

2매질 무한영역 문제의 유한 - 경계요소 해석에 관한 연구

임 달 호 \* 신 흥 교 \* 장 원 범 \*  
\* : 한 양 대 학 교

A Study on The Finite - Boundary Element Analysis of 2-Medium  
Infinite Region Problem

Im, Dal - Ho \* Shin, Heung - Kyo \* Jang, Weon - Bum \*  
\* : Hanyang University

1. 서 론

전기기기의 개발, 설계 및 특성해석에 있어서는 기기의 자속분포를 정확하게 파악하는 것이 무엇보다도 선결과제이다. 이러한 전자장 해석법으로는 Analog법, 도전지법, 수치해석법 등 여러가지가 있으나 수치해석법 중에서 유한요소법이 매질의 비선형성 등의 특수성의 고려가 용이하다는 장점으로 최근 전자계산기의 발달에 힘입어 가장 널리 사용되고 있다.

그런데 본질적으로 전자장은 무한영역까지 영향을 미치며, 기기의 제어회로에 많이 사용되는 FET 등의 전자부품이나 Magnetic Head, Video Tape 등의 회상 및 음성의 기록 및 재생장치 등은 외부의 자장이나 온도조건에 매우 민감하게 반응하므로 전기기기도 부터 누설되는 자계로 인한 오동작의 우려가 생긴다.

따라서 전기기기의 자속분포는 기기내부의 분포 뿐만 아니라 기기외부의 누설자계도 고려하여 해석해야 할 필요가 있으나 유한요소법은 반드시 유한 영역만을 해석 영역으로 택하여 영역 경계에는 반드시 경계 조건을 부가해야 하기 때문에 기기 외부의 자속분포는 정확히 예측할 수 없다는 단점이 있어 개영역 문제에는 적용이 곤란하게 된다.

이러한 점을 해결하기 위해 최근 경계요소법과 유한요소법의 혼합 적용에 의한 자계 해석이 많이 시도되고 있다. 그러나 이 연구들은 주로 단일 매질의 무한 영역만을 고려한 것으로서 2매질의 무한영역이 존재하는 모델의 경우에는 무한영역까지의 경계적분을 수행해야 하는 점 때문에 적용이 곤란하다.

이에 따라 본 연구에서는 유한요소 영역과 경계요소 영역의 경계 부분에서의 연속조건을 만족시키기 위하여 경계요소를 포텐셜에 대해서는 선형요소, 포텐셜의 미분에 대해서는 일정요소를

사용하는 0-1 차 혼합 경계요소법을 이용하여 유한요소법과 집합, 해석하는 방법을 보였다. 또한 2 매질의 무한영역이 존재하는 모델에도 적용이 가능하도록 영상법에 의해 무한경계 적분을 소거하는 방법을 제안하였다.

그리고 이를 해석해가 존재하는 모델에 적용하여 해석한 결과 그 타당성을 규명하였다.

2. 지배방정식 및 유한 - 경계요소법의 적용

2-1. 해석상의 가정

- (1) 전류밀도  $J_0$  및 자기 Vector Potential  $A$ 는  $z$  방향 성분만을 갖는다.
- (2) 투자율은 일정하다.

2-2. 지배방정식의 유도

해석 영역에 있어서 성립되는 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= J_0 & (2-1) \\ \text{div } B &= 0 & (2-2) \\ B &= \mu H & (2-3) \\ B &= \text{rot } A & (2-4) \end{aligned}$$

단,  $J_0$ : 입력 전류 밀도 ( $A/m^2$ )  
 $H$ : 자계의 세기 ( $A/m$ )  
 $B$ : 자속 밀도 ( $Wb/m^2$ )  
 $A$ : Vector Potential ( $Wb/m$ )  
 $\mu$ : 투자율 ( $H/m$ )

윗 식으로부터 지배방정식을 유도하면,

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } A \right) = J_0 \quad (2-5)$$

와 같이 된다.

$J_0$ 는 z 방향 성분 뿐이므로 식 (2-5) 를 x-y 좌표계에서 2차원적으로 표현하면,

$$\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) = -J_{0z} \quad (2-6)$$

가 된다.

2-3. 유한요소법의 적용

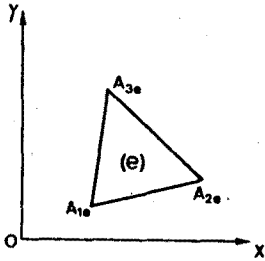


그림 (1) 1 차 삼각 요소

유한요소 영역은 Poisson 장으로서 지배방정식이 식(2-6) 과 같이 주어진다.

$$\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) = -J_{0z} \quad (2-7)$$

1 차 삼각형 요소에서의 Vector Potential  $A^{(e)}$  를 아래와 같이 근사화 하자.

$$A^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_{ie} A_{ie} \quad (2-8)$$

식 (2-7) 에 Galerkin 이론과 Gauss - Green 의 정리를 적용해서 수식을 전개하면 다음과 같은 계 Matrix 식을 얻는다.

