'87 韓國自動制御學術會議論文集 1987. 10.16~17

LQ 조절기의 안정도 영역에 관한 연구

- 시간 영역에서의 해석 -

°김 상 우, 권 욱 현, 이 상 정
서울 대학교 제어계측공학과

A Study on the Stability Margin of the LQ Regulator

- Time Domain Analysis -

Sang Woo Kim, Wook Hyun Kwon, Sang Jeong Lee
Dept. of Contr. and Instr. Eng., Seoul National University

ABSTRACT

The stability margin of the LQ regulator is investigated in the time domain. It is shown that the same guaranteed gain margin as that of the frequency doman analysis can be obtained with simple assumptions for the continuous time systems. It is also shown that the allowable modelling error bound can be expressed in terms of system matrices and Riccati equation solution. Guaranteed gain margin and the allowable modelling error bound for the discrete time systems are also obtained by the similar procedures. In this case, through the some examples, the gain margin is shown to be less conservative than the frequency domain analysis result.

1. 서 론

연속시스템의 경우 단입출력 (Single Input Single Output) LQ 조절기의 이득여유 (Gain margin) 와 위상여유 (Phase margin) 가 매우 좋다는 것은 주지의 사실이다. $(\frac{1}{2},\infty)$ 의 이득여유와 60° 이상의 위상여유를 갖는다는 사실은 단입출력 LQ조절기가 플랜트의 변수가 어느 정도 변화해도 안정함을 얘기 한다. 다변수 (Multivariable) LQ 조절기의 경우에도 제어량 가중치 R 이 대각 행렬인 경우 비간섭 교란 (Noninteractive Perturbation) 에 대하여 단입출력의 경우와 같은 이득 및 위상여유를 갖는 다른 사실이 밝혀 졌다. [1,2] 그러나 LQ조절기가 이와 같이 우수한 안정도 여유를 갖고 있음에도 불구하고 아주 작은 모델링 오차에도 불안정해 질 수 있음이 하나의 예를 통하여 최근에 밝혀 졌다. [3] 이와 같은 사실에서 LQ 조절기의 보장된 안정도 여유와 상관없이 어느정도의 모델링 오차를 허용할 수 있는지를 분석해 볼 필요가 있다. 이와 같은 분석은 시간영역에서 Lyapunov 안정도 이론을 이용하여 할 수 있는데 Patel [4] 이 처음으로 LQ 조절기에서 허용될 수 있는 모델링 오차의 한계를 시스템 행렬들과 Riccati 방정식의 해의 특이치 (Singular value) 를 이용하여 표시하였다. 이후 시간영역에서의 해석은 LQ 조절기를 떠나서 보다 일반적인 시스템의 안정도 여유 해석을 위하여 많이 연구되었으며 보다 정확한 한계를 구하는데 많은 연구가 진행되고 있다. [5,6,7]

이산형 LQ조절기의 경우에는 그 안정도 여유가 Safonov [8] 에 의하여 처음으로 밝혀 졌고 최근에 Shaked [9] 가 Return Difference 행렬의 특이치의 하한을 시스템 행렬들의 특이치를 이용하여 표시하고 이를 이용하여 이득여유와 위상여유를 구했을 뿐 거의 연구되지 않고 있다. 또한 이들 방법은 모두 전달함수와 관련된 해석 방법들로 시간영역에서의 해석이 필요하다.

본 논문에서는 시간영역에서의 해석을 통하여 연속 LQ조절기의 경우 허용될 수 있는 모델링 오차의 한계를 간단히 구하고 어떤 경우에 이 한계가 매우 작아지는지를 검토 한다. 또한 $[\frac{1}{2},\infty)$ 보다 정확한 이득여유를 구하는 식을 유도 한다. 이산형의 경우에도 허용될 수 있는 모델링 오차의 한계를 구하고 그 한계의 특성을 검토한다. 이득여유를 구하는 새로운 식을 구하고 그 결과를 Shaked 의 결과 [9] 와 예제를 통하여 비교하여 우수성을 보인다.

