'87 韓國自動制御學術會議論文集 1987. 10.16~17

확장된 상호작용 예측방법을 이용한 대규모 이산시간 시스템의 계층적 최적제어

°정 희 태 · 전 기 준
경북대학교 공과대학 전자공학과

Hierarchical Optimisation for Large Scale Discrete-Time Systems Using Extended Interaction Prediction Method

Hee Tae Chung and Gi Joon Jeon
Department of Electronics, Kyungpook National University

Abstract

This paper presents the extended interaction prediction method for large scale discrete -time systems with interconnected state and control. Feedback gain is obtained from decentralized calculation without solving Riccati equation. Hence, Computer storage and calculation time is reduced.

1. 서 론

급속한 전자기술의 발달로 값싼 소형 컴퓨터를 분산제어에 이용함으로써 컴퓨터 용량 및 계산시간을 감소시킬 수 있는 잇점[1]이 있기 때문에 수질오염, 교통통제, 통신망, 전력 시스템, 그리고 공정제어 시스템 등 상호 연결된 대규모 시스템의 계층적 최적제어에 관한 연구[2]가 활발히 진행되어 왔다.
특히, 상호작용 평형방법 (interaction balance method), Tamura의 삼계층방법 (three level method of Tamura), 상호작용 예측방법 (IPM: interaction prediction method) 등은 선형 및 비선형 대규모 시스템의 최적제어에 널리 적용되고 있다.[3,4] 이중 수렴속도가 빠른 IPM은 입력 계수행렬이 대각인 경우에만 최적제어가 가능한 알고리즘이므로 본 논문에서는 입력 계수행렬이 대각화가 아닌 경우에도 최적화가 가능한 확장된 IPM 알고리즘으로 대규모 이산시간 시스템을 최적화하고 그 결과를 이용하여 전체 궤환이득 및 부시스템 궤환이득을 RICCATI 방정식을 풀지않고 off-line 방법으로 구한다. 여기서 얻어진 궤환이득을 이용하여 각 분산 시스템의 국부적 궤환제어기 및 두 계층 조정제어기를 구성함으로써 분산 시스템 및 전체 시스템을 안정화 시켰다.
이 알고리즘을 전력 시스템[5]과 수질오염 모델[6]에 적용시켜 알고리즘을 확인하였다.

2. 문제의 설정

상호 연결된 대규모 선형 이산시간 모델의 성능 지수를 최소화하는 문제를 고려하자. 전체 시스템을 Ns 개의 부시스템으로 나눈 i 번째 시스템에 대한 상태 방정식과 성능지수는 다음과 같다.

$$x_i(r+1) = A_i x_i(r) + B_i u_i(r) + z_i(r) \qquad (1)$$

$$x_i(o) = x_{io}$$

$$y_i(r) = C_i x_i(r) \qquad (2)$$

$$z_i(r) = \sum_{j\neq i}^{Ns} \left[D_{ij} x_j(r) + F_{ij} u_j(r) \right] \qquad (3)$$

$$J_i = \frac{1}{2} \| y_i(r_f) \|^2_{Q_{fi}} + \sum_{r=o}^{r_f-1} \frac{1}{2} \left[\| y_i(r) - y_{di} \|^2_{Q_i} + \| u_i(r) \|^2_{R_i} \right] \qquad (4)$$

여기서 x_i 는 n_i 차 상태벡터, z_i 는 n_i 차입력및 상태변수 연결벡터, u_i는 m_i 차 입력제어 벡터, y_i는 q_i 차 출력벡터, 그리고 Q_{fi} , Q_i 는 $(q_i \times q_i)$ 반 양한정 하중행렬, R_i 는 양한정 하중행렬이다. 또, y_{di} 는 출력이 따라 가야할 목표치이고 r_f 는 최종시간이다.

