

먹금수 오차를 고려하여 선택된 고유치에 의한 모델 저차화 방법

김 원 호 . 최 태 호

경북대학교 공과대학 전자공학과

Model reduction by the eigenvalue selected considering the error of the power series

Won Ho Kim . Tae Ho Choi

Department of Electronics, Kyungpook National University

Abstract

In this paper, the model reduction method of the linear time invariant continuous systems is proposed. The denominator of reduced order model is determined by the eigenvalue selected considering the error of the power series that exists between original system and reduced order system at each time moments. And the numerator of model is founded by the time moment matching method. The method suggested is compared with other various methods in examples.

I. 서 론

선형 동적 시스템이론에서 시스템의 차수가 증가함에 따라 제어계를 해석하고 설계하는 것이 매우 복잡하여 진다. 따라서 시스템의 중요한 물리적 특성을 그대로 유지시키는 범위내에서 고차 선형 시스템을 저차화 모델로 간소화시키는 방법이 지금까지 중요한 관심사가 되어왔다. 이들 방법들은 다음의 두가지 범주로 나눌 수 있다. 첫째는 원래 시스템의 특성을 변화시키지 않고 지배적인 상태 변수나 동력 모드를 유지시키는 방법이다.^(1~3) 원래 시스템의 구조적 성질을 유지하려는 입장에서 보면 Modal 기법이나 집성(Aggregation)기법이 많이 사용되는데 이 방법들은 다음과 같은 문제점들이 있다.

Modal 기법에서는 유지되어야 할 상태 변수가 미리 결정되어야 한다. 집성(Aggregation)기법에서는 차수가 높은 시스템인 경우 집성(Aggregation)행렬의 계산량이 많아지고 과도 및 정상 상태의 응답이 원래의 시스템과 달라질 수 있다. 둘째는 입 출력 동작을 고려하여 원래의 시스템을 저차화 시키는 방법이다.^(4~7) 이 방법들은 시스템의 내부 특성을 생각하지 않고 외부 특성만을 고려하므로 원래의 시스템이 안정하더라도 저차화 모델이 안정하다고 보장할 수 없다. 따라서 원래 시스템의 분모(분자)로 부터 저차화 모델의 분모(분자)를 따로 따로 결정하므로서 단지 원래 시스템의 우세 고유치만을 보유하고 있는 모델을 유도하여 원래의 시스템이 안정할 때 저차화 시스템의 안정도도 보장할 수 있는 혼합된 방법들이 제안되었다.^(8~11)

본 논문에서는 먹금수 오차를 고려하여 저차화 시스템의 고유치를 선택하므로서 원래 시스템과 저차화 시스템의 과도 상태 응답의 오차를 최소화한다. 저차화 시스템의 분모는 먹금수 오차를 고려하여 선택된 고유치에 의해 결정하고 분자는 원래 시스템과 저차화 시스템의 타임 모멘트를 매칭시킴으로서 구한다. 이 방법은 과도 및 정상 상태 응답에서 좋은 근사 확률 이루고 원래의 시스템이 안정할 때 저차화 시스템의 안정도도 보장할 수 있다.

단일 입력 출력 선형 시-불변 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad X(0)=0 \quad (1)$$

$$\dot{Y}(t) = CX(t) \quad (2)$$

여기서 상태 변수 $X(t)$ 는 $n \times 1$, A 는 $n \times n$, B 는 $n \times 1$, C 는 $1 \times n$ 행렬이다. 식(1), (2)의 동적 방정식의 전달 함수는 다음과 같다.

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{N(s)}{M(s)} \quad (3)$$

$$= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (4)$$

$$= \sum_{i=0}^n \frac{g_i}{(s-\lambda_i)}$$

여기서 g_i 는 고유치 λ_i 에 관련된 유수이다. 전달 함수 $G(s)$ 를 $s=0$ 에 대해 멱급수 전개하면

$$G(s) = l_0 + l_1s + l_2s^2 + \dots + l_ns^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} l_i s^i \quad (5)$$

여기서 l_i 는 다음의 관계식을 만족한다.

$$l_0 = b_0 / a_0 \quad (6)$$

$$l_i = (b_i - \sum_{k=0}^{i-1} l_k a_{i-k}) / a_0, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

저차화 시스템의 본모를 유도하기 위하여 원래 시스템의 고유치들의 가중을 결정한다. 임의의 고유치 λ 를 제거했을때 저차화 시스템의 전달 함수는 다음과 같다.

$$Ri(s) = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{M}(s)} \quad (8)$$

$$= \frac{d_{n-1}s^{n-2} + \dots + d_1s + d_0}{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0} \quad (9)$$

여기서 $\tilde{M}(s)$ 는 원래 시스템의 특성 다항식에서 임의의 고유치 λ 를 제거하므로써 구한다.