2. 연속 시스템에서 LQ 조절기의 안정도 여유

플랜트를 상태공간 모델로 표시하면 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1}$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R^m$, $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ 이다. 이와같은 모델에 대하여 식 (2.2) 의 평가 함수를 최소로 하도록 제어량을 결정한 것이 LQ조절기이다.

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)\, dt \tag{2.2}$$

여기서 $Q \in R^{n\times n}$, $Q \geq 0$ 이고 $R \in R^{m\times m}$, $R > 0$ 이며 이때 제어량은

$$u(t) = -R^{-1}B'P\, x(t) = -K\, x(t) \tag{2.3}$$

으로 표시되고 P 는 다음의 대수 Riccati 방정식을 만족한다.

$$A'P + PA + Q - PBR^{-1}B'P = 0 \tag{2.4}$$

여기서 (A,B)는 제어 가능하고 $(A,Q^{\frac{1}{2}})$는 관측 가능하다. 실제 시스템은

$$\dot{x} = (A + \Delta A)\ x + (B + \Delta B)\ u \quad (2.5)$$

로 표시되며 ΔA 및 ΔB 는 모델링 오차를 나타내고 이들의 한계는 다음과 같다.

정리 1 : 플랜트 (2·5) 에 제어량 (2·3) 을 인가했을때 허용될 수 있는 ΔA 와 ΔB의 한계는 다음과 같다. (단 ΔA와 ΔB는 공존하지 않는다)

$$\bar{\sigma}(\Delta A) \le \frac{\underline{\sigma}(Q+PBR^{-1}B'P)}{2\ \bar{\sigma}(P)} \quad (2.6)$$

$$\bar{\sigma}(\Delta B) \le \frac{\underline{\sigma}(Q+PBR^{-1}B'P)}{2\bar{\sigma}(P)\ \bar{\sigma}(K)} \quad (2.7)$$

여기에서 $\underline{\sigma}(\cdot)$ 와 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 는 최소, 최대 특이치를 나타낸다.

증명 :([4]의 정리 2 참조) 플랜트 (2·5) 에 제어량 (2·3) 을 인가하면

$$\dot{x} = (A - BK + \Delta A - \Delta BK)\ x \quad (2.8)$$

이 되고 Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의하여 안정도를 판별한다.

$$V = x'Px \quad (2.9)$$

i) $\Delta B = 0$

$$\dot{V} = 2x'P\dot{x} = 2x'P(A-BK+\Delta A)\ x$$
$$= -x'(Q+PBR^{-1}B'PB-\Delta A'P-P\Delta A)\ x$$

$\dot{V} \le 0$ 이면 시스템은 안정하다.

$$\dot{V} \le 0 \Leftrightarrow Q+PBR^{-1}B'P-\Delta A'P-P\Delta A \ge 0$$
$$\Leftarrow 2\bar{\sigma}(\Delta A)\ \bar{\sigma}(P) \le \underline{\sigma}(Q+PBR^{-1}B'P)$$

ii) $\Delta A = 0$ 인 경우

$$\dot{V} = 2x'P(A-BK-\Delta BK)\ x$$
$$= -x'(Q+PBR^{-1}B'P+P\Delta BK+K'\Delta B'P)\ x \le 0$$
$$\Leftarrow 2\ \bar{\sigma}(\Delta B)\ \bar{\sigma}(P)\ \bar{\sigma}(k) \le \underline{\sigma}(Q+PBR^{-1}B'P)$$

