슬 라 이 딩 모 드 를 이 용 한 대 규 모 계 통 의 제 어

전 희 영. 박 귀 태. 곽 군 평*. 김 동 식. 임 형 용
고려대학교 공과대학 전기공학과

The Control of Large Scale System by Sliding Mode

Chun Hee Young:Park Gwi Tae:Kuo Chun Ping*:Kim Dong Sik
Im Hyeong Yong
Dept.of Electrical Eng. Korea Univ.

ABSTRACT

This paper describes a new method for control of large-scale system by sliding mode. The concepts of control to large-scale system on the basis of VSS(Variable Structure System) control theory are used to decompose a large control problem into a two-level algorithm such that each subsystem is stabilized with local discontinuous controllers and higher level corrective control is designed to take into account the effect of interaction among the subsystems.

In this paper, we show that each subsystem is controlled with repect to local continuous and higher level corrective control. This algorithm can be easily applied to multivariable control systems and obtained a continuous control in comparison with variable structure control systems. Two numerical examples are discussed as illustrations.

1. 서 론

최근 몇 년 동안 가변구조계(Variable Structure System: VSS)이론에 근거하여 스칼라계통 뿐 만 아니라 다변수계통에 대해 많은 연구가 수행되어 있다.(1)(2)

이 제어기법의 특징은 상태공간에서 스위칭 평면(Switching Hyperplane)에서 계통의 구조를 변화시킴으로써 슬라이딩 모드(Sliding Mode)라는 독특한 동태를 얻어내는 것이다.

이 슬라이딩 모드내에서 가변구조계의 동지은 스위칭 평면을 결정하는 표면행렬에만 의존하며, 계통의 파라미터 변동이나 외란에 대하여 거의 영향을 받지 않으며 오-버슈트없이 빠른 과도응답을 나타내게 된다. 또한 이 방법은 계통의 파라미터가 변화하는 전 범위를 알 필요가 없으며 단지 파라미터의 경계값만을 알면 되기 때문에 제어기의 설계가 매우 용이하다.(3)

최근에 와서 대규모 계통을 VSS 이론에 의해 계층제어하는 방법에 관한 연구가 이루어졌으나(4), 계통의 수렴특성이 좋지 못한 단점을 지니고 있고 또한 계통의 차수가 큰경우는 많은 스위칭 이득을 구해야되는 어려움이 있다.

따라서, 본 논문에서는 이러한 단점을 제거하기 위해 기존의 가변구조제어 이론과는 달리, 연속치 제어입력에 의해 슬라이딩 모드를 발생시켜 대규모계통을 제어하는 새로운 알고리즘을 제시하고자 한다. 그리고, 이를 수치예에 적용하여 본 논문에서 제안한 알고리즘의 유효성을 입증하고자 한다.

2. 기존의 가변구조제어 이론(알고리즘 1)

다음과 같이 주어진 선형 시불변 대규모 계통을 생각하자.

$$\dot{X} = AX + BU \tag{1}$$

여기서 $X \in R^n$, $U \in R^m$은 각각 상태와 입력벡터이다.

단일 입력인 경우는 계통을 입력분신형(5)으로 변환할 필요가 없으나, 다변수 계통인 경우는 계통에 VSS이론을 적용하려면 스위칭 이득을 구하기 위해 계통을 입력분신형으로 변환시켜야 한다.

(1)식과 같은 계통이 가제어(Controllable)하다고 가정하면 상태공간의 기저벡터(Basis Vector)를 다음과같이 변환할 수있다.

(2)식을 (1)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$x = T\tilde{x} \tag{2}$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \tag{3}$$

여기서 $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$

행렬 $\tilde{A}$는 m개의 대각블록을 가지며 그 각각의 블록은 위상표준형이다.

행렬 $\tilde{B}$는 m개의 대각블록들을 가지며 이러한 블록들은 오직 첫째 요소들만 값을 가진다.

식(3)은 다음과 같이 m개의 단일 입력을 같는 계통으로 분해할 수 있다고 가정한다.

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_i\tilde{x}_i + \tilde{B}_iu_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m}\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{4}$$

여기서 $\tilde{X} \in R^{n_i}$이고 $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i)$는 가제어쌍이다.

