

다면체기법에 의한 입체의 체적
 체적 및 표면적 측정

우 광 방, 진 영 민, 박 상 온
 (연세 대학교 대학원 전기공학과)

The Measurement of the Volume and
 Surface Area of an Object
 based on Polyhedral Method

Kwang-Bang Woo, Young-Min Chin, Sang-On Park
 (Department of Electrical Eng., Graduate School of Yonsei University)

ABSTRACT

In this paper, an efficient algorithm to estimate the volume and surface area and the reconstruction algorithm for 3-dimensional graphics are presented.

The graph theory is used to estimate the optimal quantitative factors. To improve the computing efficiency, the algorithm to get proper contour points is performed by applying several tolerances. The search and the given arc cost is limited according to the change of curvature of the cross-sectional contour.

For mathematical model, these algorithms for volume estimation based on polyhedral approximation are applied to the selected optimal surface. The results show that the values of the volume and surface area for tolerances 1.0005, 1.001 and 1.002 approximate to values for tolerances 1.000 resulting in small errors.

The reconstructed three-dimensional images are sparse and consist of larger triangular tiles between two cross sections as tolerance is increasing.

1 서론

2 그래프 구성

입체의 체적 및 표면적 그리고 3차원영상은 입체 해석에 있어서 기본적인 정량화 요인이다.

기존에 제시된 입체해석 알고리즘들은 입체의 표면형태나 특성을 크게 고려하지 않았다. 입체 표면의 형태에 따라 컴퓨터 해석의 효율성을 제공하기 위해 본 논문에서는 그래프 구성에 불필요한 경계점을 줄임으로써 적당한 경계점만을 얻기위한 알고리즘을 제시하였으며 이 정보로부터 그래프를 구성하였고 이로부터 최적경로 탐색을 위해 입체 표면의 특성을 고려하여 경로탐색 횟수를 감소시켰다.

얻어진 최적경로와 각 경계점 선정 허용치에 대하여 다면체 기법에 근거한 벡터기법을 이용하여 체적과 표면적을 구하였으며 일련의 횡단면으로 구성된 입체의 정보로부터 삼각형으로 구성된 3차원 영상을 재구성하였다.

1) 경계점 선택.

입체의 한 단면의 경계점을 선정하는 방법에 따라 재구성된 입체는 원래의 입체와 많은 차이를 보이게된다. 경계점을 많이 취할수록 정량화 요인은 정확해 지지만 경로 탐색횟수나 가중치 계산 시간은 지수함수적으로 증가하고, 또한 컴퓨터 해석을 수행할때 많은 정보를 저장 하기위한 기억 장소가 필요하다. 이러한 단점을 보완 하기위해 적정한 경계점을 선정해야 한다. 한 횡단면에 대해 연속된 3개의 점을 P, Q, R 이라하자 (그림 2-1). 그러면

$$T = \frac{PQ + QR}{PR} = 1$$

이된다.

한 직선위에 세점이 있으면 이 비는 1 이된다. 따라서

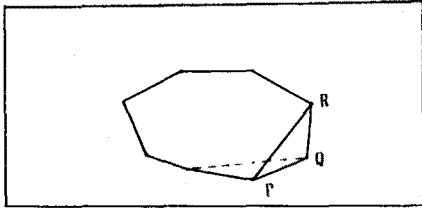


그림 2-1 한 횡단면의 경계점 사이의 관계

직선에 가까운 부분, 즉, 이 비가 1에 가까운 중간점은 경계점으로 부터 삭제해도 크게 영향을 받지 않는다. 본 논문에서는 적당한 경계점 선정 허용치 (1.0005 - 1.005)를 가지고 수행 하였다.

2) 입체의 부분 근사를 위한 몇가지 제한 과

그래프 이론 도입

두 횡단면사이의 부분 근사를 위한 문제는 아래와 같다. 위쪽 횡단면을 P라 하고 n개의 경계점으로 구성된다고 하면 n개의 점들은 P0, P1, ..., Pm-1으로 표시할 수 있다. 또한, 아래쪽 횡단면을 Q라하고 n개의 경계점으로 구성된다고 하면 이 n개의 점들은 Q0, Q1, ..., Qn-1으로 표시할 수 있다. 각 횡단면이 부분 연속인 테곡선으로 구성된다고하면, P0는 Pm-1다음에, Q0는 Qn-1다음에 온다. 이때, 각 점들은 반 시계방향으로 정렬되어 있다고 가정한다. 입체의 정량화 요인을 구하고 재구성 하는 문제는 P 와 Q 사이의 경계점을 정점으로 하는 삼각형을 구하여 해결된다. 각 삼각형은 (Pi, Pk, Qj) 또는 (Qi, Qk, Pj) 형태의 3개의 다른 요소로 구성된다. 즉, 이들 삼각형은 하나의 경계선분(contour segment)과 두 변으로 구성되는데, 이들 두 변은 한 횡단면의 경계점에 공통점을 갖고 다른 횡단면의 경계선분의 양 정점에 연결된다.