(2·6) 식을 보면 Q와 R을 조정하여 ΔA의 한계를 임의로 크게 할 수 있다. 그러나 이 경우 (Q를 크게 하고 R을 작게 함) 궤환 이득 K가 커져서 ΔB 의 한계가 매우 작아진다. 개루우프 시스템이 최소위상 (Ninimum Phase) 인 경우 K를 임의로 크게 할 수 있으므로 이러한 경우 ΔB의 한계는 무한히 작아 진다. 그러므로 Q와 R을 선택할 때에 모델링 오차와의 관계를 살펴 보아야 한다. 제어루우프에 불확실성이 있을 경우에 폐루우프 시스템은

$$\dot{x} = (A - BLK)\ x \quad (2.10)$$

으로 표시되며 여기서 L은 불확실성을 나타내며 비간섭적 (Noninteractive) 인 경우에는 $L = \mathrm{diag}\,(l_1, \ldots, l_m)$ 으로 나타낼수 있다.

정리 2 : R 이 대각 행렬인 경우 시스템 (2·10) 에서 L 의 한계는 다음과 같이 표시된다. (Q > 0 인 경우)

$$l_i \ge \frac{K_{1i}^2 R_i - \underline{\sigma}(Q_{11}-Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}')}{2K_{1i}^2\ R_i} \quad (2.11)$$

여기서 $Ku = [k_1\ 0]$, $k_1 = \mathrm{diag}\ (k_{11}, \ldots, K_{1m})$

이고 $u'Qu = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix}$ 이다.

증명 : $V = x'Px$

$$\dot{V} = 2x'P\dot{x} = 2x'P(A-BLK)\ x$$
$$= -x'(Q+K'(RL+LR-R)K)\ x \le 0$$
$$\Leftrightarrow Q+K'(RL+LR-R)K \ge 0$$
$$\Leftarrow \begin{bmatrix} Q_{11}+2K_1^2RL-K_1^2R & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2K_1^2RL-K_1^2R+Q_{11}-Q_{12}\ Q_{22}^{-1}\ Q_{12}' \ge 0$$
$$\Leftarrow 2K_1^2RL \ge K_1^2R - \underline{\sigma}(Q_{11}-Q_{12}\ Q_{22}^{-1}\ Q_{12}')I_m$$
$$l_i \ge \frac{K_{1i}^2R_i - \underline{\sigma}(Q_{11}-Q_{12}\ Q_{22}^{-1}\ Q_{12}')}{2K_{1i}^2\ R_i}$$

이와 같이 {A,B,Q,R}에 대한 기본적인 가정만 있으면 LQ 조절기의 이득여유를 구할 수 있으며 Q > 0 인 경우 보다 정확한 범위를 구할 수 있다. $\det(Q)=0$ 인 경우에는 $\underline{\sigma}(Q_{11}-Q_{12}\ Q_{22}^{-1}\ Q_{12}')=0$ 이 되므로 $l_i \ge \frac{1}{2}$ 이 된다. R 이 대각행렬이 아닌 경우에는 보장할 수 있는 이득여유가 없다는 것은 주지의 사실이다. [2]

3. 이산 시스템에서의 LQ 조절기의 안정도 여유

이산형 시스템의 경우에도 연속시스템의 경우와 마찬가지로 모델링 오차의 한계와 이득여유를 구할 수 있다. 이산형 시스템은

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3.1)$$

로 표시되며 $x_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ 이다. 이 시스템에 대하여 (3·2) 식의 평가 함수를 최소로 하도록 제어량을 결정한다.

$$J = \sum^{\infty} (\ x_k'\ Q\ x_k + u_k'\ R\ u_k\ ) \quad (3.2)$$

여기서 $Q \in R^{n\times n}$, $Q \ge 0$, $R \in R^{m\times m}$, $R > 0$ 이다. 이때 제어량은

$$u_k = -(R+B'PB)^{-1}B'PA\ x_k = -Kx_k \quad (3.3)$$

으로 표시되고 P는 다음의 대수 Riccati 방정식을 만족한다.

