

비선형 시스템 해석을 위한 볼테라 시리즈의 응용

성 단 근

한국과학기술대학 전자, 전산학부

Application of Volterra Functional Series
to the Analysis of Nonlinear SystemsSUNG, DAN KEUN
Korea Institute of Technology

Abstract

The input-output relation for nonlinear systems can be explicitly represented by the Volterra functional series and it is characterized by the Volterra Kernels. A block diagram reduction method is introduced to determine the Volterra Kernels for the nonlinear systems represented by nonlinear differential equations. Degree of nonlinearity is defined and analyzed for the analysis of nonlinear systems.

I. 서론

많은 자연현상이 비선형적인 특성을 나타내고 있으나 이것을 과학적으로 규명하는 데는 많은 어려움이 있으며 현재로는 극히 제한된 범위에 있는 문제에 대한 해석이 있을뿐 보다 더 일반적인 비선형시스템의 해석기법이 나오고 있지 않다.

Taylor 시리즈의 functional으로의 확장으로 Vito Volterra [1]가 1910년 경에 무한의 functional series가 도입된 이후 이것을 볼테라 시리즈가 불리어지고 있는데 이 시리즈는 Wiener에 의해 처음 비선형 시스템을 나타내는데 사용 되었으며 백색 가우시언 (White Gaussian) 입력에 대하여 Orthogonal functional series [2]로 발전되었다. 그후 볼테라 시리즈의 연구는 1950년 말부터 M.I.T. 연구그룹 [3]과 Barrett[4]와 Flake [5] 등에 의해 본격화 되었고 1960년대 중반부터 각 분야에 걸쳐 이 볼테라 시리즈의 응용에 관한 연구가 활발히 전개되고 있다. 주요한 응용분야는 통신

[6], 회로 [7, 8, 9, 10], viscoelastic material [11, 12], eigenvalue 문제 [13], 역학시스템 [13] 등이다.

본 논문에서는 비선형 미분방정식에 의해 나타낼 수 있는 비선형 시스템의 입력-출력의 상관관계를 규명하기 위한 볼테라 커널을 계산하고 이 볼테라 커널을 이용하여 주어진 입력에 따른 출력을 예측하여 전체적인 입출력 관계를 규명한다. 나아가 일반적인 비선형 시스템에서의 비선형의 정도를 나타내는 비선형도 (degree of nonlinearity)를 정의하며 여러 특성들을 고찰한다.

II. 볼테라 시리즈에 의한 비선형 시스템의 표현

아래와 같은 상미분방정식 (Ordinary Differential Equation)의 형태로 나타낼 수 있는 시불변 비선형 시스템 (Time-invariant Nonlinear Systems)을 고려해 보자.

$$L[y(t)] + F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)] = x(t) \quad (2.1)$$

여기서 L은 선형 미분연산자이고, F는 비선형 연산자이며 모든 초기조건은 0(zero)로 가정한다. 이러한 일반적인 형태의 비선형 시스템의 해를 볼테라 시리즈를 이용하여 나타내면

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n[x(t)] \quad (2.2)$$

로 주어지며, 여기서

$$H_n[x(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} h_n(t_1, t_2, \dots, t_n) x(t-t_1) \dots x(t-t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (2.3)$$

H_n 은 n 차 볼테라 연산자이며 $H_n[x(t)]$ 는 n 차 원의 일반화된 convolution 적분 형태로서 일반화한 n 차의 입력 응답에 해당하는 n 차 볼테라 커널인 $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 에 n 개의 입력 (forcing inputs)의 곱으로 나타내어진다. 이러한 볼테라 시리즈에 의한 비선형 시스템 입력력 관계를 나타내는 것은 볼테라 커널이며 이 볼테라 커널을 구하는 것이 비선형 시스템 해석의 관건이 된다.