이상과 같은 방법으로 두 횡단면 사이에 정의될 수 있는 삼각형의 수는 무척 많다. 따라서 문제를 축소하여 가장 적합한 삼각형을 선택하기위하여 다음의 두가지 조건을 만족하는 삼각형의 집합을 구한다.

첫째, 각각의 경계선분은 삼각형을 구성하는 집합중에서 하나의 삼각형에만 존재 한다.

둘째, 삼각형의 집합에서 두 횡단면을 잇는 한변이 한 삼각형의 좌변이면 그변은 반드시 다른 삼각형의 우변으로 나타난다.

가장 적합한 표면을 이루는 삼각형의 집합을 구하기 위해 그래프 문제로 변환한다.

다음과 같이 그래프를 정의하자.

$G = \langle V, A \rangle : V$ - 정점(vertex), A - 아크(arc)

$V = \{ Vij \mid i=0, 1, \dots, m-1; j = 0, 1, \dots, n-1 \}$

$A = \{ \langle Vki, Vst \rangle \mid (s=k \text{ and } t=l+1) \text{ or } (s=k+1 \text{ and } t=l) \}$

본 논문에서 정점의 집합은 인접한 두 횡단면의 경계점을 연결한 모든변의 집합이고 아크(arc)의 집합은 두 횡단면 사이에서 구성될 수 있는 모든 가능한 삼각형의 집합이다. 그러면 앞의 두 조건은 다음과 같이 표현될 수 있다.

첫째, 모든 인접 행 사이에는 하나의 수직아크만 존재하고 인접 열 사이에는 하나의 수평아크만 존재한다.

둘째, 그래프의 모든 정점들에 대해 $\text{indegree}(Vij) = \text{outdegree}(Vij) = 0$ 이거나, $\text{indegree}(Vij) > 0$ 이고 $\text{outdegree}(Vij) > 0$ 이다.

3) 아크 가중치 제공

구성된 그래프로부터 선정된 삼각형의 집합을 가용면이라 하며 이 가용면들중에서 최적표면을 구성하는 가용면을 선정 해야한다. 가용면 집합 중에서 가용개직을 선의하는 동안 만나는 각 아크의 가중치 합이 적당하다고 생각되면 그 개직을 최적 표면으로 선정한다. 컴퓨터 해석의 효율성을 위해 본 논문에서는 구성된 그래프가 방향성 그래프이므로 이의 특성을 이용하여 다음과 같이 가중치 제공정도를 제한한다.

먼저 횡단면 P의 첫번째 경계점 P1과 Q의 모든 경계점 사이의 거리 계산을 수행하고 가장 작은 값을 갖는 Q의 경계점 Qj를 찾는다. P1과 P2 사이의 경계 선분은 2)의 조건 조건으로부터 반드시 하나의 삼각형을 구성하는 요소 이어야 하므로 경계선분이 구성하는 삼각형의 다른 하나의 정점은 반드시 Q에 존재한다. 따라서 횡단면의 곡률변화의 정도에 따라 계산될 Q점들을 적절히 선정할 수 있다.

4) 최적경로 탐색

가중치가 각 아크에 할당 됨으로써 완성된 그래프로 부터 최적경로로 선택되는 가용 개직을 찾아야 한다.