Ns 개로 나누어진 부시스템을 전체 시스템으로 구성하면 다음과 같이 된다.

$$x(r+1) = Ax(r) + Bu(r) \qquad (5)$$

$$x(o) = x_o$$

$$y(r) = Cx(r) \quad \cdots\cdots (6)$$

$$J = \frac{1}{2}\, \| y(r_f) \|^2_{Q_f} + \sum_{r=0}^{r_f-1} \frac{1}{2} \left[\| y(r) - y_d \|^2_Q + \| u(r) \|^2_R \right] \quad \cdots\cdots (7)$$

여기서 x는 n차, u는 m차, y는 q차 벡터이고

$$n = \sum_{i=1}^{Ns} n_i, \quad m = \sum_{i=1}^{Ns} m_i, \quad q = \sum_{i=1}^{Ns} q_i, \quad J = \sum_{i=1}^{Ns} J_i$$

를 만족한다. 그리고 전체 시스템 및 성능지수의 각 계수행렬 형태는 다음과 같이 표현된다.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & D_{12} & \cdots & D_{1Ns} \\ D_{21} & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ D_{Ns1} & \cdots & & A_{Ns} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & F_{12} & \cdots & F_{1Ns} \\ F_{21} & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ F_{Ns1} & \cdots & & B_{Ns} \end{bmatrix}$$

$$C = \mathrm{diag}[\, C_1 \;\; C_2 \cdots\cdots C_{Ns} \,]$$
$$Q = \mathrm{diag}[\, Q_1 \;\; Q_2 \cdots\cdots Q_{Ns} \,]$$
$$R = \mathrm{diag}[\, R_1 \;\; R_2 \cdots\cdots R_{Ns} \,]$$
$$Q_f = \mathrm{diag}[\, Q_{f1} \; Q_{f2} \cdots\cdots Q_{fNs} \,]$$

Ns개로 나눈 벡터는 다음과 같다.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{Ns} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{Ns} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{Ns} \end{bmatrix}$$

3. 확장된 상호작용 예측방법 및 알고리즘

i번째 시스템의 Hamiltonian은

$$H_i = \frac{1}{2} \left[\| y_i(r) - y_{di} \|^2_{Q_i} + \| u_i(r) \|^2_{R_i} \right] + \Pi_i^t(r)\, z_i(r) + \sum_{j \neq i}^{Ns} \left[\Pi_j^t D_{ji}\, x_i(r) + \Pi_j^t F_{ji}\, u_i(r) \right] + p_i^t(r+1) \left[A_i x_i(r) + B_i u_i(r) + z_i(r) \right] \quad \cdots\cdots (8)$$

로 주어지고, 전체 Hamiltonian은

$$H = \sum_{i=1}^{Ns} H_i \text{ 가 된다.}$$

여기서 Π_i는 n_i차 Lagrange 벡터이고 p_i는 n_i차 부상태(adjoint state) 벡터이다.

식(8)로 부터 J_i를 최소로 하는 필요 조건들을 구하면 다음과 같다.

$\dfrac{\partial H_i}{\partial u_i(r)} = 0$ 로 부터

$$u_i(r) = -R_i^{-1} \left[B_i^t p_i(r+1) - \sum_{j \neq i}^{Ns} F_{ji}^t \Pi_j(r) \right] \quad \cdots\cdots (9)$$

$\dfrac{\partial H_i}{\partial p_i(r+1)} = x_i(r+1)$ 로 부터

$$x_i(r+1) = A_i x_i(r) + B_i u_i(r) + z_i(r) \quad \cdots\cdots (10)$$
$$x_i(o) = x_{io}$$

$\dfrac{\partial H_i}{\partial x_i(r)} = p_i(r)$ 로 부터

$$p_i(r) = C_i^t Q_i C_i \left[x_i(r) - x_{di} \right] + A_i^t p_i(r+1) - \sum_{j \neq i}^{Ns} D_{ji}^t \Pi_j(r) \quad \cdots\cdots (11)$$

$r = r_f$ 일때는

$$p_i(r_f) = C_i^t Q_i C_i x_i(r_f) \quad \cdots\cdots (12)$$

를 얻는다. 또 전체 Hamiltonian으로 부터 예측 방정식을 다음과 같이 얻을수 있다.

$\dfrac{\partial H}{\partial z(r)} = 0$ 로 부터

$$\Pi_i(r) = -p_i(r+1) \quad \cdots\cdots (13)$$

$\dfrac{\partial H}{\partial \Pi(r)} = 0$ 로 부터

$$z_i(r) = \sum_{j \neq i}^{Ns} \left[D_{ij} x_j(r) + F_{ij} u_j(r) \right] \quad \cdots\cdots (14)$$

위의 조건들을 이용하면 확장된 상호작용 예측방법의 알고리즘은 다음과 같다.

