'87 韓國自動制御學術會議論文集 1987. 10.16~17

순환 근사 과결정 ARMA 스펙트럼 추정

°이 철 희* 이 석 원** 남 현 도*** 양 홍 석*
* 서울대 전기과 ** 대유공전 전기과 *** 단국대 전기과

Recursive Approximate Overdetermined ARMA Spectral Estimation

° Chul Heui Lee* Seok Won Lee** Hyun Do Nam*** Heung Suk Yang*
* Seoul National University ** Dae-Yu Jr. College *** Dan-kuk University

ABSTRACT

In this paper, overdetermined method is used for high resolution spectral estimation in case of short data record length. To reduce the computational effort and to obtain recursive form of estimation algorithm, we modify data matrix to have near-Toeplitz structure. Then, new recursive algorithm is derived in the form of fast kalman algorithm.

Two stage procedure is used for the estimation of ARMA parameters. First AR parameters are estimated by using overdetermined modified Yule-walker equation, and then MA parameters are implicitly estimated by estimating numerator spectral coefficients(NS).

1. 서 론

신호처리, 통신 그리고 시스템 이론에서 다루어지는 중요한 문제의 하나는 제한된 수의 시계열 데이타로부터 파워 스펙트럼을 추정하는 것으로서, 근래에는 AR 또는 ARMA 등의 시계열 계수 모델을 이용한 추정알고리즘들이 많이 연구되었다.[1,2,4] 일반적으로 시스템 잡음의 특성을 고려할때 AR 모델보다는 ARMA 모델을 사용하는 경우에 보다 높은 해상력을 얻을 수 있다. ARMA 계수의 추정에 있어서 블록처리 알고리즘들이 많이 발표되었는데, 실시간 응용을 위해서는 순환 추정알고리즘들이 필요하게 되어 ARMA 모델을 2채널 모델로 변환시켜 확장최소자승법 또는 확장 기구변수법등을 사용하여 추정하는 방식들이 제안되었으나 Bootstrapping과정의 도입 및 행렬 연산으로 인하여 상당한 계산량의 증가가 생기므로 실시간 응용에 부적합한 경우가 생긴다.따라서 이러한 문제의 해결을 위해 추정과정을 2스테이지로 나누어 순차적으로 먼저 AR 계수를 추정한 뒤 MA 계수를 추정하는 방법들이 연구되었다.[4,5]

또한 최근에는 실시간 응용에 보다 적합한 고속알고리즘들이 제안되었는데 이는 Levinson 알고리즘을 확장시킨 것으로서 이동불변(shift invariance) 특성을 이용하여 계산량을 감소시킨 것으로 고속 칼만 알고리즘과 격자 알고리즘들이 이에 속한다.[3,5]

파워 스펙트럼의 추정에 있어서 고해상도의 획득은 매우 중요한 문제로서, 협대역 신호들 특히 인접한 주파수를 갖는 정현파들의 경우에는 계수 추정의 정확도를 향상시켜 고해상도를 가져야만 한다.

그런데 계수적 방법들에 의한 파워스펙트럼의 추정은 결국 상관함수정보에 근거하는 것이므로 보다 많은 상관함수 정보를 이용하여 계수를 추정하면 정확도를 높여서 고해상도를 얻을 수 있다. 따라서 정규 방정식의 수(M)가 계수의 수(P)보다도 많은 (일반적으로 M≈2P~3P) 과결정 추정방식들이 제안되었으나 계산량이 과도하게 증가하며 순환 알고리즘의 구현이 힘들다.[2]

본 논문에서는 전치 윈도우 데이타 집합의 경우에 대해 고해상도의 파워 스펙트럼 추정이 가능하도록 과결정 추정기법을 적용하되 계산량의 감소와 순환 알고리즘의 구현

이 용이하도록 데이타 행렬을 near-Toeplitz 구조를 갖도록 변형, 근사화시켜 저차의 변위 차수를 가져서 Ljung등[3]이 제안한 고속 칼만 알고리즘의 형태로 유도 가능하게 하여 효과적인 순환 알고리즘을 제시하였다. 그리고 ARMA 모델을 사용하여 과결정 변형 Yule-Walker 방정식을 이용하여 AR 계수를 추정한 뒤 그 잔차를 이용하여 MA 계수를 추정하는 방식을 사용하여 계수를 추정한 뒤 이로부터 파워 스펙트럼을 추정하였다.