2중(Two-Level)설계 방법에의해 각각의 부계통을 안정화 시키는 부계통 레벨에서의 국부스위칭 제어기(Local Switching Controller)와 상호작용을 고려한 상위조정기(Second Level Corrective Controller)를 구할 수 있다.

i번째 스위칭 평면이 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$S_i = C_i\tilde{x}_i \tag{5}$$

여기서 S_i는 스위칭 평면이고 C_i는 스위칭 표면행렬이다.

슬라이딩 모드가 일어나기 위한 필요충분조건은 아래와 같다.

$$\lim_{s_i \to 0} s_i \dot{s}_i < 0 \tag{6}$$

식(6)에 의해 불연속 제어입력 u_i는 아래와 같다.

$$u_i > -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\left(\tilde{A}_i\tilde{x}_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j\right) \quad S_i < 0$$
$$< -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\left(\tilde{A}_i\tilde{x}_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j\right) \quad S_i > 0 \tag{7}$$

u_i는 다음과 같이 국부 제어입력 u_{il}와 조정 제어입력 u_{ic}로 분해될 수 있다.

$$u_i = u_{il} + u_{ic} \tag{8}$$

여기서

$$u_{il} > -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\tilde{A}_i\tilde{x}_i \quad S_i < 0$$
$$< -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\tilde{A}_i\tilde{x}_i \quad S_i > 0 \tag{9}$$

$$u_{ic} > -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j \quad S_i < 0$$
$$< -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j \quad S_i > 0 \tag{10}$$

2.1 국부제어기(Local Controller)의 설계

식(9)에 대해 다음을 고려하면

$$u_{il} = -\psi_i\tilde{x}_i \tag{11}$$

스위칭 이득 ψ_i는 다음과 같이 정해진다.

$$\psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \tilde{x}_i S_i > 0 \\ \beta_i & \tilde{x}_i S_i < 0 \end{cases} \tag{12}$$

여기서

$$\alpha_i > (C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\tilde{A}_i$$
$$\beta_i < (C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\tilde{A}_i$$

2.2 조정기(Corretive Controller)의 설계

(13)식과 같이 나타내어지는 u_{ic}의 스위칭 이득 ϕ_{ij}는 (14)식과 같이 얻어진다.

$$u_{ic} = -\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\phi_{ij}\tilde{x}_j \tag{13}$$

$$\phi_{ij} = \begin{cases} \gamma_{ij} & \tilde{x}_j S_i > 0 \\ \rho_{ij} & \tilde{x}_j S_i < 0 \end{cases} \tag{14}$$

여기서

$$\gamma_{ij} > (C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\tilde{A}_{ij}$$
$$\rho_{ij} < (C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\tilde{A}_{ij}$$

계통을 가변구조제어할 때 상태의 슬라이딩 모드를 Fig. 1에 나타내었다.
본 알고리즘에 대한 블록선도를 Fig. 2에 나타냈다.

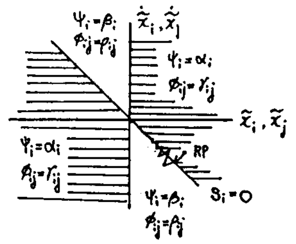

Fig. 1 Sliding Mode in a Large Scale System by VSS theory

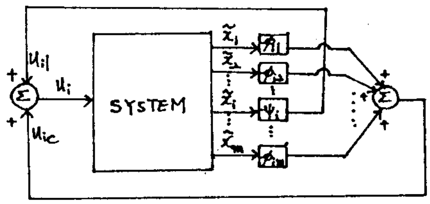

Fig. 2 Block Diagram of i-th Sub system by VSS Control theory

3. 제한된 연속시 제어입력에 의한 대규모 계통의 제어(알고리즘 II)

식(1)과 같은 선형 시불변 다변수계통에 대해 생각하자. (4)식의 양변에 C_i를 곱하면 다음과 같다.

$$C_i\dot{\tilde{x}}_i = C_i\tilde{A}_i\tilde{x}_i + C_i\tilde{B}_i u_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}C_i\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{15}$$

윗식을 제어입력 u_i에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$u_i = -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}\left(C_i\tilde{A}_i\tilde{x}_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}C_i\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j - C_i\dot{\tilde{x}}_i\right) \tag{16}$$

윗식에서 $\dot{S}_i = C_i\dot{\tilde{x}}_i$ 이므로 슬라이딩 모드 존재조건인 식(6)에 의해 $\dot{S}_i$와 S_i는 부호가 반대이고 미소량 α_i를 양의 상수라 하면 항등적으로 다음식이 성립한다.