$$[D] \{A\} - \frac{1}{\mu} [E] = \{F\} \quad (2-9)$$

$$[D] = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^{(e)}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \frac{\partial N_{je}}{\partial y} \right) \right\} dx dy$$

$$\{A\} = \sum_{i=1}^E \{A_{ie}\}$$

$$[E] = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^{(e)}} N_{je} A_n d\Gamma$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^{(e)}} N_{je} J_{0z} dx dy$$

2-4. 경계요소법의 적용

경계요소 영역은 Laplace 장으로서, 유한요소 영역 외부의 무한영역이 된다. 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2-10)$$

한편, Laplace 방정식의 기본해  $A^*$  와 이의 법선방향 미분계수  $A_n^*$  은

$$\nabla^2 A(r-r_0) + \delta(r-r_0) = 0 \quad (2-11)$$

와 같은 방정식을 만족하는 해로서, 2 차원장에서 있어서 다음과 같이 된다.

$$A^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|r-r_0|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (2-12)$$

$$A_n^* = \frac{\partial A^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2-13)$$

단, r 은 고찰점 (Source) 과 관측점사이의 거리를 나타내며,  $\delta$  는 Kronecker Delta 함수 를 나타낸다.

(2-12) 과 (2-13) 을 이용해서 식 (2-10) 을 Green 의 제 2 정리를 써서 정리하면 아래와 같이 경계 적분방정식이 얻어진다.

$$\frac{\theta}{2\pi} A_p + \int_{\Gamma} A_n^* A d\Gamma = \int_{\Gamma} A^* A_n d\Gamma \quad (2-14)$$

여기에서 p 는 Source점이고,  $\theta$ 는 Source점 p 가 경계요소 영역내의 임의의 한점 (관측점) 에 어느정도 영향을 미치는 가를 나타내주는 각도로서 2차원에서는 0 - 2 $\pi$  사이의 값을 갖게 된다.

그런데, 식(2-14)는 해석모델이 무한경계를 갖는 경우, 무한길이의 경계에 대한 적분을 해야 하는데 이러한 문제점을 해결하고자 본 연구에서는 영상법의 개념을 도입하였다.

따라서 식 (2-14) 를 본 연구에서 제시한 0 - 1차 혼합 경계요소를 이용해서 이산화해보면 다음과 같이 계 Matrix식을 얻는다.

$$[H] \{A\} = [G] \{A_n\} \quad (2-15)$$

2-5. 유한요소법과 경계요소법의 접합

2가지 방법을 접합하는데 만족되어야 할 경계 조건은 다음과 같다.

$$A_f = A_b \equiv A$$

$$A_n f = -(\mu_f/\mu_b) A_n b \quad (2-16)$$

결과적으로 식 (2-9), (2-15), (2-16) 으로 부터 다음과 같은 Matrix 식이 얻어지게 된다.

$$\begin{Bmatrix} D & (\frac{1}{\mu_b})E \\ H & -G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ A_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-17)$$

윗식이 바로 본 연구에서 제시한 유한-경계요소법의 시스템 Matrix 가 된다.

3. 적용에 및 검토

3-1. 해석모델

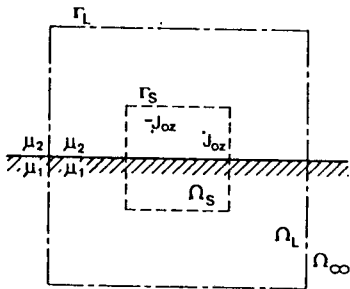


그림 (2) 해석 모델

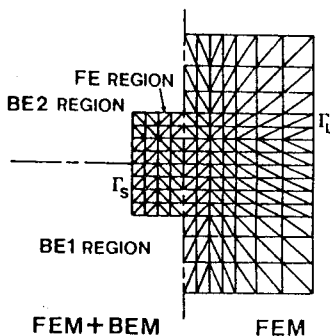


그림 (3) 요소 분할도

본 연구에서의 해석모델은 그림 (2) 와 같이 반부한 2 매질상에서 전류원이 존재하는 경우로서, Neumann 경계조건과 Dirichlet 경계조건을 부가하여 유한요소법으로 해석한 결과와 본 연구에서 제안한 유한-경계요소법으로 해석한 결과를 비교, 검토 하였다.

유한 요소법만으로 해석한 경우에는 해석영역을 정확한 해석을 하고자 하는 영역 (그림 (2)의 점선부분) 보다 상당히 크게 취하여 그림 (3) 과 같이 요소분할 하였으며, 경계조건으로는 외부경계에 Dirichlet 또는 Neumann 조건을 주었다. 이 경우 총 절점수는 225개이며, 요소수는 392개이다.