최적경로는 다음과 같이 정의한다. '두 횡단면 사이에 구성되는 삼각형은 그래프에서 두 정점을 잇는 아크로 표

현 되는데 3)의 제한된 방법으로 각 아크에 가중치가 제공된다. 가중치는 두 횡단면 사이에서 구성되는 삼각형에서 서로다른 횡단면의 경계점을 잇는 두 변의 길이의 합으로 제공된다. 최적 경로는 선정된 경로의 각 아크의 가중치 합이 가장 적은 경로로 정의한다.*

이를 위해 비순환 그래프 G'을 다음과 같이 정의하고 G를 G'으로 대체하자.

$$G' = \langle V', A' \rangle$$

$$V' = \{V_{ij} \mid i=0, 1, \dots, 2m; j=0, 1, \dots, m\}$$

$$A' = \{ \langle V_{sk}, V_{st} \rangle \mid (s=k \text{ and } t=l+1) \text{ or } (s=k+1 \text{ and } t=l) \}$$

C(V_{sk}, V_{st}) = C(V_{sk}, V_{st})의 가중치

최적근사표면을 구성하는 궤적이 V₀₀에서 시작한다고 하자. 순환그래프 G에서 V₀₀를 기점으로 하여 V₀₀로 돌아오는 궤적은 G'에서 V₀₀를 기점으로 하여 V_{1m, n}에서 끝나는 궤적과 1대1로 대응한다.

따라서 최적경로를 찾는 문제는 G'에서 "그래프 G'에서 정점 V₀₀를 기점으로 하여 V_{1m, n}에서 끝나는 모든 경로 중 가중치 합이 가장 적은 경로를 구한다."

3 체적 및 표면적 추정과 영상 재구성

1) 체적 및 표면적 추정

횡단면 P의 경계점의 수가 m개 이고 Q의 경계점의 수가 n개일때 최소비용 경로를 탐색하여 입체를 재구성하면 입체의 표면은 m+n개의 삼각형으로 구성된다. 재구성된 입체에서 i번째 삼각형을 구성하는 정점들 P(i), Q(i) 그리고 R(i)라 하자. P(i)와 Q(i)는 횡단면 P에 있는 연속된 두 점이고 Q(i)는 횡단면 Q에 있는 점이다. U와 L은 각각 횡단면 P와 Q 내부에 있는 점이다.

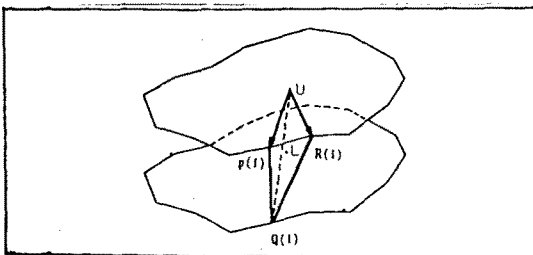


그림 3-1 두 횡단면과 삼각표면

$$\begin{aligned} \overline{A(i)} &= \overline{UP(i)} \\ \overline{B(i)} &= \overline{UQ(i)}, \quad \overline{C(i)} = \overline{UR(i)} \end{aligned}$$

이고 횡단면 Q에 있는 점들 S(j) < j = 1, 2, ..., n > 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{B(j)} &= \overline{US(j)} \\ \overline{B(j+1)} &= \overline{US(j+1)}, \quad \overline{D} = \overline{UL} \end{aligned}$$

로 표시하자.

연속된 두 횡단면 사이에서 구성되는 입체의 체적은 다음식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} V(k-1, k) &= \frac{\overline{A(i)} \cdot \overline{B(i)} \cdot \overline{XC(i)} + \overline{B(j+1)} \cdot \overline{B(j)} \cdot \overline{XD}}{6} \\ &: \text{스칼라 곱, } X : \text{벡터 곱} \end{aligned}$$

V(k-1, k) : k-1 번째 횡단면 와 j번째 횡단면 사이의 부분 입체의 체적

표면적은 각 삼각형의 면적의 합으로 나타난다. i번째 삼각형에 대해

$$\overline{P(i)Q(i)} = \overline{E(i)}, \quad \overline{P(i)R(i)} = \overline{F(i)}$$

라 하면 표면적 S는 다음과 같다.

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \overline{E(i)} \times \overline{F(i)} \right\}$$

3) 3차원 영상구성

3차원의 한점을 나타내기 위해 3차원좌표계가 필요한데 본 논문에서는 3축이 서로 수직인 직각좌표계를 사용하였다.

3차원 직각 좌표계를 2차원 컴퓨터 스크린 좌표계로 나타내기 위해 3차원 물체의 좌표계를 (x, y, z), 원점을 O라 하고 관측좌표계를 (x_e, y_e, z_e), 원점을 O_e라 하자. Oe(D, θ, φ)와 같은 위치에서 관측자의 위치를 설정하자.