$$P = A'PA + Q - A'PB(R+B'PB)^{-1}B'PA \quad (3.4)$$

여기서 (A,B)는 제어가능 하고 $(A,Q^{\frac{1}{2}})$는 관측가능하다. 실제 플랜트는 다음과 같이 표시되며 여기서 ΔA와 ΔB는 모델링 오차를 나타낸다.

$$\dot{x}_{k+1} = (A+\Delta A)x_k + (B+\Delta B)u_k \quad (3.5)$$

정리 3 : 실제 플랜트 (3.5) 에 제어량 (3.3)을 인가했을때 허용될 수 있는 ΔA 와 ΔB 의 한계는 다음과 같다. (단 ΔA 와 ΔB 는 동시에 공존하지 않는다)

$$\bar{\sigma}(\Delta A) \le \frac{c}{b+\sqrt{b^2+ac}} \qquad (3.6)$$

$$\bar{\sigma}(\Delta B) \le \frac{c/\bar{\sigma}(K)}{b+\sqrt{b^2+ac}} \qquad (3.7)$$

여기서 $a = \bar{\sigma}(P)$, $b = \bar{\sigma}(PA - PBK)$, $c = \bar{\sigma}(Q + K'RK)$ 이다.

증명 : (3.3) 식을 (3.5) 식에 대입하면

$$x_{k+1} = (A - BK + \Delta A - \Delta BK)\, x_k \qquad (3.8)$$

이 된다. Lyapunov 함수를 $V = x_k'Px_k$ 로 정의 한다.

i) $\Delta B = 0$ 인 경우

$$\Delta V = -x_k'(Q+K'RK-A'P\Delta A-\Delta A'PA+K'B'P\Delta A+\Delta A'PBK - A'P\Delta A)\, x_k < 0$$

$$\Leftarrow \underline{\sigma}(Q+K'RK)-2\bar{\sigma}(PA-PBK)\bar{\sigma}(\Delta A)-\bar{\sigma}^2(\Delta A)\bar{\sigma}(P) \ge 0$$

$$\bar{\sigma}(\Delta A) < \frac{-b+\sqrt{b^2+ac}}{a} = \frac{c}{b+\sqrt{b^2+ac}}$$

ii) $\Delta A = 0$ 인 경우

$$\Delta V = -x_k'(Q+K'RK-(K'B'P-A'P)\Delta BK-K'\Delta B'(PBK-PA) -(\Delta BK)'P(\Delta BK)\,)\, x_k \le 0$$

$$\Leftarrow \underline{\sigma}(Q+K'RK)-2\bar{\sigma}(\Delta B)\bar{\sigma}(k)\bar{\sigma}(PBK-PA)-\bar{\sigma}^2(\Delta B)\bar{\sigma}^2(k)\bar{\sigma}(P) \ge 0$$

$$a\bar{\sigma}^2(k)\bar{\sigma}^2(\Delta B)+2\bar{\sigma}(k)b\bar{\sigma}(\Delta B)-c < 0$$

$$\sigma(\Delta B) \le \frac{-b+\sqrt{b^2+ac}}{\bar{\sigma}(k)\,a} = \frac{c/\bar{\sigma}(k)}{b+\sqrt{b^2+ac}}$$

이산형 시스템의 경우는 연속시스템의 경우와 달리 Riccati 방정식의 해 P를 임의로 작게 만들수 없으며 궤환이득 K도 임의로 크게 만들수 없다. 그러므로 연속시스템의 경우와 달리 ΔA의 한계를 임의로 크게 만들수 없고 ΔB의 한계도 무한히 작아지지 않는다. 이러한 점에서 보면 연속시스템의 경우보다 모델링 오차에 견디는 정도가 좋다고 할 수 있다.

제어루우프에 불확실성이 있을때 폐루우프 시스템은 다음과 같이 표시된다.

$$x_{k+1} = (A - BLK)\, x_k \qquad (3.9)$$

여기서 L은 불확실성을 나타내며 비간섭적일때는 $L = \mathrm{diag}(l_1, \ldots, l_m)$ 으로 표시된다.