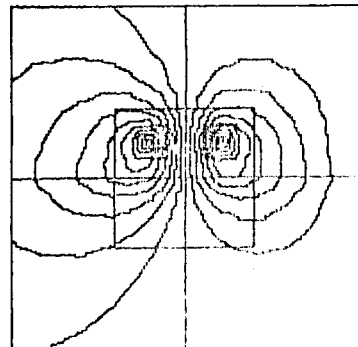
또한 유한-경계요소법의 경우에는 관심영역 외부는 모두 무한 경계요소 영역으로 처리하였으며, 유한요소는 128개, 경계요소는 32 개이다.

3-2. 해석 결과

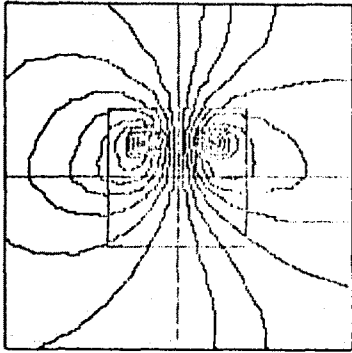
그림 (4)의 (a), (b)는 각각 Dirichlet, Neumann 경계조건을 주었을 때 유한요소법의 해석결과를 나타내고, (c)는 본 연구에서 제안한 유한-경계요소법을 적용했을 때의 해석결과를 나타낸다. 그리고, 그림 (a), (b)에서 좌반부는 해석해를 나타내었다.

해석해와 비교를 해보면 F.E.M.의 경우 평균 오차는 약 14% 정도였으며, 혼합적용의 경우는 이 보다 10% 정도 줄어든 약 3.5% 정도도 해석해와 거의 유사한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있고, 계산기 사용용량도 1/4정도도 감소되었다.

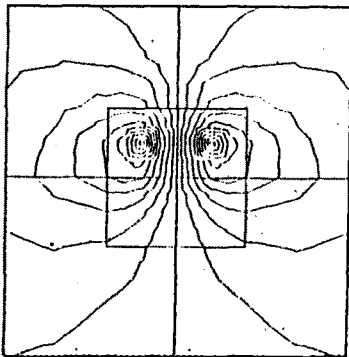
따라서 본 연구에서 제안한 혼합적용법을 이용한다면 해석영역을 축소시키고서도 훨씬 정밀한 자속분포 특성을 해석할 수 있음을 알 수 있다.



(a) Dirichlet



(b) Neumann



(c) 유한 - 경계요소법

그림 (4) 해석 결과

표 1. 포텐셜 오차 비교

a) F.E.M. ( [L : Dirichlet )

	위치	수치해	해석해	오차(%)
최대	(2, -2)	6.9873	11.639	-39.968
최소	(0.5, 1)	25.045	25.753	-2.746
평균	15 내			14.408

b) F.E.M. ( [L : Neumann )

	위치	수치해	해석해	오차(%)
최대	(2, -2)	16.424	11.639	41.105
최소	(0.5, 0.5)	22.492	21.865	2.910
평균	15 내			13.676

c) F.E.M. + B.E.M.

	위치	수치해	해석해	오차(%)
최대	(1.5, 2)	22.264	22.479	-9.565
최소	(-2, 1)	-31.086	-31.338	0.804
평균	15 내			3.785

4. 결 론

본 연구에서는 지금까지는 시도되지 않았던 2매질 무한영역 문제의 해석법을 제안하였으며, 이를 해석해가 존재하는 모델에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) F.E.M. 만에서의 해석식보다 오차를 약 10% 정도 감소시킬 수 있었다.
- (2) 경계요소 해를 이용하여 해석영역 외부의 임의의 점의 포텐셜이나 그 미분치도 계산할 수 있으므로 누설자계 분포 해석이 가능하다.
- (3) 계산기 사용 용량을 대폭 절감할 수 있으므로 PC 정도의 계산기로도 만족할 만한 자계분포 특성의 수치해석을 할 수 있다.

본 해석 결과를 누설 자속이 문제시 되는 Linear Motor 및 공기중에서 자기차폐를 요하는 통신계통 등에 적용한다면 보다 정밀한 해석을 할 수 있으리라 사료된다.

참고 문헌

1. 任達鎬, 金煥五, "FEM과 BEM의 混合適用에 의한 定常 磁界의 解析에 관한 연구", 大韓電氣學會誌, vol. 34, no. 7, 1985
2. 小實天, 石山敦士, 小川真一郎, "境界要素法における 0-1 次 混合離散化法について", 日本電氣學會論文誌, 昭57-10
3. 小實天, "閉領域 磁界問題의 數値解析", 日本電氣學會聯合大會, 昭57
4. 加川幸雄, 村井忠邦, 北上真二, "有限要素と境界 要素の接合条件について", IP-81-53
5. S. Cristina and A. Di. Napoli, "Combination of finite and Boundary Elements for Magnetic field Analysis" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. MAG-19, No. 6, NOVEMBER 1983
6. 戸川隼人, 下関正義, "境界要素法入門", カイエス社
7. C.A. Brebbia, "The Boundary Element Method for engineers"