WALSH 함수에 의한 쌍일차계의 관측자설계에 관한 연구

안 두 수
성균관 대학교 전기공학과 교수

김 종 부
성균관 대학교 전기공학과 석사 과정

A study on the observer design of bilinear system via walsh function

DOO S. ANN
SUNG KYUN KWAN UNIV.PROF.

JONG B. KIM
SUNG KYUN KWAN UNIV.GRADUATE STUDENT

ABSTRACT

In this paper the observer design problem in bilinear systems is studied using the Walsh functions as approximating set of funtions to find a finite series expansion of the state of bilinear system. A classical Liapnove method , to finding a class of observer feedback matrix , is applied to ensure uniform asymtotic stability of the observation error dynamics. An algorithm is derived for observer state eq. via Walsh funtion. The basic objective is to develop a computational algorithm for the determination of the coefficients in the expansion. This approach technique gives satisfactory result as well provides precise and effective method for the bilinear observer design problem.

1. 서 론

주기적인 임의의 파형은 Walsh함수의 급수로 표현될수 있다.Walsh함수의 유한 급수 전개를 고려한다면 그 파형은 계단식으로 접근될 것이며 그 step의 높이는 세부구간에서의파형의 평균값이 된다. 이 평균값은 Walsh 함수의 계수의 조합에 의해 결정되며 Walsh함수의 특성 즉 orthogonality 및[2,3] completeness와 multiplication에 의해 쉽게 결정된다. Walsh함수가 제어 이론에 도입된 것은 73년 Corrington에 의한것이 처음이지만 완벽하진 못했고,이를 체계적으로 정립한것은 75년 Chen에의한 적분연산자의 개념이 정의되고 부터이다.[7,12] 이들의 기본적인 착상은 Walsh함수의 적은 역시 Walsh함수로 전개되므로,주어진 계는 적분 방정식으로 변환하고 Walsh 함수를 도입하면 그 계의 특성을 간단한 대수식으로 알수있게 된다는 점에있다.[7,11,1,2] 그러나 계의 해석이나 상태 추정등의 문제에 적용될때 필수적으로 Kronecker product에 의한 고차행렬의 역변환시 필요하게되어 간단한 반복적인 형태를 발견하지 않고는 문제 해결에 별 도움을 주지못한다.선형계에 적용할때는 반복적인 형태가 어렵지 않게 발견되지만 주어진 계가 비선형 일때엔 간결한 형태가 발견되지 않아 Walsh함수를 적용하기 힘들다는 점이 지적되어왔다.[6,4] 본 연구에서는 이러한 점을 보완하여 Walsh함수의 적은 항수를 반복적으로 이용하여 보다쉽게 쌍일차계의 관측자의 상태를 결정하는 문제를 고찰한다. 관측 궤환 행렬은 쌍일차계의 오차방정식을 만들어 그의 최소자승 오차가 되도록하는 Liapnov함수 적용 기법에의해 구해진값을 이용하였다.[10,11] 본 연구의 주요 목적은 Walsh함수의 유한 급수 전개를 이용하여 전개된 관측자 상태에 대한 Walsh 계수들을 반복적으로 결정할 수 있도록하는 알고리즘을 개발 하는데 있다.

2. 쌍일차계의 관측자 설계

본 연구에서는 비선형계중 다음과같은 쌍일차계에 대해서 고려한다.

$$\dot{X} = A_0 X + B\ U + \sum_{i=1}^{\nu} A_i X\ U_i \quad , X(0)=X_0 \qquad 2.1$$

$$Y = C\ X$$

이 때의 관측자 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\hat{X}} = A_0 \hat{X} + B\ U + \sum_{i=1}^{\nu} A_i X\ U_i + H_0 C\ (X - \hat{X}) + \sum_{i=1}^{\nu} H_i C\ (X - \hat{X})\ U_i \qquad 2.3$$