허용되는 L 의 범위를 구하는 Shaked 의 식은 다음과 같다

정리 4 : ([9], 정리 1) $F(z) = I + K(zI - A)^{-1}B$ 라 하면 $\underline{\sigma}(F(z)) \ge R_F > 0$ $|z| = 1$ 이 되며 R_F 는 다음식과 같다.

$$R_F^2 = \frac{\underline{\sigma}(R)}{\bar{\sigma}(R)+\bar{\sigma}(B'PB)}\left(1 + \frac{\underline{\sigma}^2(B)\underline{\sigma}(Q)}{\bar{\sigma}(R)(1+\bar{\sigma}(A))^2}\right) \qquad (3.10)$$

이를 이용하여 허용되는 L 의 범위를 구하면

$$\mathrm{GML} \le l_i \le \mathrm{GMH} \qquad (3.11)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{GML} &= 1/(1+R_F) \\ \mathrm{GMH} &= 1/(1-R_F) \end{aligned}\right] \qquad (3.12)$$

가 된다.

$\underline{\sigma}(F(z))$ 를 이용하지 않고 시간영역에서 허용되는 L 의 범위를 구하면 다음과 같다.

정리 5 : (3.9) 시스템이 안정할 수 있는 L의 범위는 다음과 같다.

i) R 이 대각행렬인 경우

$$LB_i \le l_i \le UB_i \qquad (3.13)$$

$$LB_i = \frac{a_2|K_{1i}| - \sqrt{K_{1i}^2 R_i a_2 + a_1 a_3}}{a_1|K_{1i}|}$$

$$UB_i = \frac{a_2|K_{1i}| + \sqrt{K_{1i}^2 R_i a_2 + a_1 a_3}}{a_1|K_{1i}|}$$

$$a_1 = \bar{\sigma}(B'PB)\ ,\ a_2 = a_1 + R_i\ ,$$

$$a_3 = \underline{\sigma}(Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}')$$

ii) R 이 대각행렬이 아닌 경우

$$LB_i' \le l_i \le UB_i' \qquad (3.14)$$

$$LB_1 = \frac{a_2|K_{1i}| - \sqrt{K_{1i}^2(\underline{\sigma}^2(R)+2a_1\underline{\sigma}(R)-a_1\bar{\sigma}(R))+a_1a_3}}{a_1|K_{1i}|}$$

$$UB_i = \frac{a_2|K_{1i}| + \sqrt{K_{1i}^2(\underline{\sigma}^2(R)+2a_1\underline{\sigma}(R)-a_1\bar{\sigma}(R))+a_1a_3}}{a_1|K_{1i}|}$$

여기서 $Ku = [K_1\ 0]$, $K_1 = \mathrm{diag}(K_{11}, \ldots, K_{1m})$

이고 $u'Qu = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{pmatrix}$ 이다.

증명 : (3.9)의 시스템에 대하여 Lyapunov 함수를 $V = x_k'Px_k$ 로 정의하면

$$\Delta V = -x_k'(Q+K')RL+LR-R-(L-I)B'PB(L-I))K \le 0$$

$$\Leftarrow Q+K'(RL+LR-R-(L-I)^2\bar{\sigma}(B'PB))K \ge 0$$

$$\Leftarrow u'Qu + \begin{pmatrix} K_1'(RL+LR-R-(L-I)^2\bar{\sigma}(B'PB))K_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ge 0$$

$$M(L) \triangleq \begin{pmatrix} Q_{11}+K_1'(RL+LR-R-(L-I)^2\bar{\sigma}(B'PB))K_1 & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{pmatrix} \ge 0$$

$$\Longleftrightarrow K_1'(RL+LR-R-(L-I)^2\bar{\sigma}(B'PB))K_1+Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}' \ge 0$$

i) R 이 대각 행렬인 경우

$M(L) \geqq 0$

$\Leftarrow K_{1i}^{2}(2l_iR_i - R_i - (l_i - 1)^2\bar{\sigma}(B'PB))$

$+\underline{\sigma}(Q_{11} - Q_{12}\,Q_{22}^{-1}\,Q_{12}') \geqq 0$

$K_{1i}^{2}a_1 l_i^2 - 2K_{1i}^{2}a_2 l_i + K_{1i}^{2}a_2 - a_3 \leqq 0$

이 식은 만족하는 l_i의 범위를 구하면 된다.

