적응요소 분할을 위한 오차추정에 관한 연구

최 홍순* 정 현교 한 송엽
(서울대학교) (강원대학교) (서울대학교)

A POSTERIORI ERROR ESTIMATE FOR ADAPTIVE FINITE ELEMENT MESH

1. 서 론

최근들어 전기공학분야에서 전자장 문제를 해석하는데 있어서 유한요소법이 널리 사용되고 있다. 그런데 형상이 복잡하거나 singular point가 존재하여 자속집중현상이 생기는 영역에서는 그 영역 내의 요소를 세분하여 계산 오차를 줄이는 작업이 필요하다. 이 때 입력 data의 재작성이 요망되는데 수동으로 하는 경우에는 매우 많은 시간이 소요 되며 편중도가 심한 경우에는 정확도를 기대할 수 없게 된다. 이러한 점을 해결 하기위한 방법으로서 자동요소 분할(automatic mesh generation)과 적응요소 분할(adaptive mesh generation) 방법들이 있다. 전자는 사용자가 해석모델을 표현 하기 위한 최소의 정보를 입력하고 이것을 바탕으로 자동적으로 요소를 구성하는 방법을 말하고, 후자는 최근 몇년들어 연구되기 시작한 방법으로서, 요소수가 비교적 적은 모델에서 시작하여 발생 오차를 추정하여 요소를 계속 세분해 나가는 방법이다.[1] [2]

적응요소 분할방법을 적용하는 데 있어서는 오차를 추정하는 기준을 정하는 것은 매우 중요하다. 그 방법으로서 지금까지 몇 가지가 있으나, 본 논문에서는 다음과 같은 원리를 기본으로 한 적응요소 분할 알고리즘을 제시하고자한다. 즉, 자장해석 문제에서는 요소경계상에서 자속밀도(B)의 수직방향 성분과 자계세기(H)의 수평방향성분은 각각 연속이어야 한다. 그러나 유한요소법으로 구한 potential은 C_0연속조건 만을 만족 하기 때문에 위의 조건중 후자는 일반적으로 만족되지 않는다. 따라서, 위의 조건이 잘 만족되지 않는 요소일 수록 오차가 많다고 가정 할 수 있고, 이렇게 구한 오차는 요소를 세분하기 위한 기준이 될 수 있다.

본 논문에서는 해석적인 해를 알 수 있는 선형 정자장 potential 문제를 택하여, 본 알고리즘에의한 추정오차와 실제 오차를 비교하여 본 알고리즘의 오차 추정에 대한 타당성을 검토하였다.

2. ERROR NORM 과 오차추정

요소 세분을 위한 오차계산의 지표로서 자속밀도(B)를 사용한다. 그리고 error norm을 다음과 같이 정의한다.

$$\| e \| = \left\{ \sum_{i=1}^{N} e_i \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$$e_i = \int_{\Omega_i} \Delta B^2 d\Omega \tag{2}$$

$$\Delta B = |B_{cal}| - |B_{ex}| \quad (3)$$

여기서,

N : 전체 요소수

B_{cal} : 유한요소법에 의한 B

B_{ex} : 해석적으로 구한 B

(3)식의 B_{ex}는 실제 문제해석에서는 알 수 없으므로 , 실제 오차를 계산 해 볼 때에만 쓰고, 알고리즘 에서는 추정된 값 B_{est} 로 대치한다. B_{est} 는 다음과 같이 정의한다.

자장의 성질에서, 두 요소 사이의 만나는 경계면상에서 자속밀도의 수직성분과 자계세기의 수평성분이 연속이어야 한다. 즉,

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (4)$$

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (5)$$

여기서 n 및 t 는 각각 수직성분 및 수평성분을 의미한다.