$$\dot{S}_i = -\alpha_i S_i \tag{17}$$

윗 식을 식(16)에 대입하면 다음이 성립한다.

$$u_i = -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}\left(C_i\tilde{A}_i\tilde{x}_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}C_i\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j + \alpha_i S_i\right)$$
$$= K_i\tilde{x}_i + K_{ij}\tilde{x}_j + L_i S_i$$
$$= u_{i\,eq} + L_i S_i \tag{18}$$

여기서

$$K_i = -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\tilde{A}_i$$
$$K_{ij} = -\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}(C_i\tilde{B}_i)^{-1}C_i\tilde{A}_{ij}$$
$$L_i = -(C_i\tilde{B}_i)^{-1}\alpha_i$$

윗식에서 u_{ie}는 u_i에 대한 등가제어입력을 나타낸다. Fig. 3은 연속치제어입력에 의한 상태의 슬라이딩 모드를 나타낸다.
본 알고리즘에 대한 블럭선도를 Fig. 4에 나타내었다.

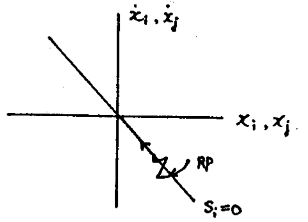

Fig. 3 Sliding Mode in a Large Scale System by Continuous Control

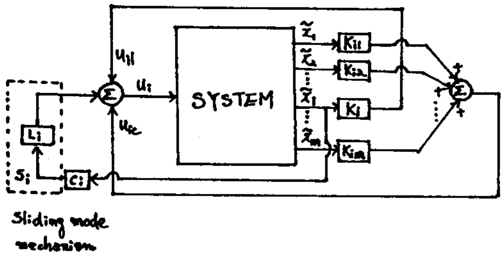

Fig. 4 Block Diagram of i-th Subsystem by Sliding Mode

4. 수치예및 검토

4.1 스칼라 시스템

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6 & -9.22 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -33.32 & -11.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$$

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

4.1.1 알고리즘 I에 의한 제어

부계통 1, 2에 대해 슬라이딩 표면행렬 C_1, C_2를 선정하면 스위칭 평면 S_1, S_2는 다음과 같이 표현된다.

$$C_1 = [10 \;\; 20], \quad S_1 = C_1 x_1$$
$$C_2 = [15 \;\; 30], \quad S_2 = C_2 x_2$$

부계통 1, 2에 대해 상태벡터 X1, X2를 다음과 같이 정의하면

X1 = [x11 x12]
X2 = [x21 x22]

가변제어입력 u1, u2는 다음과 같이 구해진다.

$$u_1 = -[\psi_{11} \;\; \psi_{12}]x_1 - [\phi_{11} \;\; \phi_{12}]x_2$$
$$u_2 = -[\phi_{21} \;\; \phi_{22}]x_1 - [\psi_{21} \;\; \psi_{22}]x_2$$

여기서 스위칭 이득은 다음과 같다.

$\psi_{11} > -0.6$	$x_{11}S_1 > 0$	$\psi_{11} < -0.6$	$x_{11}S_1 < 0$
$\psi_{12} > -8.72$	$x_{12}S_1 > 0$	$\psi_{12} < -8.72$	$x_{12}S_1 < 0$
$\phi_{11} > -33.32$	$x_{21}S_1 > 0$	$\phi_{11} < -33.32$	$x_{21}S_1 < 0$
$\phi_{12} > -11.3$	$x_{22}S_1 > 0$	$\phi_{12} < -11.3$	$x_{22}S_1 < 0$
$\psi_{21} > 1$	$x_{21}S_2 > 0$	$\psi_{21} < 1$	$x_{21}S_2 < 0$
$\psi_{22} > 0.5$	$x_{22}S_2 > 0$	$\psi_{22} < 0.5$	$x_{22}S_2 < 0$
$\phi_{21} > 0$	$x_{11}S_2 > 0$	$\phi_{21} < 0$	$x_{11}S_2 < 0$
$\phi_{22} > 0$	$x_{12}S_2 > 0$	$\phi_{22} < 0$	$x_{12}S_2 < 0$

4.1.2 알고리즘 II에 의한 제어

4.1.1에서와 같이 정의된 스위칭 평면에 의해 새로운 연속치 제어입력은 다음과 같이 주어진다.