이렇게 구한 c_i 는 다음의 관계식을 만족한다.

i) 임의의 고유치가 실수인 경우

$$c_i = (a_i - c_{i-1}) / \lambda \quad (10)$$

단, $c_1 = 0, c_{n-1} = 1$
 $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$

ii) 임의의 고유치가 공액 복소수인 경우
 이 고유치 ($\lambda = \alpha \pm j\beta$)를 제거한 저차화 시스템의 전달 함수의 차수는 $(n-2)$ 차이다.

$$c_i = (a_i - c_{i-2} + 2\alpha c_{i-1}) / (\alpha^2 + \beta^2) \quad (11)$$

단, $c_1 = c_{-2} = c_{n-1} = 0, c_{n-2} = 1$
 $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-3$

또한 $\tilde{N}(s)$ 는 원래 시스템 $G(s)$ 와 저차화 시스템 $Ri(s)$ 를 $s=0$ 에 대해서 멱급수 전개할때 $(n-2)$ 번째 까지 타임 모멘트를 일치시킴으로써 구한다. 이때, $d_0 = l_0 c_0$

$$d_1 = l_0 c_1 + l_1 c_0$$

$$d_2 = l_0 c_2 + l_1 c_1 + l_2 c_0$$

$$d_{n-2} = l_0 c_{n-2} + l_1 c_{n-3} + \dots + l_{n-3} c_1 + l_{n-2} c_0$$

위 식은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$d_k = \sum_{j=0}^k l_j c_{k-j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \quad (12)$$

이렇게 유도된 저차화 시스템 $Ri(s)$ 를 $s=0$ 에 대해 멱급수 전개하면,

$$Ri(s) = m_0 + \dots + m_{n-2}s^{n-2} + m_{n-1}s^{n-1} + m_ns^n + \dots = l_0 + \dots + l_{n-2}s^{n-2} + m_{n-1}s^{n-1} + m_ns^n + \dots = \sum_{i=0}^{n-2} l_i s^i + \sum_{i=n-1}^{\infty} m_i s^i \quad (13)$$

원래 시스템의 멱급수 전개식과 임의의 고유치 λ 를 제거한 저차화 시스템의 멱급수 전개식 사이의 각각의 타임 모멘트의 오차를 멱급수 오차라고 하자. 이때 멱급수 오차는 다음과 같이 표현된다.

$$e_i = |l_i - m_i|, \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

또한,

$$Ei(s) = G(s) - Ri(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (|l_i - m_i|) s^i \quad (15)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} e_i s^i + \sum_{i=n-1}^{\infty} e_i s^i = \sum_{i=n-1}^{\infty} e_i s^i \quad (16)$$

결국 이 오차는 원래 시스템을 저차화 시킬때 λ 를 제거하므로써 생기는 원래 시스템과 저차화 시스템의 응답 오차를 초래한다.

$$B_i(s) = ST B_i(s) + TR B_i(s)$$

$$\text{단, } ST B_i(s) = \sum_{i=0}^{n-2} e_i s^i = 0 \quad (17)$$

$$TR B_i(s) = \sum_{i=n-1}^{\infty} e_i s^i \neq 0 \quad (18)$$

여기서 $ST B_i(s)$ 는 원래 시스템과 저차화 시스템 사이의 정상 상태 응답의 오차를 대변하고 $TR B_i(s)$ 는 과도 상태 응답의 오차를 대변한다. 따라서 임의의 고유치 λ 를 제거함으로써 생기는 시스템 응답의 오차는 전적으로 과도 상태 오차를 초래한다.