1단계 : 반복지수 L=1로 두고 p, z, Π의 초기값을 임의로 준다.

2단계 : 하위계층에서 $x_i^L(r)$, $u_i^L(r)$, $p_i^L(r)$ [$(i=1,2,\cdots\cdots,Ns)$, $(o \leq r \leq r_f)$] 를 식(9)-(12)을 이용해서 계산한다.

3단계 : $\Gamma^{L+1} = [\,\Pi^{L+1}\; z^{L+1}\,]$로 두고 Γ^{L+1}을 식(13)-(14)를 이용해서 상위계층에서 구한다.

4단계 : 충분히 작은 ε값으로 $\| \Gamma^{L+1} - \Gamma^L \| \leq \varepsilon$를 만족하면 그때 x, u의 값을 최적화 값으로 하고 그렇지 않으면 2단계를 반복한다.

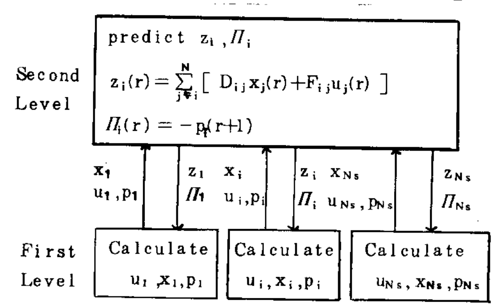

Fig.1 Two level hierachical structure based on extended method

4. 궤환 제어기 구성 및 고찰

일반적인 형태의 궤환제어 입력[7]은 다음과 같다.

$$u(r) = G(r)x(r) + d(r) \qquad (15)$$

r_f 가 유한값일때 $G(r)$ 은 시변 이득이되어 조정기 [$d(r) = 0$]인 경우 다음과 같은 방법으로 얻어진다. n번 다른 초기치로 개루우프 최적제어를 통해 얻어진 x,u 값으로

$$G(r) = [u^1(r), u^2(r), \cdots\cdots, u^n(r)]\,[x^1(r), x^2(r), \cdots\cdots, x^n(r)]^{-1}$$
$$(r = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, r_f)$$

을 구한다.

그러나 대규모 시스템인 경우에는 n차 역행렬을 여러번 계산 해야함으로 $G(r)$ 를 구하기 힘들다.[8] 그래서 여기서는 $r_f \to \infty$ 인 경우 상수 G를 구하는 방법을 고찰한다.[9]

r_f 가 무한시간인 경우 x와 u가 정상상태가 되는 충분히 큰 r_f 를 선정해서 초기치

$$x^1(o) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^2(o) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots\cdots, \quad x^n(o) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

를 이용하여 n번 개루프 제어를 통해 구해진 u값으로

$$G = [u^1(o), u^2(o), \cdots\cdots\cdots, u^n(o)]$$

를 구한다. 국부적 궤환이득도 $D_{ij} = o, F_{ij} = o\ (i \neq j, i = 1, 2 \cdots\cdots, Ns, j = 1, 2, \cdots\cdots, Ns)$ 로 두고 똑같이 구하면

$$G_d = [u^1(o), u^2(o), \cdots\cdots\cdots, u^n(o)]$$
$$= \mathrm{diag}[G_1\ G_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots G_{Ns}]$$

이 된다. 서어보 메카니즘의 경우 궤환입력이

$u(r) = Gx(r) + d$

로 주어지므로 $x(o) = 0$ 초기치로 $u(o) = d$ 를 구한뒤

$G = [u^n(o) - u(o), u^{n-1}(o) - u(o), \cdots\cdots\cdots\cdots, u^1(o) - u(o)]$

를 구한다. 지금 까지의 결과로 궤환제어기를 구성하기 위해

$G_o = G - G_d$

로 두면 G_d 는 각 분산 시스템에 대한 궤환이득, G_o 는 상호 연결된 상태 변수를 고려한 조정이득이다. 이렇게 함으로써 대규모 시스템을 n개의 시스템으로 분산제어 할 수 있게 되고 부 시스템도 안정하게 된다. 또 궤환이득 G를 계산하는데 있어서 Ns개의 분산 시스템으로 나누어 병렬처리 함으로써 용량과 계산시간을 줄일 수 있고 G_o 와 G_d 를 이용 두 계층 분산 제어기를 구성해서 대규모 시스템을 용량이 적은 여러개의 소형 컴퓨터로 궤환제어 가능케 했다.