H_i는 관측 궤환 행렬이며 이며, H 는 관측오차(Observation error) 방정식 즉

$$e \triangleq \hat{X} - x \qquad 2.4$$

$$\dot{e} = (A_0 - H_0 C)e + \sum_{i=1}^{\nu} (A_i - H_i C)\ U_i\, e \qquad 2.5$$

를 안정하게 하도록 quadratic Liapunov 함수에 적용시켜 얻을수있다.[8,9]

$$V(e) \triangleq e^T K e \qquad 2.6$$

라고하면 Liapnov함수를 미분하여 오차방정식을 대입하고 정리하면

$$P A_o + A_o^T P - 1/\Theta\ C^T R\ C + Q = 0$$

에서 positive definite 인 Ricatti 방정식의 해를 결정할수 있는데 이것이 결정되면

$$H_o = (1/2\Theta)\ P^{-1} C^T R \qquad 2.7$$

$$H_i = P^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha_i \\ \beta_i^T \end{bmatrix} \qquad 2.8$$

가 결정된다.

$$Q = Q^T > 0$$

으로서 임의의 positive definite 행렬이다.
여기서 α_i, β_i 는

$$P A_i + A_i^T P \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \beta_i^T & 0 \end{bmatrix}$$

이고 $R = 1/\theta\ I_p$ 이다.

θ : 충분히 작은 임의의 양의값 이다.

3. Walsh 함수 접근에 의한 쌍일차계의 관측자

Walsh함수는 시간구간 [0,1)에서 정의되고 1은 norm값이므로 식 2.3은 Walsh함수를 적용하여 일반화된 수식으로 표현하기 위해 $\tau = \alpha t$ 로 고려하면 다음과 같다.

$$\dot{\hat{X}}(\tau) = \hat{A}_o \hat{X}(\tau) + \sum_{i=1}^{p} \hat{A}_i \hat{X}(\tau)\ U_i(\tau) + \hat{B}\ U(\tau) + \hat{H}_o C\ X(\tau) + \sum_{i=1}^{p} \hat{H}_i C\ \{ X(\tau)\ U(\tau) \} \qquad 3.1$$

where $\hat{A}_o = \frac{1}{\alpha}(A_o - H_o C)$, $\hat{A}_i = \frac{1}{\alpha}(A_i - H_i C)$
$\hat{B} = \frac{1}{\alpha} B$
$\hat{H}_o = \frac{1}{\alpha} H_o$, $\hat{H}_i = \frac{1}{\alpha} H_i$

위 식에서 Walsh함수의 유한급수 전개로 $\dot{\hat{X}}(\tau)$와 $U(\tau)$를 전개시켰다고 하면

$$\dot{\hat{X}}_i(\tau) = Z_i^T Wal(\tau) \qquad 3.2$$

$$U_i(\tau) = U_i^T Wal(\tau) = Wal^T(\tau)\ U_i \qquad 3.3$$

$$Z_i^T = [\ Z_i(0)\ \ Z_i(1)\ \ \ldots\ \ Z_i(m-1)\ ]$$
$$U_i^T = [\ U_i(0)\ \ U_i(1)\ \ \ldots\ \ U_i(m-1)\ ]$$
$$Wal = [\ Wal(0,\tau)\ \ \ldots\ \ Wal(m-1,\tau)\ ]^T$$

가 되며 Walsh계수인 $Z_i(j)$ 와 $U_i(j)$는 직교성에의해 적분 최소 자승 오차를 최소화하도록 결정되며 다음과 같다.[7,12]

$$Z_i(j) = \int_0^1 \dot{\hat{X}}_i(\tau)\ Wal(i,\tau)\ dt \qquad 3.4$$

$$U_i(j) = \int_0^1 U_i(\tau)\ Wal(j,\tau)\ d\tau \qquad 3.5$$

또한 식 3.1에 Walsh 함수를 직접 도입할수 없으므로 적분식으로 변환되어야 하는데 식 3.2 와 3.3 적분식 또 3.2 의 적분과 3.3 식의 곱으로 된 항수의 적분과 Walsh적분 연산자의 관계를 규명하여야 한다.