O와 O_e 사이의 거리를 D라하면 다음과 같은 변환행렬에 의하여 관측좌표계로 변환시킬 수 있다. T는 물체좌표계를 관측좌표계로 변환시켜주는 최종 변환행렬이다.

$$T = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \cos\phi & -\cos\theta \sin\phi & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta \cos\phi & -\sin\theta \sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & D & 1 \end{bmatrix}$$

물체좌표계의 한점(x, y, z)를 알고 있으면 관측좌표계에서의 한점(x_e, y_e, z_e)는 아래와 같이 구한다.

$$\begin{aligned} (x_e, y_e, z_e, 1) &= (x, y, z, 1) \cdot T \\ x_e &= -x \cos \theta + y \cos \phi \\ y_e &= -x \cos \theta \sin \phi - y \sin \theta \cos \phi + z \sin \theta \\ z_e &= -x \cos \theta \sin \phi - y \sin \theta \sin \phi - z \cos \theta + d \end{aligned}$$

관측좌표계를 스크린좌표계로 변환하는 과정은 다음과 같다. (그림 3-2 참조)

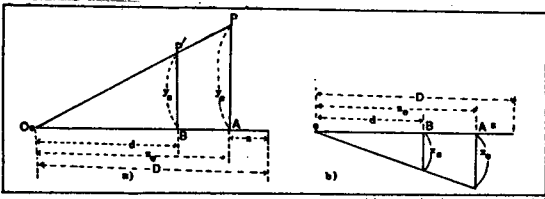


그림 3-2 스크린 좌표계로 변환을 위한 변수의 관계

y_e, z_e 평면으로 부터 A, O, P 와 B, O, P' 은 닮은 꼴이며 d 는 관측좌표계원점에서 스크린좌표계 원점과의 거리이다. 닮은꼴 삼각형의 관계에서

$$\frac{y_s}{d} = \frac{y_e}{z_e} \quad y_s = d \frac{y_e}{z_e}$$

같은 방법으로 그림 b)에서

$$\frac{x_s}{d} = \frac{x_e}{z_e} \quad x_s = d \frac{x_e}{z_e}$$

와 같이 된다. 본논문에서는 $\theta=0$ 이고 $\phi=\sin(0.47)$ 의 방향에서 본 영상을 얻었다.

4 컴퓨터 해석 및 결과 고찰

본 논문에서는 컴퓨터 해석을 위해 타원체의 a, b, c를 모두 2.0으로 선정하였다. 그리고 횡단면의 수는 17개이고 각 횡단면의 경계점의 수를 y축 방향으로 0.1cm마다 얻었다.

표 4-1은 아크에 가중치를 제공하는데 걸린 시간을 나타내었으며 표 4-2는 체적과 표면적에 대한 백분율 오차를 구하여 실었으며 그림 4-1은 각 경계점 선정 허용치에 대해 재구성된 영상을 실었다.

표 4-1에서 보여준 시간은 아크에 가중치를 제공하는 시간으로 경계점 선정 허용치가 증가함에 따라 최대 2배정도 증가하는 경향을 보였다. 이는 횡단면의 경계점의 수와 길

은 관련이 있다.

제한된 탐색 알고리즘을 수행한 결과 탐색시간은 1초 미만으로 전체 수행 시간에 거의 영향을 미치지 못했다.

표 4-2에 나타난 체적과 표면적은 실제 체적에 대해 허용치 1.00일 때 각각 2.88%, 0.352%의 오차로 다른 허용치에 비해 실제적 및 표면적과 가장 작은 차이를 보였다. 이는 횡단면에 대한 경계점의 수가 많을수록 측정값은 정확하게 나타남을 의미한다. 다른 허용치에 대한 오차비교는 허용치 1.00인 경우와 비교 검토하였는데 1.005에 대해서는 커다란 차이를 보여주고 있다.

그림 4-1에서는 재구성된 영상을 각 경계점 선정 허용치에 대해 나타내고 있다.

5 결론

이들 결과를 종합해 보면 허용치 1.0005, 1.001, 1.002에서는 수행시간 및 정량화 요인이 적은 오차로 구해졌다.

따라서 본 논문에서 제안한 경계점 선정 알고리즘이 효율적이며 제한된 아크 가중치 제공 알고리즘에 의해 수행 시간을 줄일 수 있음을 증명 하였다.

만일 기하학적 모델이 아니고 실제 입체에 적용하려면 보다 적은 허용오차가 적용되어도 보다 정확한 정량화 요인을 구할 수 있다. 또한, 이들 알고리즘을 입체에 적용할 경우 인체장기의 체적과 표면적 계산 및 3차원 영상물 재구성함으로써 병변의 정량적인 평가가 가능하게 되고 임상성있는 진단이 가능할 것으로 기대된다.