2. 과결정 AR 계수 추정

이 절에서는 과결정 변형 Yul-Walker 방정식을 사용하여 AR계수를 추정하는 방식에 대해 설명하고자 한다. 일반적으로 데이타 집합은 아래와 같이 ARMA(p,q)모델로 표현될 수 있다.

$$y(t) + \sum_{i=1}^{p} a_i\, y(t-i) = \sum_{j=0}^{q} b_j e(t-j) \qquad (1)$$

여기서 $\{e(t)\}$는 0평균, 단위 편차인 백색 잡음이다. (1)의 양변에 $y(t-m)$을 곱하여 기대치를 취하면

$$r(m) + \sum_{i=1}^{p} a_i r(m-i) = 0, \quad m>q \qquad (2)$$

(2)식을 AR 차수만큼 취하여 행렬 형태로 표현하면

$$\begin{bmatrix} r(q+1) \\ r(q+2) \\ \vdots \\ r(q+p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r(q) & \cdots\cdots & r(q+1-p) \\ r(q+1) & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ r(q+p-1) & \cdots & r(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.a)$$

$$\underline{r}_t + R_t \underline{a}_t = 0 \qquad (3.b)$$

$$\underline{a}_t = -R_t^{-1} \underline{r}_t \qquad (4)$$

따라서 (3)식으로부터 (4)식과 같이 AR계수를 계산할 수 있으며 (3)식을 변형 Yule-Walker 방정식이라고 한다.[4] 그러나 대부분의 경우 실제로 참 상관계수 r(i)의 값은 모르므로 주어진 데이타 집합으로부터 상관계수 r(i)의 값을 추정하게 된다.

전치 윈도우 데이타 집합의 경우 데이타의 수가 N일때

$$\tilde{r}(N) = Y(N)^T \underline{y}(N) \qquad (5)$$

$$\tilde{R}(N) = Y(N)^T X(N) \qquad (6)$$

여기서

$$Y(N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ y(1) & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & y(1) \\ y(N-q-1) & \cdots & & y(N-q-p) \end{bmatrix} \qquad \underline{y}(N) = \begin{bmatrix} y(q+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$

$$X(N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ y(q+1) & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & y(q+1) \\ y(N-1) & \cdots & & y(N-p) \end{bmatrix}$$

따라서 AR 계수는 (7)식으로 추정할 수 있다.

$$\underline{\tilde{a}}(N) = -\tilde{R}(N)^{-1} \underline{\tilde{r}}(N) \qquad (7)$$

(7)식에서의 문제는 $\tilde{R}(N)$의 역행렬을 계산하는 것으로서 행렬역연산 정리를 적용할 경우 $O(p^2)$의 계산량이 필요하다. 그런데 $\tilde{R}(N)$은 Toeplitz 행렬과 유사한 구조를 갖고 있으며 변위 차수가 3이므로 이동불변 특성을 이용하여 계산량이 $O(p)$인 순환 고속 알고리즘을 구현할 수 있다.[3]

위의 계수 추정 방식을 협대역 신호와 같이 고해상도를 요구하는 경우에 대해서 적용할 경우 만족스럽지 못한 성능을 보일 수 있다. 그러므로 이러한 특성을 갖는 신호에 대해서는 계수 추정의 정확도를 높여주는 과결정 계수 추정 방식을 사용하는 것이 좋다. 과결정 계수 추정 방식에서는 $M(>P)$개의 정규 방정식을 이용하여 P개의 AR 계수를 추정하게 되며 보통 $M \simeq 2P-3P$ 정도이다. 여기서 전치 윈도우 데이타 집합의 경우에는 식(5),(6)의 데이타 행렬 Y(N)은 아래와 같이 변형된다.

$$Y(N) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ y(1) & \ddots & & \\ y(M) & \cdots & & y(1) \\ \vdots & & & \vdots \\ y(N-q-1) & \cdots & & y(N-q-M) \end{bmatrix}$$

따라서 $\tilde{R}(N)$은 정방행렬이 아니므로 (7)식과 같이 AR 계수를 추정할 수 없게되므로 최소자승의 개념으로 추정치를 구하면 아래와 같이 주어진다.

$$\underline{\hat{a}}(N) = -(\tilde{R}(N)^T \tilde{R}(N))^{-1} \tilde{R}(N)^T \underline{\tilde{r}}(N)$$

$$= -((Y(N)^T X(N)^T (Y(N)^T X(N))^{-1} (Y(N)^T X(N))^T Y(N)^T \underline{y}(N) \tag{8}$$

$\tilde{R}(N)^T \tilde{R}(N)$ 의 변위 차수(α)는 $\tilde{R}(N)$의 제곱이 되므로[5] 이동불변 특성을 이용하여 고속 알고리즘을 구현하는 것이 용이치 않다. 그런데 (8)식을 다시 정리하면

$$a(N) = -((Y(N)Y(N)^T X(N))^T X(N))^{-1} (Y(N)Y(N)^T X(N))^T \underline{y}(N) = -(\tilde{Z}(N)^T X(N)^{-1} \tilde{Z}(N)^T \underline{y}(N) \tag{9}$$