각각의 고유치를 제거했을 때 과도 상태 응답 오차의 정도를 나타내기 위하여 $s=0$ 에 대한 멱급수 오차의 타임 모멘트를 $2n$ 번째 까지 더하여 멱급수 오차합 $\sum B_i$ 로 정의하자.

$$\begin{aligned} \sum B_i &= e_0 + e_1 + \dots + e_{n-2} + e_{n-1} + \dots + e_{2n} \\ &= e_{n-1} + e_n + \dots + e_{2n} \\ &= \sum_{i=n-1}^{2n} e_i \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{단, } e_i = |1 - m \cdot \lambda_i|, \quad (i = 0, 1, \dots, 2n)$$

원래 시스템의 고유치 λ_i 를 제거함으로써 초래되는 멱급수 오차합 $\sum B_i$ ($i=1, 2, \dots, n$)가 클수록 그에 해당하는 고유치는 원래 시스템의 지배적인 모드가 되어 저차화 시스템의 고유치로 보유되어야 한다. 결과적으로 원래 시스템을 저차화할 때 제거되어야 할 고유치는 $\sum B_i$ 가 적은 순서대로 그때의 고유치 λ_i 를 선택한다. 이렇게 고유치들을 선택함으로써 원래 시스템과 저차화 시스템 사이의 과도 상태 응답의 오차를 최소로 할 수 있다.

임의의 고유치 λ_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$)를 제거했을 때 이에 대응하는 각각의 멱급수 오차합이 다음의 관계식을 만족한다고 가정하자.

$$\sum B_1 > \sum B_2 > \dots > \sum B_m > \dots > \sum B_n \quad (20)$$

이제 최종적으로 원하는 m 차 ($m < n$) 저차화 시스템을 유도하면 다음과 같다.

$$R(s) = \frac{q_{m-1}s^{m-1} + \dots + q_1s + q_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_m)} \quad (21)$$

$$= \frac{q_{m-1}s^{m-1} + \dots + q_1s + q_0}{s^m + p_{m-1}s^{m-1} + \dots + p_1s + p_0} \quad (22)$$

저차화 시스템의 전달함수 $R(s)$ 의 분자는 원래 시스템의 전달함수 $G(s)$ 와 $R(s)$ 를 $s=0$ 에 대해 멱급수 전개하여 타임모멘트를 $(m-1)$ 번째 까지 서로 일치시킴으로서 구한다. 이때 저차화 시스템의 전달함수 $R(s)$ 의 분자항의 계수는 다음의 관계식에 의해 쉽게 구할 수 있다.

$$q_k = \sum_{j=0}^k 1_j p_{k-j}, \quad (k=1, 2, \dots, m-1) \quad (23)$$

III. 예제 및 시뮬레이션

(1) 모든 고유치가 실수인 경우

선형 시불변 제어 시스템의 전달 함수가 다음과 같이 표시된다고 하자.

$$G(s) = \frac{96s^5 + 3648s^4 + 43872s^3 + 204520s^2 + s^6 + 50s^5 + 895s^4 + 7070s^3 + 25264s^2 + 355200s + 192000}{38240s + 19200}$$

이 시스템의 고유치는 다음과 같다.

$$-1, -2, -4, -8, -15, -20$$

각각의 고유치를 제거했을 때 멱급수 오차합은 다음의 표 1과 같다.

표 1. 모든 고유치가 실수인 경우

제거되는 고유치	멱급수 오차합	가중치
-1	0.00000515	0.008 %
-2	0.00000586	0.009 %
-4	0.05235059	78.640 %
-8	0.00858678	12.890 %
-15	0.00557775	8.380 %
-20	0.00003897	0.058 %

2차 저차화 시스템을 유도하기 위해서 멱급수 오차합이 큰 순서로 2개의 고유치를 선택한다. 즉, -4와 -8의 고유치가 보유된 저차화 시스템의 전달 함수는 다음과 같다.

$$R_2(s) = \frac{74.667s + 320}{s^2 + 12s + 32}$$

이 시스템의 단위 계단 함수 응답은 그림 1과 같다. 여기서 Shamash - Pade⁽⁹⁾, Differentiation - Pade⁽¹⁰⁾, Routh - Pade^(5,8) 방법에 의한 결과의 출력 응답 곡선과 비교하였다. 이들의 전달 함수는 다

음과 같다.

$$\text{Shamash - Pade} ; S_1(s) = \frac{27.167s+20}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\text{Differen.- Pade} ; D_2(s) = \frac{59.53s+113.99}{s^2+7.568s+11.399}$$

$$\text{Routh - Pade} ; H_2(s) = \frac{16.353s+8.8}{s^2+1.76s+0.88}$$

이들의 단위 계단 응답은 그림 1과 같다.