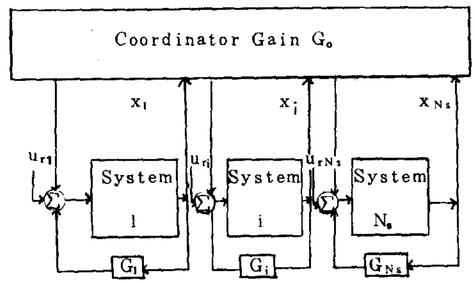

Fig.2 Two-Level feedback control structure

5. 시뮬레이션 결과 및 고찰

A. 전력 시스템[5]

전체 이산시간 방정식과 성능지수는

$$x(r+1) = Ax(r) + Bu(r)$$

$$y(r) = Cx(r)$$

$$J = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\, \|y(r) - y_d\|_Q^2 + \|u(r)\|_R^2 \,\right]$$

이고 각 계수행렬은 다음과 같다.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0.835 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.096 & 0.861 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.029 \\ -0.002 & -0.005 & 0.882 & -0.253 & 0.041 & -0.003 & -0.025 & -0.001 \\ 0.007 & 0.014 & -0.029 & 0.928 & 0. & 0.006 & 0.059 & 0.002 \\ \hline -0.030 & -0.061 & 2.028 & -2.303 & 0.088 & -0.021 & -0.224 & -0.008 \\ 0.048 & 0.758 & 0. & 0. & 0. & 0.165 & 0. & 0.023 \\ -0.012 & -0.027 & 1.209 & -1.400 & 0.161 & -0.013 & 0.156 & 0.006 \\ 0.815 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.011 \end{array}\right]$$

$$B^t = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0. & 0. & 0.294 & -0.038 & 2.762 & 0. & 1.473 & 0. \\ \hline 3.295 & 0.152 & -0.003 & 0.010 & -0.051 & 0.056 & -0.015 & 2.477 \end{array}\right]$$

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ \hline 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \end{array}\right]$$

$$Q = \left[\begin{array}{cc|c} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ \hline 0. & 0. & 1. \end{array}\right] \qquad R = \left[\begin{array}{c|c} 200.0 & 0.00 \\ \hline 0.00 & 200.0 \end{array}\right]$$

$Ns = 2$

$r_f = 80$

초기치와 목표치를 각각

$x^t(o) = [\ 10.0 \quad 4.0 \quad 2.0 \quad 7.0 \quad 4.0 \quad 1.0 \quad 2.0 \quad 1.0\ ]$

$y_d^t = [\ 0 \quad 0 \quad 0\ ]$

로 두고 상위 계층에서 62 번의 반복을 통해 얻은 국부적 궤환이득 G_1, G_2 는

$G_1 = [\ 0.0016 \quad 0.0017 \quad -0.0038 \quad 0.0156\ ]$

$G_2 = [\ 0.0000 \quad -0.0001 \quad 0.0000 \quad 0.0000\ ]$

이고 상위 계층에서 87 번의 반복을 통해 얻은 G 로부터 $G_o = G - G_d$ 에 의해 구해진 조정 이득은 다음과 같다.

$$G_o = \begin{bmatrix} -0.0017 & -0.0018 & -0.0028 & -0.0161 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0222 & -0.0311 & -0.0006 & -0.0007 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0011 \end{bmatrix}$$

이 결과는 Riccati 방정식을 계산해서 구한 이득값과 소수 네째 자리까지 같았으며 제어입력 및 상태변수의 최적궤적은 다음과 같다.

