

전류 Vector Potential을 이용한 와류 분포의 유한요소 해석에 관한 연구

임 달 호* 신 흥 교* 최 경 식*

* : 한양대학교

A Study on The Finite Element Analysis of Eddy Current Distribution Using Current Vector Potential

Im, Dal - Ho* Shin, Heung - Kyo* Choi, Kyeong - sik*
* : Hanyang University

1. 서론

전기공학에 유한 요소법이 도입된 이래, 전기기기의 자기적 분포 특성 해석에서부터 출발하여, 현재에는 회전력 특성 해석에 필수적인 와류 해석에 관한 연구에 까지 많은 발전을 해 오게 되었다. 일반적으로 전기 기기에 있어서 와류손을 줄이거나, 또는 와류를 이용하는 경우에 있어서는, 와류의 분포를 직접 구해낸다는 것이 전기 기기의 설계 및 개발 분야에서의 응용에 매우 중요한 의미를 갖는다. 그러나 이제까지의 해석에서는 Magnetic Vector Potential을 이용해 왔기 때문에 와류가 고려된 자기적 분포 특성은 해석할 수 있었지만, 와류의 분포를 직접 해석할 수는 없었다.

이에 따라, 본 연구에서는 와류의 분포를 직접 구해 내지 못한 난점을 해결하기 위해, Magnetic Vector Potential 대신 Current Vector Potential을 도입하여 지배방정식을 유도하였으며, 여기에 유한 요소법을 적용하여 전기 기기의 있어서의 와류 분포 특성에 대한 유한 요소 해석을 시도하였다. 또한 지배방정식의 시간 미분항의 취급에는 차분법(θ법)을 이용하였고, 이에 대한 알고리즘(Algorithm)을 개발하였다.

본 연구에 사용된 해석 모델(Model)로서는, 와류에 의한 회전력이 거의 대부분의 동작 특성을 결정하는 단상 직산 전력계를 선택하였으며, 위에서 언급한 방법을 이용하여 와전류를 계산하였고, 이에 따른 와전류 분포 특성을 해석하였다.

그 결과, 종래에는 해석할 수 없었던 와전류 분포 특성을 해석할 수 있었으며, 와전류의 수치 계산이 가능함을 알 수 있었다. 따라서, 본 연구에서 적용한 해석 방법을 이용한다면 와류손의 해석이나, 와전류 효과를 이용하는 전기 기기의 특성 해석에 많은 도움이 될 것으로 기대된다.

2. 기본 방정식 및 유한 요소법의 적용

2-1 지배방정식의 유도

해석 모델의 와류 분포를 2차원적으로 해석하기 위해 다음과 같은 가정을 한다.

- 1) 모든 계 변수의 Z 방향 변화는 무시한다.
- 2) 입력 자계는 Z축 방향의 성분만을 갖는다.
- 3) 도체의 도전율 및 투자율은 일정하다.

이상의 가정에도 적용 방법 상 필요한 가정들이 있는데, 그러한 것은 적용 이론에서 설정하기로 한다.

해석 대상의 영역에 여자 자계가 시간적으로 변화될 하며 인가될 때, 도체 영역에는 외부 인가 자계와 유도 전류에 의한 유도 자계가 합성된 종합 자계가 형성된다.

유도전류를 J_e 라 하면

$$\nabla \times H_e = J_e \quad (2.1)$$

가 되며 종합 자계 H 는

$$H = H_0 + H_e \quad (2.2)$$

가 된다. 또한 외부 인가 자계 H_0 는, 여자 전류 밀도를 J_0 라 하면 Biot - Savart 법칙에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$H_0 = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{J_0 \times r_0}{r^2} dv \quad (2.3)$$

식 (2.1)의 양변에 Divergence를 취하면

$$\text{div}(\text{rot } H_e) \equiv 0$$

이므로, 다음과 같이 유도 전류 J_e 에 대한 전류 연속 식이 얻어진다.

$$\nabla \cdot J_e = 0 \quad (2.4)$$

따라서, 식 (2.5)와 같은 전류 Vector Potential Π 를 정의할 수 있다. 즉,

$$J_e = \nabla \times \Pi \quad (2.5)$$

또한 식 (2.1)과 식 (2.5)에 의해

$$\nabla \times (H_e - \Pi) = 0 \quad (2.6)$$

가 되므로 $(H_e - \Pi)$ 는 보존장이 된다. 따라서, 식 (2.7)과 같은 자기 스칼라 포텐셜 Ω 를 정의할 수 있다.