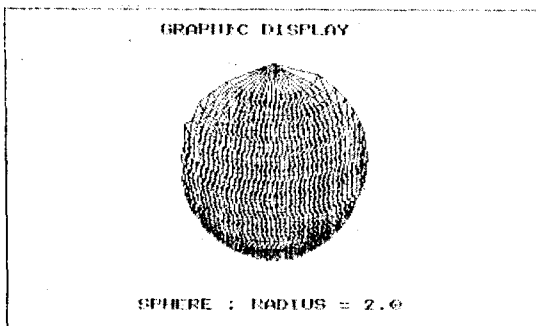
표 4-1 아크에 가중치를 제공하는데 걸리는 시간 측정

허용치	그때프징에 가중치 제공시간(sec)	아크의 가중치 제공시간(sec)	아크가중치 계산시간(sec)	경계점의 수(개)
1.0000	129	21	150	993
1.0005	83	18	101	792
1.0010	41	16	57	558
1.0020	20	9	29	360
1.0030	12	7	19	280
1.0040	10	5	15	232
1.0050	7	4	11	205

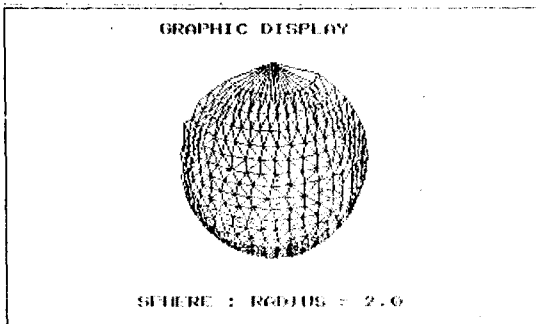
표 4-2 체적 및 표면적 추정

허용치	추정체적 (cm)	P 과의 오차 (%)	추정표면적 (cm)	S 과의 오차 (%)	경계점의수 (개)
1.0000	*32.545	0.00	*550.083	0.000	993
1.0005	32.535	0.03	50.150	0.134	792
1.0010	32.394	0.46	50.074	0.017	558
1.0020	32.004	1.66	50.042	0.082	360
1.0030	31.645	2.76	53.45	6.72	280
1.0040	31.256	3.36	64.48	8.78	232
1.0050	30.830	17.14	65.39	10.69	205
입체의 실제 체적 V = 33.510 ((V - *P)/V) X 100 = 2.88 (%)					
입체의 실제 표면적 S = 50.265 ((S - *S)/S) X 100 = 0.362 (%)					

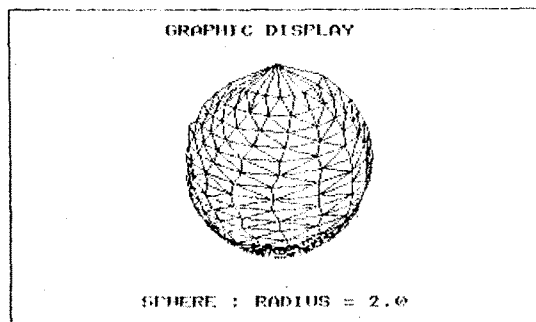
그림 4-1 3 차원 영상 재구성



a) 경계점 선정 허용치 1.00



b) 경계점 선정 허용치 1.001



c) 경계점 선정 허용치 1.003

참고 문헌

- 1) H. Fuchs, Z.M.Kedem, and S.P.Uselton, "Optimal surface reconstruction from planar contours", Comm. ACM, vol. 10, p.693, 1977.
- 2) Y. Watanabe, Y. Nose, S. Sanefuji, M. Yokota, and M. Nakamura. "A method to estimate volume and surface area of organ two-dimensional echocardiography", IEEE Trans. Biomed. Eng. vol. BME-28. pp.294-297. 1981.
- 3) Y. Watanabe, "A method for volume estimation by using vector areas and centroids of serial cross sections", IEEE Trans. Biomed. Eng. vol. BME-29, pp.202-205, 1982.
- 4) P. N. Cook, L. T. Cook, K. R. Lee, "An algorithm for volume Estimation based on polyhedral approximation", IEEE Trans(Sep. 1980) 493-500
- 5) F. B. James, K. M. Sandra, L. P. Richard, "In Vitro evaluation of an ultrasonic three-dimensional inaging and volume system", Ultrasonic Imaging 4, 126-139(1982).