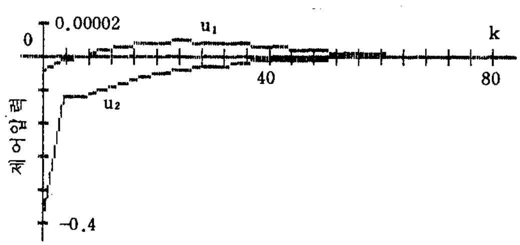

Fig.3 Optimal trajectories of control

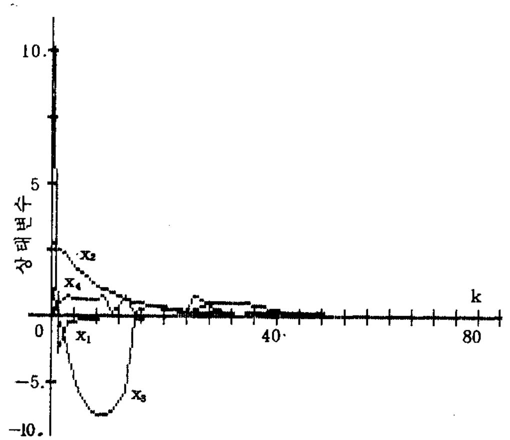

Fig.4 Optimal trajectories of subsystem 1

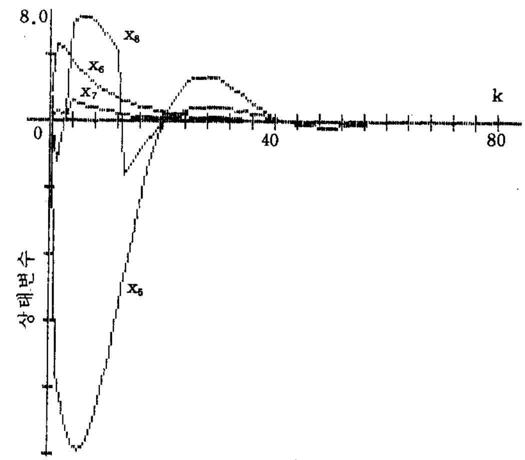

Fig.5 Optimal trajectories of subsystem 2

B. 수질오염 모델6)

이산시간 방정식과 성능지수는

$$x(r+1) = Ax(r) + Bu(r) + d$$

d ; 모델링시 시간지연을 고려한 알려진 값

$$J = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\, \| x(r) - x_d \|^2_{I_4} + \| u(r) \|^2_{100\, I_2} \right]$$

이고 계수행렬은 다음과 같다.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.18 & 0. & 0. & 0. \\ -0.25 & 0.27 & 0. & 0. \\ \hline 0.55 & 0. & 0.18 & 0. \\ 0. & 0.55 & -0.25 & 0.27 \end{array}\right]$$

$$B^t = \left[\begin{array}{cc|cc} -2.00 & 0. & -2.00 & 1.00 \\ \hline 1.00 & -2.00 & -2.00 & 0. \end{array}\right]$$

$C = I_4$ $\quad R = \left[\begin{array}{c|c} 100.0 & 0. \\ \hline 0. & 100 \end{array}\right]$

$d^t = [\ 4.10 \quad 6.37 \quad 1.35 \quad 2.43\ ]$

$Ns = 2$, $r_f = 23$ 로 두고

초기치와 목표치를 각각

$x^t(o) = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]$

$x_d^t = [\ 5 \quad 7 \quad 5 \quad 7\ ]$

로 두고 상위계층에서 15 번의 반복을 통해 얻은 국부적 궤환이득 G_1, G_2 는

$G_1 = [\ 0.0042 \quad -0.0004\ ]$

$G_2 = [\ 0.0042 \quad -0.0004\ ]$

이고 $x(o) = 0$ 의 초기치로 $u(0) = d$ 를 구하면

$u^t(o) = d^t = [\ -0.0511 \ -0.0991\ ]$

이된다. 또, 상위 계층에서 21 번의 반복을 통해서 얻은 G 는

$$G = \begin{bmatrix} 0.01948 & -0.00813 & 0.00683 & -0.00301 \\ -0.00019 & 0.00777 & 0.00236 & 0.00051 \end{bmatrix}$$

이고, Riccati 로 계산한 전체 궤환 이득은

$$G = \begin{bmatrix} 0.01949 & -0.00812 & 0.00084 & -0.00300 \\ -0.00018 & 0.00776 & 0.00236 & 0.00051 \end{bmatrix}$$

이다. 그래서 계층적 구조로 구한 궤환이득과 비교하면 거의 일치함을 볼 수 있고 조정이득은 다음과 같다.

$$G_o = \begin{bmatrix} 0.0153 & -0.0077 & 0.0068 & -0.0030 \\ -0.0002 & 0.0078 & -0.0018 & 0.0009 \end{bmatrix}$$

계층적제어에 대한 제어입력 및 상태변수의 최적궤적은 다음과 같다.