$$H_e - \Pi = -\text{grad } \Omega \quad (2.7)$$

여기서 $-\text{grad } \Omega$ 는 유도 전류(와전류)에 의한 자계 H_e 의 기준을 정하기 위한 자계에 해당된다. 식 (2.2)의 종합 자계 H 는 식 (2.7)로부터

$$H = H_0 + \Pi - \text{grad } \Omega \quad (2.8)$$

가 된다. 그런데 Maxwell의 전자 유도 법칙으로부터

$$\begin{aligned} \nabla \times E_e &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial (\mu_0 H)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.9)$$

가 되며

$$E_c = \frac{1}{\sigma} J_c$$

$$= \frac{1}{\sigma} \nabla \times T \quad (2.10)$$

와 같이 쓸수 있으므로 식 (2.9)에 식 (2.8)과 식 (2.10)을 대입하면 식 (2.11)과 같은 Current Vector Potential에 의한 지배방정식을 얻을 수 있다. (2.11)

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times T \right) + \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 (j_0 + T - \text{grad} \Omega) = 0$$

여기서 σ 를 일정하다고 가정하였으므로 식 (2.11)은

$$\frac{1}{\sigma} \nabla \times (\nabla \times T) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (j_0 + T - \text{grad} \Omega) = 0 \quad (2.12)$$

가 된다.

지배방정식 (2.12)를 2 차원장에 대해 전개하면, 가정으로부터 $\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$ 가 되므로

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_x}{\partial y^2} = \sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (H_{z0} + T_x) \quad (2.13)$$

과 같이 된다. 여기서 T_x, H_{z0} 는 각각 T, j_0 의 z 방향 성분이다.

2.2 Galerkin 법과 요소 Matrix 식

지배방정식을 유한 요소법에 의해 풀기 위해서 해석 영역을 1차 삼각 요소로 분할한 다음 요소에서의 Vector Potential T^e 를

$$T^e = \sum_{j=1}^3 N_j^e T_j \quad (2.14)$$

로 근사화 하고, 식 (2.13)에 Galerkin 이론을 적용하면

$$G_i^e = \frac{1}{\sigma \Delta^e} \left\{ \frac{\sigma}{2} (b_i b_j + c_i c_j) T_j^e \right\} + \frac{\mu_0 \sigma}{2} \frac{\partial T_i^e}{\partial t} + \frac{\sigma \mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(H_{z0} + T_i^e \right) \frac{\partial T_i^e}{\partial t} \quad (2.15)$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker - Delta 함수이다. 이 식을 행렬로 표현하면

$$G_i^e = \frac{1}{4\Delta^e} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{Sym.} & & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ T_3^e \end{Bmatrix} + \frac{\mu_0 \sigma}{2} \left\{ \frac{\partial T_i^e}{\partial t} + \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \text{Sym.} & & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ T_3^e \end{Bmatrix} \right\} \quad (2.16)$$

2.3 계 방정식과 와전류 밀도

각 요소에 대한 요소 Matrix 식 (2.16)을 해석 영역의 전 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 계 방정식을 얻을 수 있다.

$$[D] \{ \dot{T} \} + [K] \{ T \} + \{ F \} = \{ 0 \} \quad (2.17)$$

여기서

$$[D] = \sum_{km} \frac{\sigma \mu_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \sum_{km} \frac{1}{4\Delta^e} [b_i b_j + c_i c_j]$$

$$\{ F \} = \sum_{km} \frac{\sigma \mu_0}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \frac{\partial H_{z0}}{\partial t}$$

그리고 식 (2.5)로부터 각 요소의 전류 밀도는

$$J^e = i \frac{\partial T^e}{\partial y} - j \frac{\partial T^e}{\partial x} \quad (2.18)$$

가 되므로 첫 식에 식 (2.14)를 대입하면

$$J_x^e = \frac{\partial T^e}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\Delta^e} c_j T_j^e \quad (2.19)$$

$$J_y^e = -\frac{\partial T^e}{\partial x} = -\sum_{j=1}^3 \frac{1}{\Delta^e} b_j T_j^e$$

가 된다.

2.4 시간 미분항의 취급법

시간 미분항의 취급 방법에는 여러가지 방법이 있으나 본 연구에 사용된 차분법에 대해 알아보고, 그에 의해 식 (2.17)을 시간 미분항을 고려하여 이산화한다.

T 를 시간 차분에 의해 이산화 시키는 방법은 해석하고자 하는 현상의 시간 변화를 미소시간 Δt 로 구분하고 구분된 각각의 시간내에 있어서는 현상이 직선적으로 변화 한다고 하는 가정하에서, 미분 방정식을 이산화시켜 시간에 따라 계산하는 방법으로 차분 근사법을 택하는 시점에 따라 전진, 중앙, 후퇴 차분법등이 있다.

