Phi$  및 입력벡터  $\Theta$  및 출력벡터 H

- \*  $x_p$  : Quality
- $p_p$  : 압력 (Psi)
- $T_{pm}$  : 온도 ( $^\circ\text{F}$ )
- $W_{su}$  : Surge 량 (lbm/s)
- $Q_{ht}$  : Heatre 량 (Btu/s)
- $W_{sp}$  : Spray 량 (lbm/s)
- $W_{rv}$  : Relief Valve 량 (lbm/s)
- $L_p$  : 수위 (cm.)