$$u_1 = K_1 x_1 + K_{12} x_2 + L_1 S_1$$
$$u_2 = K_2 x_2 + K_{21} x_1 + L_2 S_2$$

여기서

$$K_1 = [0.6 \;\; 8.72]$$
$$K_2 = [-1 \;\; -0.5]$$
$$K_{12} = [33.32 \;\; 11.3]$$
$$K_{21} = 0$$
$$L_1 = -1.25, \quad L_2 = -0.667$$
$$\alpha_1 = 25, \quad \alpha_2 = 20$$

이상의 수치를 이용하여 디지털 컴퓨터 시뮬레이션을한 결과, 상태와 제어입력을 아래 그림에 나타내었다.

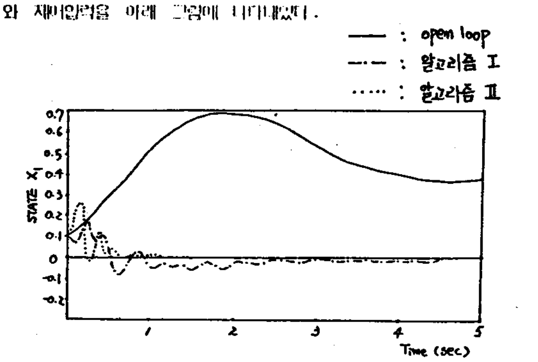

Fig. 5 State Trajectory of X1 by VSS Control

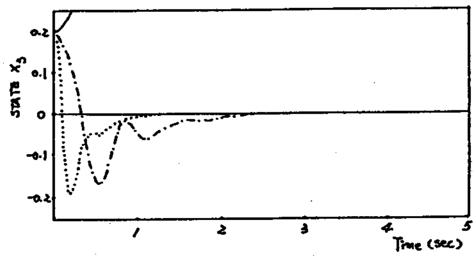

Fig. 6 State Trajectory of X3 by VSS Control

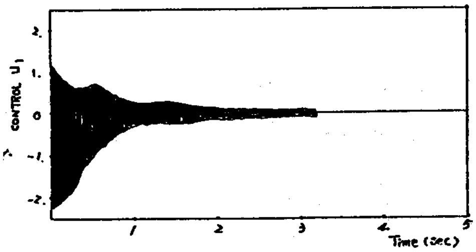

Fig. 7 Discontinuous Control Input U1 by VSS theory

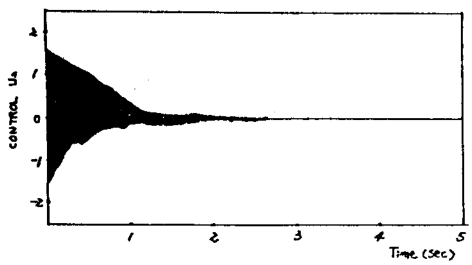

Fig. 8 Discontinuous Control Input U2 by VSS theory

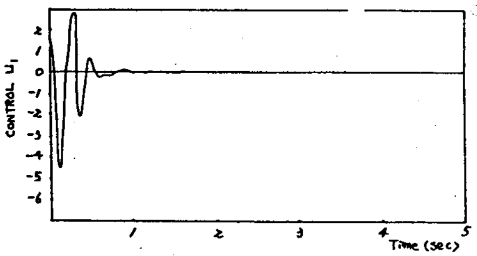

Fig. 9 Continuous Control Input U1 by Sliding Mode

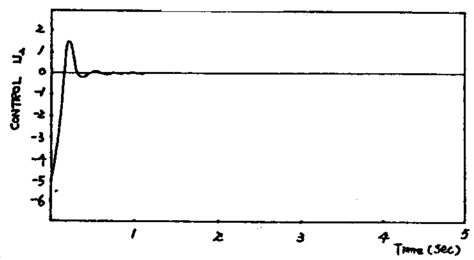

Fig. 10 Continuous Control Input U2 by Sliding Mode

본 계통은 고유치가 −0.066, −9.154, 1, 1인 불안정한 계통이다. Fig. 5 · Fig. 6에서 나타냈듯이 알고리즘 I I에 의한 연속치 제어입력으로 계통을 제어한 경우 상태가 알고리즘 I의 경우보다 더 빠른 수렴특성을 나타낸다.