$$\hat{X}(\tau) = \int_0^1 \dot{\hat{X}}(\tau)\ d\tau$$
$$= Z_i^T\ P\ Wal(\tau) \qquad 3.6$$

$$\int_0^1 U_i(\tau)\ d\tau = U_i^T P\ Wal(\tau) \qquad 3.7$$

여기서 P 는 적분을 위한 연산자로서 다음의 관계에서 정의되는 행렬이다.

$$\int_0^t Wal(\tau)\ d\tau \triangleq P\ Wal(t) \qquad 3.8$$

$$P = \begin{bmatrix} P(m/2) & (-1/2m)I \\ (1/2m)I & 0 \end{bmatrix} \qquad 3.9$$

또한 $\hat{X}_i(\tau) * U_i(\tau)$는 식 3.3 , 3.6 로부터 다음과 같음을 알수 있다.[4,13]

$$\hat{X}_i(\tau) * U_i(\tau) = Z_i^T P\ Wal(\tau)\ Wal^T(\tau)\ U_i$$
$$\triangleq Z_i^T P\ WAL(\tau) U_i \qquad 3.10$$
$$= Z_i^T P\ U_i\ Wal(\tau)$$

$WAL(\tau)$는 m*m 행렬로 Walsh 함수의 곱으로 다음과 같은 관계를 취한다.

$$WAL(\tau) = \begin{bmatrix} Wal(0,t)\ Wal(1,t) & \ldots & Wal(0,t)\ Wal(m-1,t) \\ \vdots & & \vdots \\ Wal(i,t)\ Wal(0,t) & \ldots & Wal(i,t)\ Wal(m-1,t) \\ \vdots & & \vdots \\ Wal(m-1,t) Wal(0,t) & \ldots & Wal(m-1,t) Wal(m-1,t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Wal(0 \oplus 0,t) & \ldots\ldots & Wal(0 \oplus m-1,t) \\ \vdots & & \vdots \\ Wal(i \oplus 0,t) & \ldots\ldots & Wal(i \oplus m-1,t) \\ \vdots & & \vdots \\ Wal(m-1 \oplus 0,t) & \ldots\ldots & Wal(m-1 \oplus m-1,t) \end{bmatrix}$$

.... 3.11

여기서 ⊕ 는 modulo - 2 - addition 을 의미한다.
식 3.10의 관계는 U 의 각 요소를 $u_i(j \oplus k, t)$로 취하므로써 얻어진다.

$$U_i = [\, u_{j,k} \,] \qquad 3.12$$
$$u_{jk} = u_i(j \oplus k,\ t)$$

예를 들어 m = 4 라고 하면

$$WAL(\tau)\ U_i = \begin{bmatrix} Wal(0,\tau) & Wal(1,\tau) & Wal(2,\tau) & Wal(3,\tau) \\ Wal(1,\tau) & Wal(0,\tau) & Wal(3,\tau) & Wal(2,\tau) \\ Wal(2,\tau) & Wal(3,\tau) & Wal(0,\tau) & Wal(1,\tau) \\ Wal(3,\tau) & Wal(2,\tau) & Wal(1,\tau) & Wal(0,\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i(0) \\ U_i(1) \\ U_i(2) \\ U_i(3) \end{bmatrix} \qquad 3.13$$

$$= \begin{bmatrix} U_i(0) & U_i(1) & U_i(2) & U_i(3) \\ U_i(1) & U_i(0) & U_i(3) & U_i(2) \\ U_i(2) & U_i(3) & U_i(0) & U_i(1) \\ U_i(3) & U_i(2) & U_i(1) & U_i(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Wal(0,t) \\ Wal(1,t) \\ Wal(2,t) \\ Wal(3,t) \end{bmatrix}$$

$$= U_i Wal(\tau)$$

식 (3.2) - (3.12)의 관계를 식 3.1에 도입하면 다음의 식으로 변환된다.