여기서 $\tilde{Z}(N)$을 아래와 같은 형태의 $Z(N)$으로 근사화하여 대치하면

$$Z(N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ Z(q+1) & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ Z(q+q) & & & Z(q+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ Z(N-1) & \cdots & \cdots & Z(N-p) \end{bmatrix} \tag{10}$$

이때 $Z(i) = [\,0 \;\ldots\; 0\; 1\,]\; Y(i)Y(i)^T \underline{y}(i)$ (11)

그러면 $Z(N)^T X(N)$의 변위 차수가 3이 되어 고속 알고리즘을 용이하게 구현할 수 있다. 그런데 행렬 $Z(N)$의 요소 $Z(i)$는 시간 $t > i$ 의 순간에는 update 되지 않는 것이 $Z(N)$의 요소 들과의 차이점인데 (11)과 같이 근사화하는 이유는 순환 알고리즘으로 구현하기 위해서이다. 따라서 이 경우 AR 계수는 아래와 같이 근사과결정 추정자로 추정할 수 있다.

$$\hat{\underline{a}}(N) = -(Z(N)^T X(N)^{-1} Z(N)^T \underline{y}(N) = -R(N)^{-1} \underline{r}(N) \tag{12}$$

3. 순환 근사 과결정 추정 알고리즘

본 절에서는 2절에서 유도한 (10),(12)의 근사 과결정 추정자를 Ljung등[3]이 제시한 고속 칼만 알고리즘의 형태로 구현하기로 한다.

시간 t일때 (12)식의 행렬 $R(t)$를 다시 표현하면

$$R(t) = Z(t)^T X(t) = \sum_{i=q+1}^{t} \underline{Z}(i)\, \underline{X}(i)^T \tag{13}$$

여기서 $\underline{Z}(i) = [Z(i-1) \;\ldots\; Z(i-p)]^T$

$\underline{X}(i) = [y(i-1) \;\ldots\; y(i-p)]^T$

고속 칼만 이득 $K(t)$를 아래와 같이 정의하자.

$$K(t) \triangleq R(t)^{-1} \underline{Z}(t) \tag{14}$$

그러면 $R(t)K(t) = \underline{Z}(t)$ (15)

$$R(t+1)K(t+1) = \underline{Z}(t+1) \tag{16}$$

그리고 $\bar{Z}(t)$, $\bar{X}(t)$, $\bar{R}(t)$를 아래와 같이 정의하자.

$$\bar{Z}(t) \triangleq \begin{pmatrix} Z(t) \\ \underline{Z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}(t+1) \\ Z(t-p) \end{pmatrix} \qquad \bar{X}(t) \triangleq \begin{pmatrix} y(t) \\ \underline{X}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{X}(t+1) \\ y(t-p) \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}(t) \triangleq \sum_{i=q+1}^{t} \bar{Z}(i)\bar{X}(i)^T$$

이때 $\bar{R}(t)$는

$$\bar{R}(t) = \left(\begin{array}{c|c} \pi(t) & P(t)^T \\ \hline Q(t) & R(t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R(t+1) & \tilde{Q}(t) \\ \hline \tilde{P}(t)^T & \tilde{\pi}(t) \end{array}\right) \tag{17}$$

$$P(t) = \sum_{i=q+1}^{t} Z(i)\underline{X}(i)$$

$$\tilde{P}(t) = \sum_{i=q+1}^{t} Z(i-p)\, \underline{X}(i+1) \tag{18}$$

그러면 $$\bar{R}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \underline{Z}(t) \end{pmatrix} = \bar{Z}(t) + \begin{pmatrix} \alpha(t) - Z(t) \\ \underline{0} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\bar{R}(t)\begin{pmatrix} K(t+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}(t+1) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \bar{Z}(t) + \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \beta(t) - Z(t-p) \end{pmatrix} \tag{21}$$

여기서 $\alpha(t) = P(t)^T K(t)$

$\beta(t) = \tilde{P}(t)^T K(t+1)$

이때 아래와 같이 $A(t)$, $\bar{D}(t)$, $K(t)$를 정의하면

$$\bar{R}(t)\bar{K}(t) \triangleq \bar{Z}(t) \tag{22}$$

$$\bar{R}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ A(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma(t) \\ \underline{0} \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\bar{R}(t)\bar{D}(t) = \bar{R}(t)\begin{pmatrix} D(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \phi(t)^{-1} \end{pmatrix} \tag{24}$$