또한, Fig. 7, Fig. 8은 계통에 가변구조이론을 적용하였을 때의 불연속치 제어입력을 나타낸 것이고 Fig. 9, Fig. 10는 알고리즘 I I에 의한 연속치 제어입력을 나타낸 것이다.

4.2 다변수 계통

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\-2&3\\0&1\end{bmatrix}u$$

위 계통을 상태공간의 기저벡터를 적당히 선정하여 입력분산형으로 변환하면 다음과 같다.

$$\dot{\tilde{x}}=\left[\begin{array}{cc|cc}0&-3&0&3\\1&0&0&1\\\hline 0&-2&0&2\\0&1&1&1\end{array}\right]\tilde{x}+\left[\begin{array}{c|c}1&0\\0&0\\\hline 0&1\\0&0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}u_1\\\hline u_2\end{array}\right]$$

여기서 변환행렬 T는 아래와 같다.

$$T=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\-2&0&3&0\\0&-2&1&3\end{bmatrix}$$

4.2.1 알고리즘 I에 의한 제어

부계통 1, 2에 대해 슬라이딩 표면 행렬 C_1, C_2를 다음과 같이 선정하면 스위칭 평면 S_1, S_2는 아래와 같이 나타난다.

$$C1=[10\ \ 15],\quad s_1=C_1x_1$$
$$C2=[15\ \ 30],\quad s_2=C_2x_2$$

여기서 상태벡터 X1, X2와 제어입력 u1, u2를 4.1.1과 같이 정하여 스위칭 이득값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{llll}
\psi_{11}>2 & x_{11}s_1>0 & \psi_{11}<2 & x_{11}s_1<0\\
\psi_{12}>-3 & x_{12}s_1>0 & \psi_{12}<-3 & x_{12}s_1<0\\
\phi_{11}>0 & x_{21}s_1>0 & \phi_{11}<0 & x_{21}s_1<0\\
\phi_{12}>5 & x_{22}s_1>0 & \phi_{12}<5 & x_{22}s_1<0\\
\psi_{21}>2 & x_{21}s_2>0 & \psi_{21}<2 & x_{21}s_2<0\\
\psi_{22}>2 & x_{22}s_2>0 & \psi_{22}<2 & x_{22}s_2<0\\
\phi_{21}>0 & x_{11}s_2>0 & \phi_{21}<0 & x_{11}s_2<0\\
\phi_{22}>0 & x_{12}s_2>0 & \phi_{22}<0 & x_{12}s_2<0
\end{array}$$

4.2.2 알고리즘 I I에 의한 제어

4.2.1에서와 같이 정의된 스위칭 평면에 대해 4.1.2와 같이 연속치 제어입력을 정의하면 K1, K2, K12, K21, L_1, L_2는 다음과 같은 값을 가진다.

$$K_1=[-2\ \ 3]$$
$$K_2=[-2\ \ -2]$$
$$K_{12}=[0\ \ -5]$$
$$K_{21}=0$$
$$L_1=-2.5,\quad L_2=-1.667$$
$$\alpha_1=25,\quad \alpha_2=25$$

이상의 수치를 이용하여 디지털 컴퓨터 시뮬레이션을 한 결과, 상태와 제어입력을 아래 그림에 나타내었다.