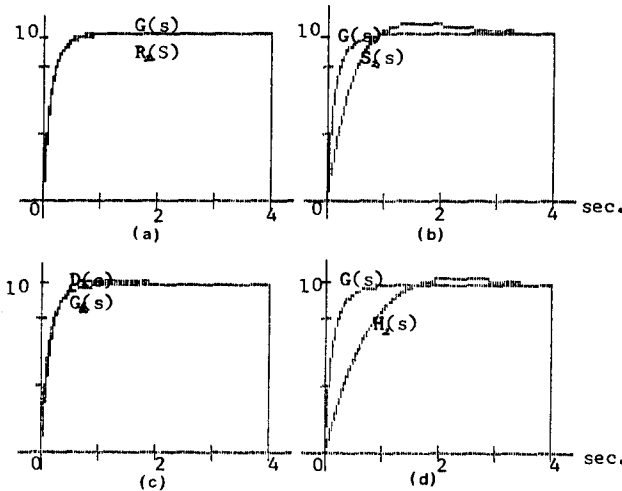


그림 1. 예제 1의 단위 계단 응답

(2) 모든 고유치가 공액 복소수인 경우

$$G(s) = \frac{3s^5 + 15.2s^4 + 51.48s^3 + 141.512s^2 + 178.8148s + 285.4376}{s^6 + 2.8s^5 + 16.92s^4 + 27.568s^3 + 80.7092s^2 + 64.02864s + 108.6948}$$

이 시스템의 고유치는 다음과 같다.

$$-0.3+j2.1, -0.5+j2.3, -0.6+j2.0$$

각각의 고유치를 제거했을때 먹금수 오차합은 다음의 표 2와 같다.

표 2. 모든 고유치가 복소수인 경우

제거되는 고유치	먹금수 오차합	가중치
-0.3+j2.1	0.009515	38.53 %
-0.5+j2.3	0.003401	13.77 %
-0.6+j2.0	0.011777	47.69 %

4차 저차화 모델을 유도하기 위하여 $-0.3+j2.1$ 과 $-0.3+j2.1$ 의 고유치를 보유하도록 한다.

즉,

$$R_4(s) = \frac{2.962s^3 + 12.096s^2 + 22.977s + 51.523}{s^4 + 1.8s^3 + 9.58s^2 + 8.016s + 19.62}$$

원래 시스템에 대한 Shamash-Pade, Differentiation-Pade, Routh-Pade 방법에 의한 각각의 4차 저차화 모델의 전달 함수는 다음과 같다.

Shmash-Pade 방법

$$S_4(s) = \frac{3.475s^3 + 11.113s^2 + 22.994s + 65.467}{s^4 + 1.6s^3 + 10.64s^2 + 7.824s + 24.93}$$

Differ.-Pade 방법

$$D_4(s) = \frac{3.43s^3 + 10.86s^2 + 108.84s + 253.045}{s^4 + 4.89s^3 + 28.62s^2 + 37.84s + 96.36}$$

Routh-Pade 방법

$$H_4(s) = \frac{2.94s^3 + 15.61s^2 + 32.88s + 52.49}{s^4 + 2.73s^3 + 10.88s^2 + 11.77s + 19.99}$$

이들의 단위 계단 응답은 그림 2와 같다.

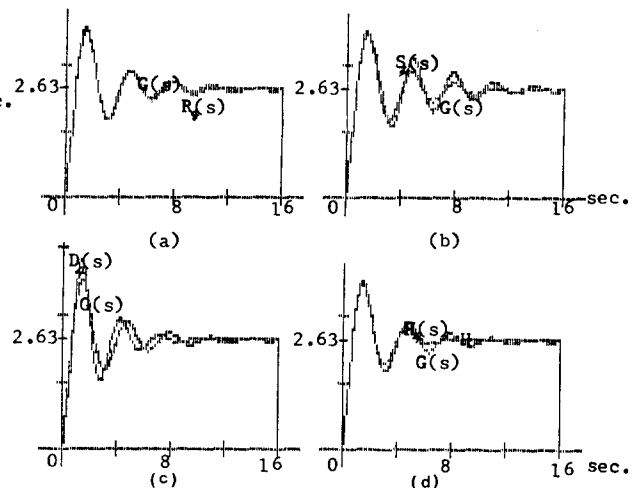


그림 2. 예제 2의 단위 계단 응답

(3) 실수와 복소수의 고유치가 함께 존재할 경우

$$G(s) = \frac{32.661s^5 + 806.65s^4 + 4555.78s^3 + 23347.94s^2 + 28373.65s + 9802.}{s^6 + 10.80s^5 + 108.25s^4 + 485.45s^3 + 1863.45s^2 + 2456.65s + 980.2}$$