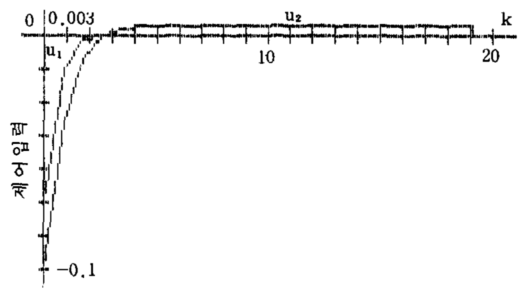

Fig.6 Optimal trajectories of control

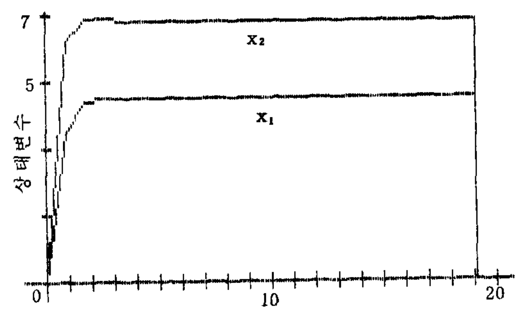

Fig.7 Optimal trajectories of subsystem 1

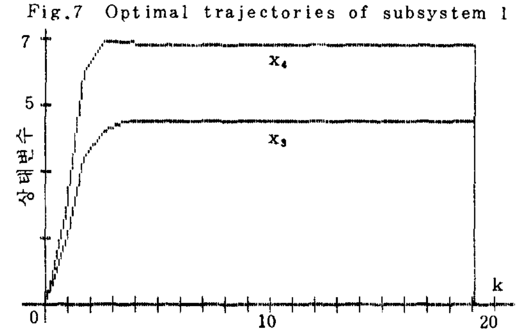

Fig.8 Optimal trajectories of subsystem2

6. 결 론

대규모 이산시간 시스템을 확장된 상호작용 예측방법을 통하여 최적화하고 두 계층 분산제어기를 구성함으로써 모든 계산이 부시스템 차원에서 여러개의 소형 컴퓨터로 병렬처리 되어 컴퓨터 용량과 계산시간이 감소되었다. 그리고 두 계층 분산제어 방법은 통신망과 같이 여러개의 시스템들이 떨어져 전체시스템을 이룰경우 간편하게 제어 할 수 있게했다.
앞으로 확장된 알고리즘을 잡음이 존재하는 대규모 시스템에 응용시켜 보다 실제적인 시스템을 최적화 하는것이 연구과제이다.

참 고 문 헌

1. M.C. Singh: Dynamical Hierarchical Control, North-Holland, 1977.
2. N.R. Sandell, P. Varaiya, M. Athans and M.G. Safonov, "Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems", IEEE Trans. on Auto. Contr., Vol. AC-23, No.2, 1978.
3. M.G. Singh and A. Titli: Decomposition, Optimization and Control, Pergamon Press, Oxford, 1978.
4. M.G. Mahmoud and M.G. Singh: Discrete Systems Analysis, Control and Optimization, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York and Tokyo, 1984.
5. R.G. Phillips, "Reduced Order Modelling and Control of Two-Time-Scale Discrete Systems", INT.J. Control, Vol.31, No.4, 765-780, 1980.
6. M.G. Singh, "River Pollution Control", Int.J. Systems Sci., Vol. 6, No. 1, 9-21, 1975.
7. A.P. Sager and C.C. Wite, III: Optimum Systems Control, Prentice-Hall, 1977.
8. M.G. Singh A. Titli, "Hierarchical Feedback Control for Large Dynamical System", Int.J. Systems Sci., Vol. 8, No.1, 31-47, 1977.
9. M.G. Singh, "A Feedback Solution for The Large Infinite Stage Discrete Regulator and Servomechanism", Compt. & Elect. Engng., Vol. 3, 93-99, 1976.
10. M.S. Mahmoud, "Multilevel Systems Control and Applications", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cyber., Vol. SMC-7, No.3, 1977.