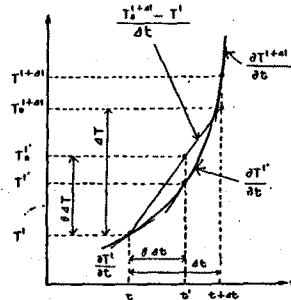


그림 1 차분법 (θ 법)

그림 1 에서 시간 t에 있어서의 Vector Potential의 전치가 이미 구해져 있다고 가정하고, Δt 시간 후의 근사치 T^{n+1} 를 구하는 경우 0 - 1 사이에서 임의의 값을 갖는 정수를 도입하고, 어떤 구배에 대한, 차분법을 표현해 보면 시간 t'에 있어서의 구배 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 를 T^{n+1} 를 포함하지 않는 다음식의 표현이 가능하다.

$$\frac{\partial T^e}{\partial t} = \frac{T_0^e - T^e}{\theta \Delta t}$$

여기서 θ 의 선택지에 따라 차분 근사법의 명칭이 붙여지는데 θ 가 0, 0.5, 1 일때 각각 전진, 중앙, 후퇴 차분법이라한다. 그리고 $\theta=0$ 인 경우를 또한 Euler Integration Method 라고도 하며, $\theta=0.5$ 인 경우를 CRANK-Nicholson Method 라고도한다. 그림 1 에서 첨자 a는 근사치를 표시한다.

상술한 차분법을 이용하여 식 (2.17)을 일반적인 형태로 만들면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [D] + \theta [K] \right) \{ T \}_n = \left(\frac{1}{\Delta t} [D] - (1-\theta) [K] \right) \{ T \}_{n-1} - \{ F \}_n + \{ F \}_{n-1} / \Delta t$$

단 $0 < \theta < 1$

3. 해석 모델 및 계산 처리 과정

이상과 같은 방법으로 와류 분포 특성을 해석하기 위해 Air-gap Field의 상호 작용과, Disk 상에서, 이것에 의해 유도되는 와류에 의해서 Driving Torque가 발생하는 그림 2와 같은 단상 직산 전력계의 알루미늄 원판을 해석 모델로 하였고, 경계 조건은 원판 가장 자리에 Dirichlet 조건을 주었으며, 가해진 전압과 전류는 동 위상이며, Disk는 정지 되어 있다고 가정한다.

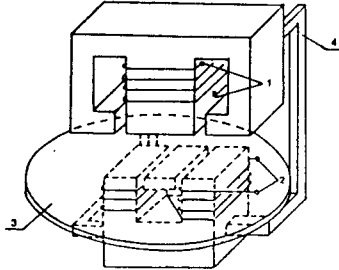


그림 2 단상 직산 전력계

- 1) Voltage Coil
- 2) Current Coil
- 3) Disk
- 4) Magnetic Circuit

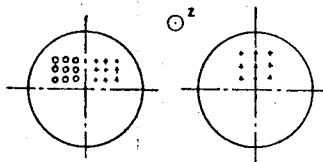


그림 3 전류 코일과 전압 코일에 의한 자계

본 연구를 위해 작성된 계산기 FLOW - CHART는 그림 4와 같으며, 본 연구에 사용된 계산기는 IBM - PC XT이다.

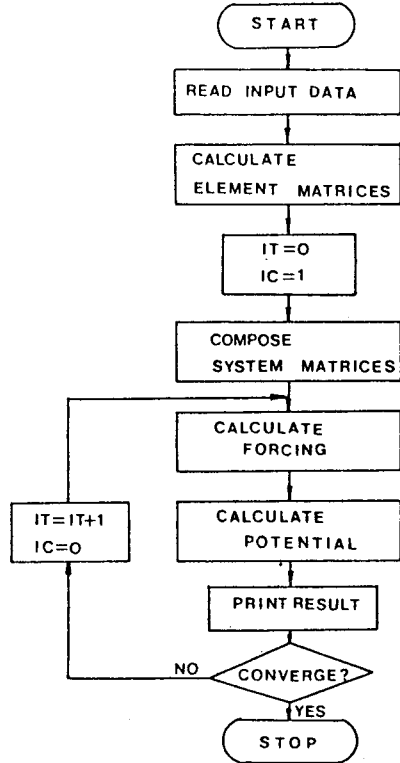


그림 4 FLOW CHART

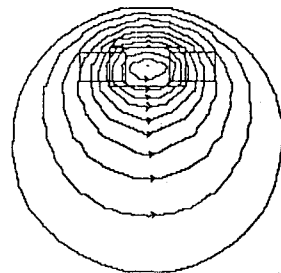
4. 해석 결과 및 검토

3장에서 설정한 해석 모델에 대해, 자계가 시간적으로 변화하며 인가될 때의 와류 분포 특성을 Current Vector Potential을 이용하여 해석한 결과 그림 5와 같은 와류 분포를 구할 수 있었다.