ii) R 이 대각 행렬이 아닌 경우

$M(L) \geqq 0$

$\Leftarrow K_{1i}^{2}(s l_i\underline{\sigma}(R) - \bar{\sigma}(R) - (l_i - 1)^2\bar{\sigma}(B'PB)$

$+\underline{\sigma}(Q_{11} - Q_{12}\,Q_{22}^{-1}\,Q_{12}') \geqq 0$

$K_{1i}^{2}a_1 l_i^2 - 2K_{1i}^{2}a_2 l_i + K_{1i}^{2}(\bar{\sigma}(R) + a_1) - a_3 \leqq 0$

이 식을 만족하는 l_i 의 범위를 구하면 된다.

(3·13) 식과 (3·14) 식을 비교해 보면 R 이 대각 행렬인 경우에 L이 더 넓은 범위를 갖을 수 있음을 알 수 있다. det(Q) = 0 인 경우에는 $a_3 = 0$으로 놓으면 된다. 어느 경우이던지 연속 시스템의 경우 처럼 일률적으로 보장된 L 의 영역은 주어지지 않는다. (3·11) 식의 Shaked 의 결과와 (3·13) 식의 결과를 몇개의 모델 [10] 에서 Q와 R을 적당히 변화 시켜 가면서 비교해 보았는데 그 결과는 아래와 같다.

예 1 : $A = \begin{bmatrix} 0.9512 & 0 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4.877 & 4.877 \\ -1.1895 & 3.569 \end{bmatrix}$

Q	$\begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$	I_2	$100\ I_2$	$\begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
R	$\begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	I_2	I_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	I_2
[LB,UB]	0.2245, 2.4355 0.3730, 7.5667	0.4053, 1.6331 0.6457, 1.3927	0.4434, 1.5570 0.6787, 1.3217	-3.8319,9.8439 0.7818, 1.2583	0.8755, 1.1658
[GML,GMH]	0.7758, 1.4064	0.7894, 1.3628	0.8113, 1.3032	-0.9245, 1.089	0.8755, 1.1658

예 2 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.08015 \\ 0 & 0.6313 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0.003396 \\ 0.06308 \end{bmatrix}$

Q	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	I_2	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
R	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	2×10^{-5}	1
[LB,UB]	0.6695, 1.9745	0.1839, 1.8252	0.0083, 1.9936	0.4143, 1.9262	0.1812, 34.756
[GML,GMH]	"	0.6763, 1.9184	0.8343, 1.2478	0.6819, 1.8747	0.5073, 34.9149

예 3 : $A = \begin{bmatrix} 0.9512 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9048 & 0.0669 & 0.0226 \\ 0 & 0 & 0.8825 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9048 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 4.877 & 4.877 \\ -1.1895 & 3.569 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Q	diag(0.05,0.02,0,0)	I_4	diag(1,1,0.01,0.01)	$100\ I_4$
R	diag (0.333,3)	diag (0.333,3)	diag (0.333, 3)	I_2
[LB,UB]	0.6675, 1.9925 0.5362, 7.4035	0.4202, 1.5824 0.5949, 1.5187	0.5281, 1.4845 0.6554, 1.4582	0.4446, 1.5558 0.6794, 1.3210
[GML,GMH]	0.7762, 1.4051	0.9033, 1.1199	0.9280, 1.0842	0.8113, 1.3032