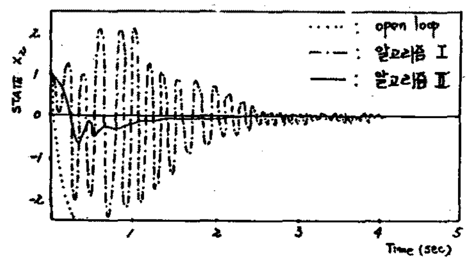

Fig.11 State Trajectory of X2 by VSS theory

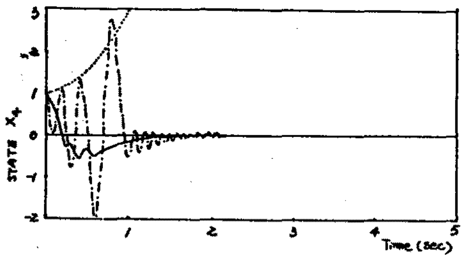

Fig.12 State Trajectory of X4 by VSS theory

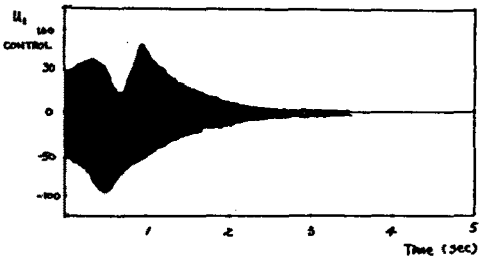

Fig.13 Discontinuous Control Input U1 by VSS theory

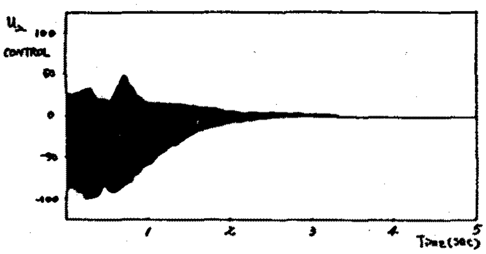

Fig.14 Discontinuous Control Input U2 by VSS theory

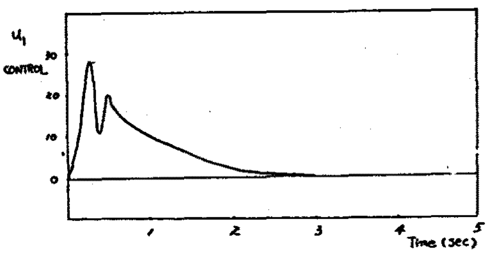

Fig.15 Continuous Control Input U1 by Sliding Mode

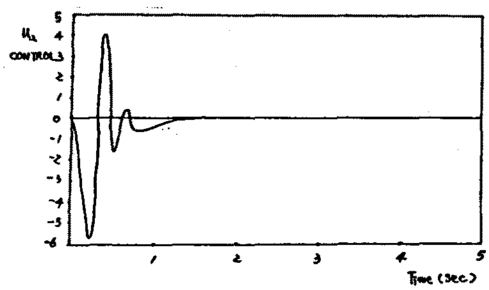

Fig.16 Continuous Control Input U2 by Sliding Mode

본 계통은 고유치가 -0.5+j0.866, -0.5-j0.866, 1,0인 불안정한 계통이다.

Fig.11-Fig.12에서 나타났듯이 다변수계통인 경우에도 불연속치 제어입력을 계통에 가하는 것보다 연속치 제어입력을 계통에 가하는 것이 상태의 수렴특성이 더욱 좋다.

Fig.13, Fig.14는 가변구조제어이론에 근거를 둔 불연속치 제어입력을 나타낸 것이고, Fig.15, Fig.16은 알고리즘 II를 다변수 계통에 적용하였을 때 각각의 부계통에서의 연속치 제어입력을 나타낸 것이다.

5. 결론

슬라이딩 모드를 이용한 연속치 제어입력을 대규모 계통에 적용함으로써, 종래의 가변구조제어이론에 의한 불연속치 제어입력과 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 논문에서 제안한 알고리즘 II에 의해 대규모 계통을 제어한 경우, 종래의 가변구조제어이론을 사용했을 때 보다 더 좋은 수렴특성을 얻었다.

(2) 계통의 차수가 큰 경우 제어입력의 스위칭 [illegible] 필요가 없다.

(3) 알고리즘 II는 제어입력의 설계 인자(Design Factor)들을 변화시킴으로써 상태의 수렴특성을 향상시킬 수 있다.

(4) 본 논문에서 제안한 알고리즘 II를 다변수 계통에 적용할 경우 계통을 입력정준형으로 변환하지 않아도 된다.

6. 참고문헌

1) V.I.Utkin, "Variable Structure System: Present and Future.", survey, Avtomatica: Telemekhanica, No.9, pp5-25, 1983

2) K.K.D.Young, "Design of Variable Structure Model-Following Control System." IEEE TRANS.AUTOMAT.Contr., vol. AC-23, pp1079-1085, 1978

3) U.Itkis, "Control System of Variable Structure.", New York: Wiley, 1976.

4) H.Khurana, S.I.Ahson, S.S.Lamba, "On Stabilization of Large-Scale Control Systems Using Variable Structure System Theory." IEEE TRANS.Automat.Contr., vol.AC-31, pp176-178

5) D.G.Luenberger, "Canonical Forms for Linear Multivariable Systems." IEEE Trans.AUTOMAT.CONTR., vol.AC-12, 1967