C_0 연속조건을 만족하는 자장문제에 있어 (4)식은 언제나 만족되지만 (5)식은 그렇지가 않다. 그러므로 삼각형 요소 세변의 중간점에서의 자계세기의 수평성분 오차가 주요한 계산 오차의 기준이 될 수 있다. 자계세기는 공기중이나 자성체내에서 거의 비슷한 차수의 값을 가지고 있으므로, 두 물질 사이의 경계에서 요소가 불필요하게 편중 세분되는 것을 피할 수 있다. 여기서 H_{t1} 과 H_{t2} 사이에서 적절한 보간법에 의해 H_{test} 를 구하고 삼각형요소 세변상에서 자속밀도의 수평방향성분의 추정값을 구할 수 있다. 소영역 내의 error norm은 이와 같이 추정된 자속밀도와 처음 계산된 자속밀도와의 차이로 부터 구해낸다. 이와같이 구한 오차들의 분포를 정규분포 라 가정하고 오차정도에 따라 세분정도를 달리 한다.

3. 적용 모델

본 알고리즘을 해석적인 해가 존재하는 2차원 정자장문제에 적용하였으며 적용 모델은 그림 1과 같다. 여기서 Dirichlet 경계조건으로 주어지는 vector potential값은 (6)식으로부터 얻을 수 있다.

$$A = R^{\frac{1}{2}} \mathrm{SIN}(\theta/2) \quad (6)$$

A : vector potential의 Z축방향의 성분

또한 식(6)을 사용하면 내부점에서도 potential 값을 얻을 수 있다. 식(6)은 원점에서 singularity를 갖는다.

요소의 세분방법은 요소의 오차정도에 따라 한번 이나 두번 또는 세번을 둘로나누는 이분법(bisection)을 사용했다.[3]

전체 프로그램의 흐름도는 그림2와 같으며, 1차 및 2차 보간 함수를 사용하였을 경우의 오차곡선 은 그림3과 같다. 이경우 2차 보간 함수를 사용한 것이 1차 보간 함수를 사용한 것 보다 같은 절점수에 비해서는 오차가 적게 나왔다. 그림4는 요소를 균등하게 잘라 나갔을 경우의 오차곡선이다. 그림3과 그림4 에서는 본 알고리즘에서 추정한 계산상의 오차(CALC.ERROR)와 실제 오차(EXAC.ERROR), 그리고 추정한 자속밀도와 실제 자속밀도와의 차이 를 각각 나타내주고 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 적응요소 분할을 위한 오차추정 알고리즘을 제시하였다. 본 알고리즘을 선형 2차원 자장문제에 적용시켜본 결과 그림3과 그림4에서 나타난 바와 같이 절점수가 늘어 날 수록 적응요소 분할 방법이 요소를 균등하게 분할한 경우보다 해의 정확도에 있어서 훨씬 유리함을 알 수 있다. 따라서 이 방법을 사용하면 최소의 오차를 얻기 위한 최소의 절점수를 얻어 낼 수 있다. 또한, 요소의 세분이 진행됨에 따라 오차의값이 전 영역에 걸쳐고른 분포를 갖는 해를 얻을 수 있다. 그러므로 본 알고리즘은 singular point를 갖는 문제와 복잡한 형상의 문제 해석에 유용될 수 있다.

5. 참고문헌

[1] Z.J. Cendes and D.N. Shenton, "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic field", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-21, NO.2, September 1985, pp. 1811-1816.

[2] A.R.Pinchuk and P.P. Silvester, "Error estimation for automatic adaptive finite element mesh generation", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-21, No.6, November 1985, pp. 2551-2554.

[3] M.C. Rivara,"Algorithm for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques", Int.J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, No.4, April 1984, pp. 745-756.

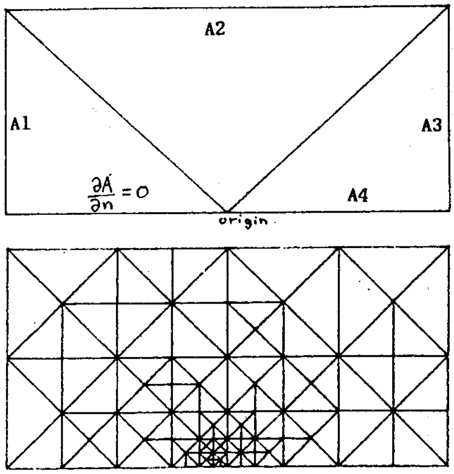


그림 1. 초기 mesh와 adaptive algorithm이 사용된 뒤의 mesh.
A1 ,A2, A3, A4: $r^{\frac{1}{2}}\sin(\theta/2)$로 주어지는 Dirichlet 경계면.