이상의 결과를 살펴보면 대부분의 경우에 본 논문에서 구한 범위가 우수함을 알 수 있다. 특히 $\bar{\sigma}(Q)$ 와 $\underline{\sigma}(Q)$ 가 서로 다르고 $\bar{\sigma}(R)$ 과 $\underline{\sigma}(R)$의 값이 다를때 우수함을 알 수 있다. det(Q)=0 인 경우에는 같은 결과를 얻음을 알 수 있고 R이 매우 작은 경우에 있어서 Shaked 의 결과가 상한값에서 약간 우수한 경우가 있음을 알 수 있다. Shaked 의 결과는 하한이 0.5보다 작을 수가 없다. 즉 이득감쇠 (Gain reduction) 여유가 -6dB 보다 작아 질 수 없다. 이득여유를 dB 로 환산하여 보면, 즉 20log (상한) -20log (하한) 을 계산해 보면 본 논문의 결과가 모든 경우에 우수함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 시간 영역에서의 해석방법을 이용하여 연속 및 이산형 시스템의 LQ 조절기의 안정도 여유를 구하여 보았다. 연속시스템의 경우에 주파수영역의 해석에서는 매우 많은 가정을 통하여 안정도 여유를 구하지만 시간영역의 해석 방법을 이용하면 기본적인 가정만을 통하여 안정도 여유를 구할 수 있다. 또한 허용될 수 있는 모델링 오차의 한계를 구하고 R이 매우 작을때 허용될 수 있는 모델링 오차가 구조적으로 매우 작음을 보였다.

이산형 시스템의 경우에서도 허용될 수 있는 모델링 오차의 한계를 구했으며 구조적으로 항상 어느 정도의 모델링 오차를 허용할 수 있음을 보였다. 또한 이득여유를

구하는 새로운 식을 유도하여 Shaked의 결과와 비교하였다. 여러가지의 예를 통하여 거의 모든 경우에 본 논문에서 구한 결과가 우수함을 입증 하였다. 특히 다입출력 시스템의 경우에는 각 루우프 별로 이득,여유를 구할 수 있으며 결과도 우수함을 보였고 $\bar{\sigma}(Q) > \underline{\sigma}(Q)$ 이고 $\bar{\sigma}(R) > \underline{\sigma}(R)$ 인 경우에, $\underline{\sigma}(Q) > 0$ 인 경우에 좋은 결과를 얻을 수 있다.

5. 참 고 문 헌

[1] M.G. Safonov and M.Athans, "Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators," IEEE T-AC, Vol. AC-22, Apr. 1977.

[2] N.A. Lehtomaki, N.R. Sandell and M.Athans, "Robustness Results in Linear Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Design," IEEE T-AC Vol. AC-26, Feb. 1981.

[3] E.Soroka and U.Shaked, "On the Robustness of LQ Regulators," IEEE T-AC, Vol. AC-29, July 1984.

[4] R.V. Patel, M.Toda and B.Sridhar, "Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty," IEEE T-AC, Vol. AC-22, Dec. 1977.

[5] Z.Liang and R.K. Yedavalli, "Reduced Conservatism in the Ultimate Boundedness Control of Mismatched Uncertain Linear Systems," Proc. of American Control Conference, June 1985.

[6] R.K. Yedavalli, "Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Models," IEEE T-AC, Vol. AC-30, June 1985.

[7] R.K. Yedavalli and Z.Liang, "Reduced Conservatism in Stability Robustness Bounds by State Transformation," IEEE T-AC, Vol. AC-31, Sep. 1986.

[8] U. Shaked, "Guaranteed Stability Margins for the Discrete-Time Linear Quadratic Optimal Regulator," IEEE T-AC, Vol. AC-31, Feb. 1986.

[9] H. Kwakernaak and R.Sivan, Linear Optimal Control Systems, John Willey & Sons, Inc. 1972.