이 시스템의 고유치는 다음과 같다.

$$-0.8, -1.0, -2+j5, -2.5+j6$$

각각의 고유치를 제거했을때 생기는 먹금수 오차합은 표 3과 같다.

표 3. 고유치가 실수와 복소수를 포함하는 경우

제거되는 고유치	떡급수 오차합	가중치
-0.8	29.6	5.66
-1.0		56.07
-2.0+j5	0.734	1.72 %
-2.5+j6	12.400	29.02 %

표 3 예의해 고유치 -1.0 과 -2.5+j6 을 보유하는 3차 저차화 모델의 전달 함수를 유도하면 다음과 같다.

$$R_3(s) = \frac{35.404s^2 + 636.6s + 422.5}{s^3 + 6s^2 + 47.25s + 42.25}$$

원래 시스템에 대한 Shamash-Pade, Differentiation-Pade, Routh-Pade 방법에 의한 각각의 3차 저차화 모델의 전달 함수는 다음과 같다.

$$\text{Shamash-Pade ; } S_3(s) = \frac{58.787s^2 + 412.11s + 232.2}{s^3 + 4.8s^2 + 32.2s + 23.2}$$

$$\text{Differ.-Pade ; } D_3(s) = \frac{151.18s^2 + 662.91s + 403.8}{s^3 + 15.35s^2 + 50.61s + 40.38}$$

$$\text{Routh-Pade ; } H_3(s) = \frac{68.38s^2 + 85.327s + 29.48}{s^3 + 5.42s^2 + 7.388s + 2.948}$$

이들의 단위 계단 응답은 그림 3 과 같다.

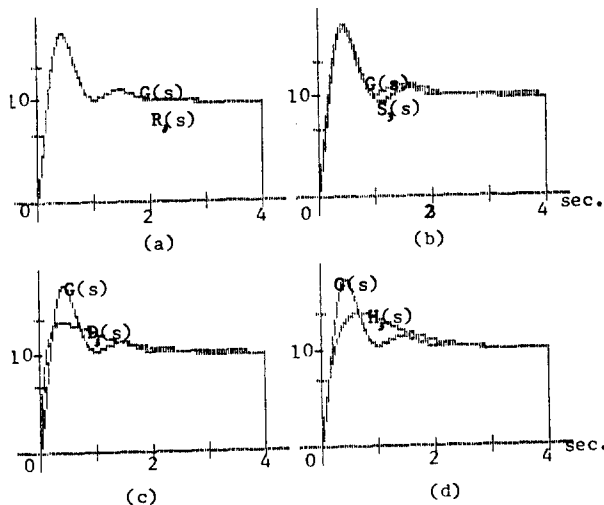


그림 3. 예제 3 의 단위 계단 응답

(4) 단근, 중근, 복소근의 고유치를 포함하는 경우

$$G(s) = \frac{1.3s^5 + 22s^4 + 130s^3 + 500s^2 + 700s + 500}{s^6 + 17s^5 + 113s^4 + 377s^3 + 682s^2 + 670s + 300}$$

이 시스템의 고유치는 다음과 같다.

$$2, 3, 5, 5, -1+j1$$

각각의 고유치를 제거했을 때 생기는 떡급수 오차합은 표 4 와 같다.

표 4. 단근, 중근, 복소근의 고유치를 포함하는 경우

제거되는 고유치	떡급수 오차합	가중치
-2	1.26	0.385
-3		0.117
-5	0.354	0.031
-5		0.031
-1+j1	0.313	16.24 %

표 4 예의해 -2 와 -3 의 고유치를 보유하는 2차 저차화 모델의 전달 함수를 유도하면 다음과 같다.

$$R_2(s) = \frac{10}{s^2 + 5s + 6}$$

원래 시스템에 대한 Shamash-Pade, Differentiation-Pade, Routh-Pade 방법에 의한 각각의 2차 저차화 모델의 전달 함수는 다음과 같다.

$$\text{Shamash-Pade ; } S_2(s) = \frac{0.56s + 3.33}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\text{Differ.-pade ; } D_2(s) = \frac{-0.977s + 10.9967}{s^2 + 4.912s + 6.598}$$

$$\text{Routh-Pade ; } H_2(s) = \frac{1.364s + 0.97433}{s^2 + 1.3055s + 0.5846}$$

이들의 단위 계단 응답은 그림 4 와 같다.