볼테라 커널을 구하기 위해 식 (2.1)로 표현된 비선형 방정식으로부터 선형 미분연산자의 역변환 연산자 L^{-1} 을 도입하여 식 (2.4)와 같이 변환한다.

$$y(t) = L^{-1}[x(t)] - L^{-1}[F(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))]. \quad (2.4)$$

L 연산자의 라플라스변환의 일반형, $L\{L\}$ 은

$$L\{L\} = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n = K(s). \quad (2.5)$$

식 (2.4)를 라플라스변환하면

$$Y(s) = \frac{X(s)}{K(s)} - \frac{1}{K(s)} L\{F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)]\}. \quad (2.6)$$

여기서 $G(s) = 1/K(s)$ 라 하면 식 (2.6)을 역변환하면 적분 방정식의 형태가 주어진다.

$$y(t) = \int_0^t g(t-t_1)x(t_1)dt_1 - \int_0^t g(t-t_1)F[y(t_1), y'(t_1), \dots, y^{(n-1)}(t_1)]dt_1. \quad (2.7)$$

이 적분방정식으로부터 연속적인 근사방법 (Successive Approximation Technique)에 의해 근을 구할 수 있는데 시간영역 (Time Domain)에서 계산하는 것은 계산이 복잡하므로 주파수영역에서의 계산으로 볼테라 커널을 계산하는 것이 편리하다.

우선 가정된 볼테라 시리즈의 해인 식 (2.2)에 나타나 있는 것을 블록도로 나타내면 그림 1과 같고 n 차의 라플라스 변환된 n 차 볼테라 커널의 집합으로 표시될 수 있으며 여기서의 블록도 축소방식 [14]은 연속적인 근사방법에 의해 먼저 블록도로 표시하여 주어진 블록도를 축소시켜 그림 1에 표시된 n 차 볼테라 커널과 비교하여 낮은 차수의 볼테라 커널부터 계산한다.

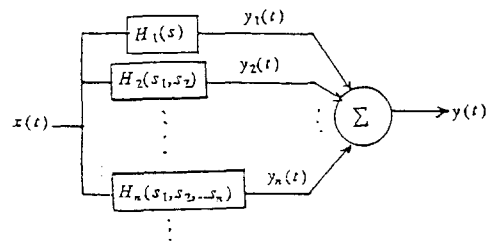


그림 1. 비선형 시스템의 볼테라 시리즈 해의 블록도

Fig. 1 : Block Diagram for the Volterra Series Solution

식 (2.7)에서 선형해의 1차 볼테라 커널은 쉽게 찾을 수 있다.

$$H_1(s) = L\{g(t)\} = G(s). \quad (2.8)$$

여기서 1차 해 $y_1(t)$ 가 구해지므로 이것을 식 (2.7)에 대입한 결과를 블록도로 나타내면 그림 2와 같으며, 고차의 볼테라 커널은 비선형 부분인 $F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)]$ 의 라플라스변환부분과 $G(s)$ 가 중첩적으로 접속되므로 구해진다.

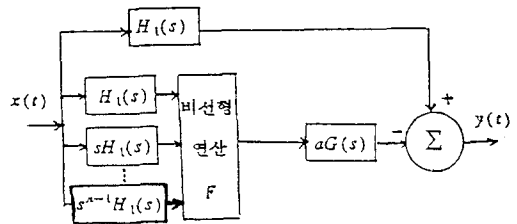


그림 2 : 고차 볼테라 커널계산을 위한 블록도

Fig. 2 : Block Diagram for the Higher Order Volterra Kernels

구체적인 예로서, 아래의 비선형 미분방정식을 고려하여 보자 [14].

$$\dot{y}(t) + y(t) + ay^2(t) = x(t), \quad y(0) = 0. \quad (2.9)$$

앞에서 설명한 방법을 이용하여 3차까지의 볼테라 커널을 계산하면 아래와 같다.