$$Z^T Wal(\tau) = \hat{A}_o Z^T P\ Wal(\tau) + \sum_{i=1}^{\nu} \hat{A}_i Z^T P\ U_i Wal(\tau) + \hat{B}\ U^T Wal(\tau) + \hat{H}_o C\ Z^T P\ Wal(\tau) + \sum_{i=1}^{\nu} \hat{H}_i C\ X^T P\ U_i Wal(\tau) \qquad 3.14$$

$$\begin{bmatrix} Z_{C_0} \\ Z_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{Z}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} = \left[\hat{A}_o \circledast P^T\right] \begin{bmatrix} Z_{C_0} \\ Z_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{Z}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\nu}\left[\hat{A}_i \circledast (PU_i)^T\right] \begin{bmatrix} Z_{C_0} \\ Z_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{Z}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} + \left[\hat{B} \circledast I\right] \begin{bmatrix} U_{C_0} \\ U_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{U}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} + \left[(\hat{H}_o C) \circledast P^T\right] \begin{bmatrix} Z_{C_0} \\ Z_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{Z}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\nu}\left[\hat{H}_i C \circledast (PU_i)^T\right] \begin{bmatrix} X_{C_0} \\ X_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{X}_{C_{m-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \left[(\hat{A}_o + \hat{H}_o C) \circledast P^T\right] \begin{bmatrix} Z_{C_0} \\ Z_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{Z}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\nu}\left[\hat{A}_i \circledast (PU_i)^T\right] \begin{bmatrix} Z_{C_0} \\ Z_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{Z}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{C_0} \\ K_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{K}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} \qquad 3.15$$

Where
$$\begin{bmatrix} k_{C_0} \\ k_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{k}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} \triangleq \left[\hat{B} \circledast I\right] \begin{bmatrix} U_{C_0} \\ U_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{U}_{C_{m-1}} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\nu}\left[(\hat{H}_i C) \circledast (PU_i)^T\right] \begin{bmatrix} X_{C_0} \\ X_{C_1} \\ \cdot \\ \dot{X}_{C_{m-1}} \end{bmatrix}$$

⊛ 는 Kronecker product 를 의미한다.
식 3.15에서 Z_{C_i} 에 대하여 정리하면 관측 상태를 알 수 있지만 이 식을 그대로 이용한다는 것은 고차 행렬의 역변환을 필요로 하게되어 부족한 감이있다. 이를 다음과 같이 보완할수 있다.
정의구간을 m개의 세부구간으로 나누었다고 할때 만일 α = m 이라고 하면 정의구간은 [0,1/m] 로 되고 연산 행렬은 P=1/2 로된다.
또한α= m/2 이라고 하면 정의구간은 [0,2/m] 이되고

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

가된다.
이렇게 Walsh함수 전개 항 수 를 최소로하고 Scailing 된 수식에 Walsh함수를 도입하면 적분연산자를 m개 항으로 늘일때 필요로한 (mn * mn)행렬의 역변환을 하지 않고도 다음과 같은 연차적인 형태로 각각의 관측자 상태를 평가할수 있게된다.

$$Z_{C_i} = F_o R_o + W_{C_i} \qquad i=0,1,2...m-1\ , W_{C_0}=0 \qquad 3.16$$

$$Z_{C_{(i+1)}} = F_1 S_{10} Z_{C_i} + F_1 R_1 \qquad 3.17$$

$$W_{C_{(i+1)}} = \{ (Z_{C_i} + Z_{C_{(i+1)}}) + (Z_i - Z_{C_{(i+1)}}) \} / 2 \qquad 3.18$$