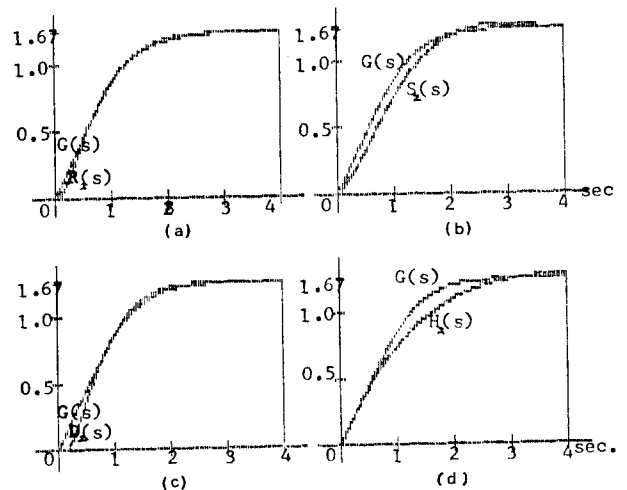


그림 4. 예제 4 의 단위 계단 응답

IV. 결 론

역급수 오차를 고려하여 선택된 고유치를 이용하는 모델 저차화 방법이 적용되었다. 제안한 방법은 저차화 할때 제거되는 고유치가 원래 시스템과 저차화 시스템 사이의 과도 상태 응답의 오차를 최소화 하도록 선택되고 $s=0$ 에 대해 타임 모멘트를 일치시켜 분차다항식을 결정하므로 저차화 시스템이 정상 상태 뿐만 아니라 과도 상태에서도 원래 시스템에 매우 근사적인 응답을 갖는다. 또한 원래의 시스템이 안정하면 저차화 시스템도 항상 안정하다.

참 고 문 헌

1. M.Aoki, "Control of large scale dynamic systems by Aggregation", IEEE Trans. Automatic control, Vol.AC-13, No.3, pp.246-253, June 1968.
2. E.J.Davison, "A new method for simplifying large linear dynamic systems", IEEE Trans. Aut.Contr., Vol.AC-13, No.2, pp.214-215, April 1968
3. M.S.Mahmoud, "Order reduced and control of discrete systems", IEE Proc.Vol.129, Pt.D, No.4, July 1982, pp.129-135.
4. M.S.Mahmoud and M.G.Singh, "Large Scale Systems Modelling, Technical Reference" U.M.I.S.T., Manchester, England, pp.215-230.
5. M.F.Hutton and B.Friedland, "Routh approximations for reducing order of linear systems", IEEE Trans.Aut.Contr., Vol.AC-20, pp.329-337, 1975.
6. V.Krishnamurthy and V.Seshadri, "A simple and direct method of reducing order of linear systems using Routh approximations in frequency domain", IEEE Trans.Aut.Contr., Vol.AC-21, pp.797-799, Oct.1976.
7. P.O.Gutman, C.F.Mannerfelt and P.Molander, "Contributions to the Model Reduction Problem" IEEE Trans.Aut.Contr., Vol.AC-27, NO.2, 1982, pp.454-455.
8. Y.Shamash, " Model reduction using the Routh Stability Criterion and the Pade Approximation technique", INT.J.Contr., Vol.21, NO.3, pp.475-484, 1975.
9. Y.Shamash, " Linear system reduction using Pade Approximation to allow retention of dominant modes", INT.J.Contr., Vol.21, NO.2, pp.257-272, 1975.
10. A.Lepschy and U.Viario, " A Note on the model reduction problem", IEEE Trans.Aut.Contr., Vol.28, No.4, April 1983, pp.525-527.
11. T.N.Lucas and A.M.Davidson, " Frequency-domain reduction of linear systems using Schwarz Approximation", Int.J.Contr., Vol.37, No.5, pp.1167-1178, 1983.