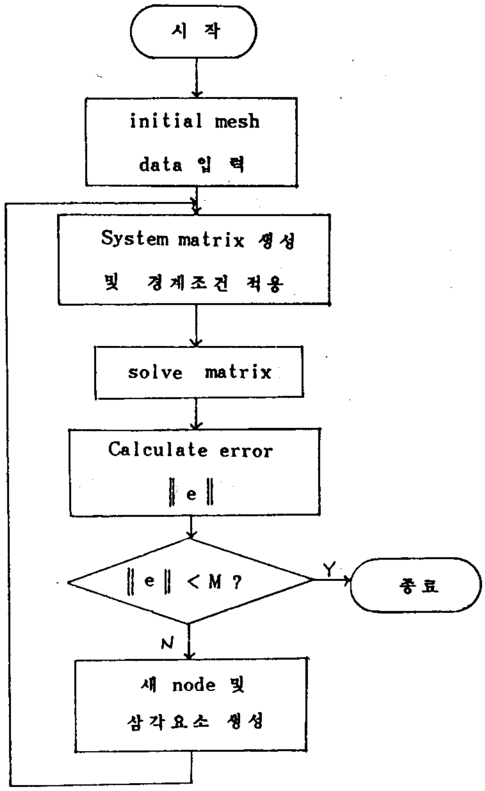
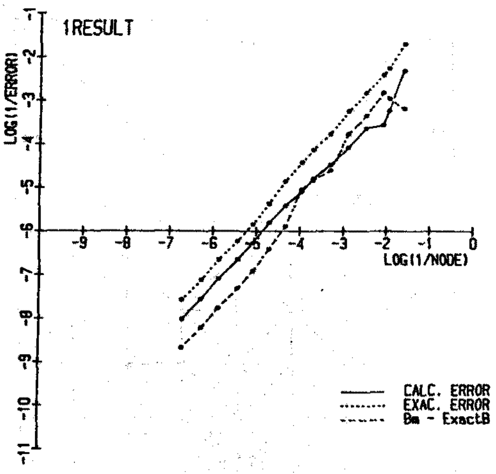
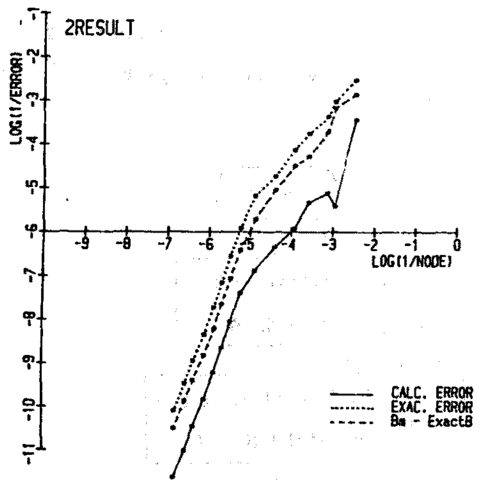


그림 2. 프로그램의 전체 흐름도

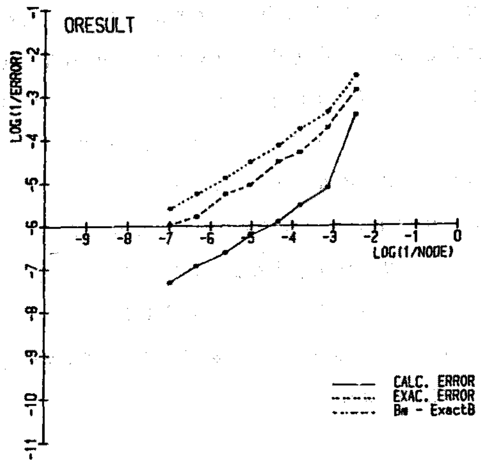


1차 shape function 사용



2차 shape function 사용

그림 3. node 증가에 따른 오차곡선



2차 shape function 사용

그림 4. non-adaptive mesh 오차곡선