$$F_i = [I - S_{ii}]^{-1}$$

$$R_o = (\, P_2 + H_{o1}\,)\ F_1 S_{10} + K_o$$

$$R_1 = K_1$$

$$K_{C_0} \triangleq [\,\hat{B} \circledast I\,]\,[\,U_{C_i}] + \sum_{i=1}^{N} [\,\hat{H}_i C \circledast (\,P\,U_i)^T\,]\,X_{C_i} \qquad (\,i = 0)$$

$$K_{C_i} \triangleq [\,B \circledast I\,]\,[\,U_{C_i}] \qquad (\,i \neq 0\,)$$

$$H_{10} = \sum_{i=1}^{N} [\hat{A}_i \circledast (P_0 U_1)^T]$$

$$H_{11} = \sum_{i=1}^{N} [\hat{A}_i \circledast (P_0 U_2)^T]$$

$$H_{00} = \sum_{i=1}^{N} [\hat{A}_i \circledast (P_0 U_0)^T]$$

$$S_{11} = H_{11}$$

$$S_{10} = -P_2 + H_{10}$$

$$S_{00} = P_1 + (P_2 + H_{01}) F_1 S_{10} + H_{00}$$

$$P_i = (1/\dot{2})\,(\hat{A} + H_0 C\,)$$

$$P_{T1} = [\,P_1\,P_{21} \ldots P_{n1}\,]$$

$$U_i = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix}$$

4. 적 용 예

다음과 같은 2차 쌍일차계를 고려해보자.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} X\,U$$

$$Y = [\,1 \;\; 0\,]\,X$$

$$U\,(t) = e^{-at}\mathrm{COS}(t)$$

이때 H_i와 P 는 식 2.6 ,2.7 ,2.8 에서 다음과 같이 결정되므로

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 23.5 \end{bmatrix} \qquad P = P^T > 0$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 17/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.75 \end{bmatrix}$$

관측자 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\hat{X}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \hat{X}\,U + \begin{bmatrix} 17/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\,X - \hat{X}\,) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 21.75 & 0 \end{bmatrix} (\,X - \hat{X}\,)\,U$$

식 3.16 ,3.17 ,3.18 에 의해 구해보면 그림과 같다. 그런데 $\dot{\hat{X}}(t) = Z\,P\,\mathrm{Wal}$ 이므로 각 구간에서 $\hat{X}(t) = Z\,P\,\mathrm{Wal}(t)$ 이다.

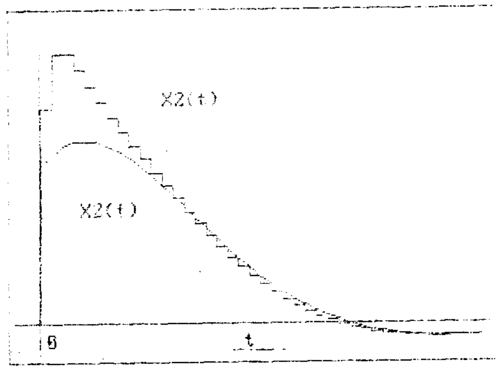

그림 1. 관측자의 상태 변수
(Fig 1. state variable of observer)

그림1에서 $\hat{X}_2(t)$는 Walsh함수에 의한 관측자의 상태 변수를 나타낸다.
그림2는 System noise 및 measurement noise의 공분산이 각각 0.01 , 0.021 일때의 값이고,이를 이용하여 본 연구에 의한 방법으로 관측된 상태변수는 그림3과 같다.