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (2.10)$$

$$H_2(s_1, s_2) = -aG_1(s_1 + s_2)H_1(s)H_1(s_2)$$

$$= -\frac{a}{(s_1 + s_2 + 1)(s_1 + 1)(s_2 + 1)} \quad (2.11)$$

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{2a^2}{(s_1 + s_2 + s_3 + 1)(s_1 + 1)(s_2 + 1)(s_3 + 1)(s_2 + s_3 + 1)} \quad (2.12)$$

입력 $X(s) = 1/s$ 이면 변수의 판관화 (association of variables) 방법 [3, 5]에 의해 다차원의 해를 일차원의 해로 변환하는 것이 가능하며 i 차의 볼테라 시리즈해를 $y_i(t)$ 라 하면

$$y_1(t) = 1 - e^{-t} \quad (2.13)$$

$$y_2(t) = a(-1 + 2te^{-t} + e^{-2t}) \quad (2.14)$$

$$y_3(t) = a^2[2 + e^{-t} - 2te^{-t} - 2t^2e^{-t} - 2e^{-2t} - 4te^{-2t} - e^{-3t}] \quad (2.15)$$

상기의 문제에 대하여 볼테라 시리즈해와 Runge-Kutta 방법에 의한 수치해의 결과의 비교가 그림 3, 4, 5, 6에 나타나 있으며 이 그림들은 각각 $a=0.01, 0.05, 0.1, 0.5$ 에 해당하는 결과이다. 그림에서 $y_i(t)$ 는 i 차 볼테라 시리즈해이며 $y(t)$ 는 수치해에 해당하는 비선형해이고 $\hat{y}(t)$ 는 3차까지 계산된 볼테라 시리즈의 합이다. 그림에서 특이한 사항은 $a=0.01, 0.05, 0.1$ 일 때는 3차까지 계산된 볼테라 시리즈해의 합이 수치해와 거의 같으나 $a=0.5$ 일 때는 두개의 값사이에 편차가 커짐을 알 수 있다. 즉, 다시말하여 a 의 값이 증가함에 따라 비선형성의 정도가 커지며 비선형해에 수렴하기 위해서는 보다 높은 차수의 볼테라 시리즈해가 필요함을 알 수 있다.

일반적으로 비선형 시스템을 해석하는데는 비선형의 정도를 나타내는 척도가 필요하다. 즉 어떤 비선형 시스템은 비선형도 (degree of nonlinearity)가 아주 높은 시스템일 수 있으며 어떤 비선형 시스템은 비선형도가 낮아 선형 시스템의 해와 거의 같은 경우도 있다. 여기서는 이러한 비선형 시스템의 비선형의 정도를 나타내는 비선형도를 정의하고 그 특성을 알아 보자.

비선형도 $D(N)$ 와 선형도 $D(L)$ 을 아래와 같이 정의한다.

$$D(N) = \frac{\int_c^d |b(t) - y_1(t)| dt}{\int_c^d |b(t) - y_1(t)| dt + \int_c^d |b_1(t)| dt} \quad (2.16)$$

$$D(L) = \frac{\int_c^d |b_1(t)| dt}{\int_c^d |b(t) - y_1(t)| dt + \int_c^d |b_1(t)| dt} \quad (2.17)$$

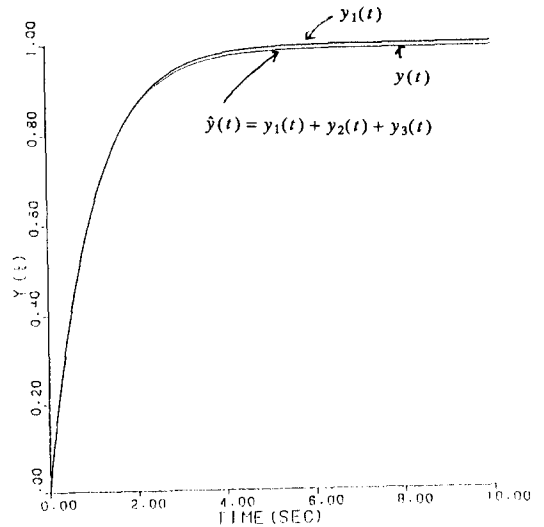


그림 3 : 볼테라 시리즈해와 수치해의 비교 ($a=0.01$)
Fig. 3 : Comparison of Volterra Series and Numerical Solutions