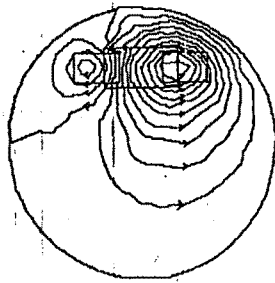
그림에서 보면, $\omega t = 0^\circ$ 일 때는 Current coil에 의해 생기는 자속밀도의 시간 미분이 0이기 때문에 와류 분포는 전적으로 Voltage coil의 여자에 의해서 발생된다. (그림 5 (a))

또한 $\omega t = 90^\circ$ 에서의 와류 분포는 Current coil의 여자에 의해서만 발생된다는 것을 알 수 있다. (그림 5 (c))

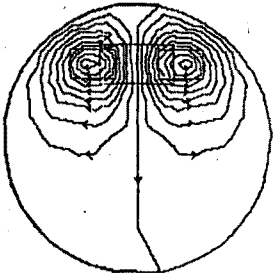
그리고 $\omega t = 180^\circ$ 에서의 분포는 $\omega t = 0^\circ$ 일때의 위상과 정반대로 반전됨을 알 수 있다. (그림 5 (a), (d))



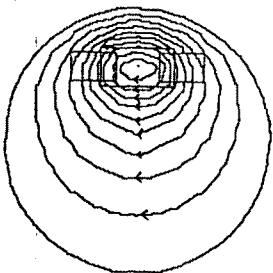
(a) $\omega t = 0^\circ$



(b) $wt = 45^\circ$



(c) $wt = 90^\circ$



(d) $wt = 180^\circ$

그림 5 wt에 따른 와류 분포 특성

5. 결론

이상의 해석 결과로 볼 때 유한 요소법을 이용한 와류 분포 해석에는 Current Vector Potential의 도입이 필수적임을 알 수 있었으며, 또한 시간 미분항의 취급에는 차분법(B법)이 매우 유용함을 알 수 있었다. 앞으로 본 해석 방법에 도선들의 비선형성등을 고려한 다면 전기 기기의 설계 및 개발 분야에서의 응용을 위한 와류 특성 해석에 매우 정밀도를 높일수 있으리라 사료된다.

참고 문헌

- 1) 임달호, 김찬오, "증전기의 설계에 따른 전계 자기 분포 해석을 위한 기본이론의 적용 방법", 대한전기 협회 조사연구논문, Vol. 6, pp. 1 - 73, 1983
- 2) 中田高藏, 石原好史, 高橋則雄, 河瀬慎洋, "エディタレントの電流密度分布の有限要素法", 日本電気学会情報処理大会論文集, pp. 80-9, pp. 31-41, 1980
- 3) 中田高藏, 河瀬慎洋, "有限要素法による非線形逆流磁界解析", 日本電気学会 論文誌, Vol. 104-B, No. 6, pp. 66-62, 1984
- 4) Takehisa Hara, Tadashi Naito, Juro Umoto, "Time - periodic Finite Element Method For or Nonlinear Diffusion Equation", IEEE Trans., Vol. MAG - 21, No. 6, pp. 2261 - 2264, 1985
- 5) Frederic BOUILLAUD, Adel RAZEK, "Dynamic Model For Eddy Current Calculation In Saturated Electrical Machines", IEEE Trans., Vol. MAG - 19, No. 6, pp. 2639 - 2642, 1983
- 6) A.M. Kamar, "Solution Of Nonlinear Eddy Current Problems Using Residual Finite Element Method For Space And Time Discretization", IEEE Trans., Vol. MAG - 19, No. 5, pp. 2204 - 2206, 1983
- 7) 임달호, "전기계의 유한요소법", 동명사, 1987
- 8) K.H. Huebner, E.A. Thornton, "The Finite Element Method for Engineers (2/ed)", John Wiley & Sons, Inc., 1982
- 9) L.J. Segerlind, "Applied Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1976
- 10) O.C. Zienkiewicz, K. Morgan, "Finite Element And Approximation", John Wiley & Sons, Inc., 1983