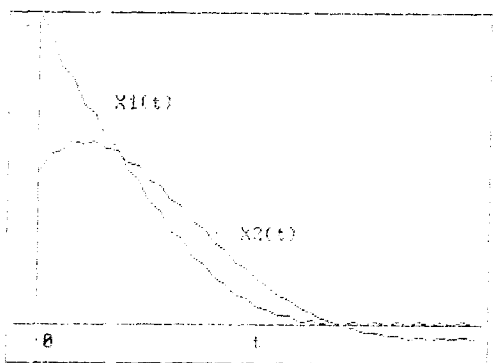

그림 2. 측 정 값 : Y (t) = X_1(t)
(Fig 2. measurement value ; Y (t) = X_1(t))

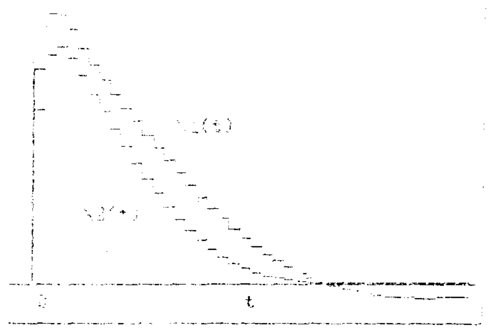

그림 3. WF에 의한 관측자의 상태 변수
(Fig 3. State variable of observer via WF)

여기에서는 편의상 평균이 영인 잡음을 고려하였는데 잡음에 별영향을 받지 않는 것은 본 연구에 의한 접근 방법이 미분방정식으로 표현된 계를 적분방정식으로 변환 처리되는 때문이다.

5. 결 론

쌍일차계의 관측자 설계를 위한 Walsh함수 접근방법에 관해 연구하였다.
본 연구에서는 Walsh함수의 유한 급수 전개를 이용하여 전개된 관측자의 상태에 대한 Walsh계수들을 연차적으로 결정할수 있도록 하는 알고리즘을 제시하였다.
Walsh 함수를 이용하여 쌍일차계의 관측자 상태방정식을 선형 대수방정식으로 변환하였고,
Walsh 전개항의 최소항을 이용하여 Walsh함수 정의 구간에 관계없이 연차적으로 계수들을 결정할 수 있음을 보였다.

참 고 문 헌

1.C.F.chen and C.H.Hsiao :" A state space approach to Walsh series solution of linear systems"; int.j.systems,sci,vol.6.no.9,pp 838-858,1975
2.C.F.Chen and C.H.Hsiao;" Time domain synthesis via Walsh function ";,proc.IEE,vol.122,NO.5, pp 565-570,May,1975
3.ING-Rong Horng and Shinn-jang ho;"Discrete Walsh operational matrices for analysis and optimal control of linear digital systems "; INT.J.control,vol.42,NO.6,pp1443-1455,1985
4.V.R.Karanam;"Bilinear systems identification by Walsh funtions";IEEE,VOL.AC-23,NO.4,August pp709-713,1987
5.Ricard J.Weidner and Robert J.Mulholland;"Kronecker product representation for the solution of the general linear matrix equation"; IEEE,vol.AC-25,NO.3,June ,pp563-564,1980
6.C.F.Chen ;"A Walsh series direct method for solving variation problems";J.Franklin inst. vol.300,NO.4,pp265-280,1975
7.M.S.Corrington;"Solution of differential and integral equations with Walsh funtion"; IEEE. Trans.circuit theory ,CT.20,NO.5, pp470-476,1973
8.DERESE and Prof.E.J.Noldus,D.Sci.:"Nonlinear control of bilinear systems":"IEE proc. vol.127,pt,D,no.4,july pp169-175,1980
9.DERESE P.STEVENS and E.NOLDUS;"Observers for bilinear systems with bounded input"; INT.J.systems sci.,vol.10,NO.6,pp649-668,1979
10.V.R.Karanam,P.A.Frick and R.R.Hohler;"Bilinear systems identification by WF";IEEE , AC-23, pp709-713,1978
11."Shift Walsh matrix and delay defferential eq."IEEE AC-23,pp1023-1028,1978
12.ON the WF(1) N.J.Fine. Trans.Am.MATH.soc.,23,pp372-414, 1964
13.W.L.Chen,;"Analysis and optimization of time varing linear systems via Walsh funtions"; Int.j.con.vol.27,pp917-932,1978