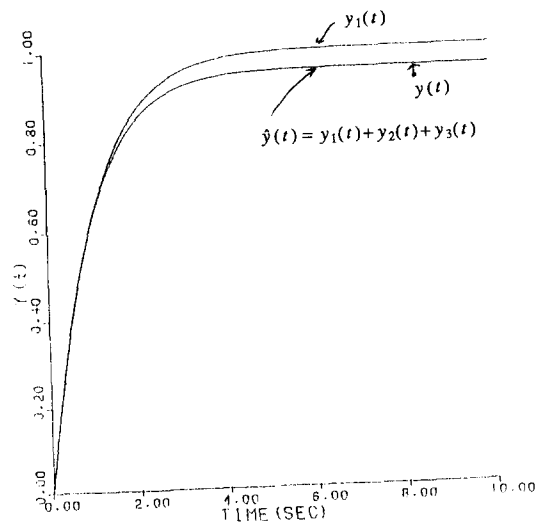


그림 4 : 볼테라 시리즈해와 수치해의 비교 ($a=0.05$)
Fig. 4 : Comparison of Volterra Series and Numerical Solutions

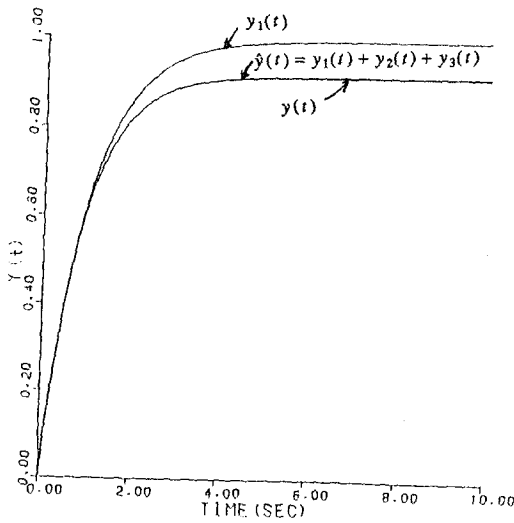


그림 5 : 볼테라 시리즈해와 수치해의 비교 (a=0.1)
 Fig. 5 : Comparison of Volterra Series and Numerical Solutions

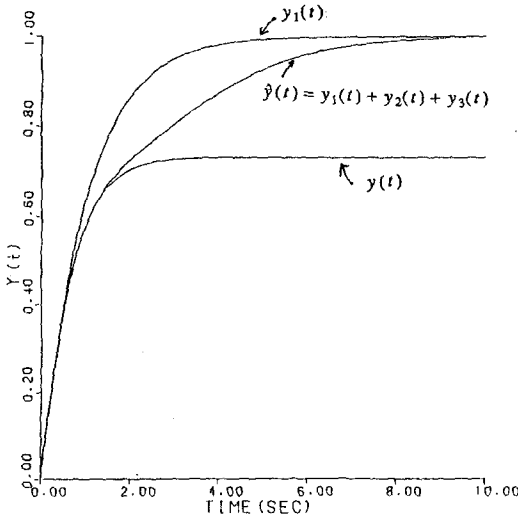


그림 6 : 볼테라 시리즈해와 수치해의 비교 (a=0.5)
 Fig. 6 : Comparison of Volterra Series and Numerical Solutions

여기서 $D(N)$ 과 $D(L)$ 은 주어진 구간 $[c, d]$ 와 입력 $x(t)$ 에 따르며 $y(t)$ 는 주어진 시스템의 해에 해당하며 $y_1(t)$ 는 선형 부분에 의한 식의 해, 즉 1차 볼테라 시리즈의 해에 해당한다.

상기의 정의식에서부터 아래의 특성들을 찾을 수 있다.

- [특성 1] $D(L)+D(N)=1$
- [특성 2] 순수한 선형시스템 (pure linear system)의 경우 $D(L)=1$
- [특성 3] 순수한 비선형 시스템 (pure nonlinear system)의 경우 $D(N)=1$
- [특성 4] $0 < D(L) < 1, 0 < D(N) < 1$

앞에서 예시된 예의 비선형 시스템에서 a 값이 변화되면 비선형정도 변화되며 따라서 비선형도도 바뀌어진다. 여기서 관심이 있는 구간을 $[0, 10]$ 초라 가정할 때 a 의 값의 변화에 따른 비선형도의 값이 표 1에 주어진다.

표 1 : a의 값에 따른 비선형도

Table 1 : Degree of Nonlinearity, $D(N)$

a	비 선 형 도
0.01	0.0082
0.05	0.0371
0.1	0.0669
0.5	0.1932
1.0	0.2589

III. 결론

많은 경우의 비선형 시스템을 비선형 미분방정식으로 표시할 수 있고 이러한 시스템의 볼테라 시리즈해를 구하기 위해 볼테라 커널을 계산하여야 하며 이것들이 구해지면 입력과 출력과의 상관관계를 규명할 수 있다. 본 논문에서는 이 볼테라 커널을 계산하기 위해 연속적인 조사방식에 의한 블록도 축소방식을 적용하고 구체적인 비선형 시스템에 대하여 볼테라 시리즈의 해와 수치해를 구하여 비교해 본 후 비선형 시스템의 비선형의 정도를 나타내는 비선형도가 정의되고 여러 특성들이 고찰되며 앞에서의 비선형 시스템의 예에서 비선형도를 계산해 본다. 여기에 제시되는 여러 기법들은 다른 많은 범위의 비선형 시스템 해석에 응용가능하리라 여겨진다.

(*본 연구는 1986년도 과학재단 연구비 지원에 의해 이루어진 것임.)

참고문헌

1. V. Volterra, Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations, Dover Publications, Inc., New York, 1957.
2. N. Wiener, Nonlinear Problems in Random Theory, The Technology Press, M.I.T., 1959.
3. D. A. George, Continuous Nonlinear Systems, Tech. Report 355, Research Lab. of Electronics, M.I.T., 1959.
4. J. F. Barrett, "The Use of Functionals in the Analysis of Nonlinear Physical Systems," Journal of Electronics Control, Vol. 15, No. 6, pp. 567-615, 1962.
5. R. H. Flake, "Volterra Series Representation of Nonlinear System," Trans. of IEEE, pp. 330-335, 1962.
6. S. Naraynan, "Application of Volterra Series to Intermodulation Distortion Analysis of Transistor Feedback Theory," IEEE Trans. on Communication Theory, CT-17, pp. 518-527, 1970.
7. L. O. Chua and Y. S. Tang, "Nonlinear Oscillation Via Volterra Series," IEEE Trans. on Circuit and Systems, CAS-29, pp. 150-168, 1982.
8. D. D. Weiner and J. F. Spina, Sinusoidal Analysis and Modeling of Weakly Nonlinear Circuits, Van Nostrand Reinhold Company, 1980.
9. E. Bedrosian and S. O. Rice, "The Output Properties of Volterra Systems Driven by Harmonic and Gaussian Inputs," Proc. IEEE. Vol. 59, pp. 1688-1707, 1971
10. H. L. Van Trees, "Functional Techniques for the Analysis of the Nonlinear Behavior of Phase-Locked Loops," Proc. IEEE., Vol. 52, pp. 894-911, 1964.
11. F. J. Lockett, Nonlinear Viscoelastic Solids, Academic Press, 1972.
12. W. G. Gottenberg et al., "An Experimental Study of a Nonlinear Viscoelastic Solid in Uniaxial Tension," Journal of Applied Mechanics, pp. 558-564, 1969.
13. D. K. Sung, Application of Volterra Series to Vibration Analysis, Thesis of the University of Texas at Austin, 1982.
14. 성단근, "비선형 미분방정식 해석을 위한 볼테라 커널의 계산," pp. 1181-1184, 전기전자공학 학술대회, 1987.