간단한 계산과정을 거치면 이로부터

$$\bar{K}(t) = \begin{pmatrix} -\Sigma(t)^{-1}(\alpha(t) - Z(t)) \\ K(t) - A(t)\Sigma^{-1}(t)(\alpha(t) - Z(t)) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\bar{R}(t)[\bar{K}(t) - \bar{D}(t)\mu(t)] = Z(t) - \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \phi(t)^{-1}\mu(t) \end{pmatrix} \tag{26}$$

따라서 (21), (26)으로부터

$$K(t+1) = r(t) - D(t)\mu(t) \tag{27}$$

이때 (23)식에서 정의된 벡터 $A(t)$가 전향예측자계수에 상응하게 되고 $D(t)$가 후향예측자 계수에 상응하게 된다. $\bar{R}(t)$의 정의로부터

$$\bar{R}(t)=\bar{R}(t-1)+\bar{Z}(t)\bar{X}(t)^T \quad (28)$$

$$\epsilon_o(t) \triangleq y(t)+\underline{X}(t)^T A(t-1) \quad (29)$$

(28)식 X $\begin{pmatrix} 1 \\ A(t-1) \end{pmatrix}$ 과 (20)식 X $\epsilon_o(t)$로부터

$$R(t)\begin{pmatrix} 1 \\ A(t-1)-K(t)\epsilon_o(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Sigma(t-1)+(z(t)-\alpha(t))\epsilon_o(t) \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (30)$$

(30)와 (23)으로부터

$$A(t) = A(t-1)-K(t)\epsilon_o(t) \quad (31)$$

$$\Sigma(t) = \Sigma(t-1)+(Z(t)-\alpha(t))\epsilon_o(t)$$

$$= \Sigma(t-1)+\epsilon(t)\epsilon_o(t) \quad (32)$$

(27)식을 이용하여 K(t+1)을 계산하기 위해서는 D(t)를 순환적으로 update해야 된다.

(28)식 XD(t-1)과 (28)식 X[K(t) D(t-1)로부터

$$\bar{R}(t)\begin{pmatrix} D(t-1)-r(t)\eta_o(t) \\ 1-u(t)\eta_o(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(t-1)^{-1} \end{pmatrix} \quad (33)$$

따라서 (24)와 (33)로부터

$$D(t)=[D(t-1)-r(t)\eta_o(t)]/[1-\mu(t)\eta_o(t)] \quad (34)$$

(32)식에서 보면 $\epsilon(t)$의 계산도 필요한데 (18)식과 $\alpha(t)$의 정의로부터

$$P(t) = P(t-1) + Z(t)\underline{X}(t) \quad (35)$$

$$\epsilon(t) = Z(t) - P(t)^T K(t) \quad (36)$$

또한 $\eta_o(t)$를 다시 쓰면

$$\eta_o(t) = y(t-p)+\underline{X}(t+1)^T D(t-1) \quad (37)$$

이제 남은 문제는 행렬 Z(t)의 마지막 번째 요소인 Z(t)의 update이다.

이것은 (11)로부터 [0..... 01]Y(t)의 마지막 열과 $Y(t)^T \underline{y}(t)$의 곱으로 생각할 수 있으므로 $\underline{h}(t)$와 $\underline{c}(t)$를 아래처럼 정의하면

$$\underline{h}(t) \triangleq [y(t-1) \; ..... \; Y(t-M)]^T \quad (38)$$

$$\underline{c}(t) \triangleq Y(t)^T \underline{y}(t) \quad (39)$$

따라서 $$\underline{c}(t) = \underline{c}(t-1)+y(t)\underline{h}(t-q) \quad (40)$$

$$z(t) = \underline{h}(t-q)^T \underline{c}(t) \quad (41)$$

이상에서 유도한 결과를 정리하면 순환 근사 과결정 AR 계수추정 알고리즘은 표1과 같다.

표1. 순환 근사 과결정 AR 계수 추정 알고리즘

Table 1. Recursive Approximate Overdetermined AR Parameter Estimation Algorithm.

계산할 변수	사용 식
Z(t)	(38)
	(40)
	(41)
$\epsilon_0(t)$	(29)
A(t)	(31)
P(t)	(35)
$\epsilon(t)$	(36)
$\Sigma(t)$	(32)
$\bar{K}(t)$	(25)
$\eta_o(t)$	(37)
D(t)	(34)
K(t+1)	(27)

4. MA 계수의 추정

본절에서는 MA계수의 추정에 있어서 Moses등 [5]이 제안한 방식을 이용하여 분자 스펙트럼 계수를 추정하여 파워 스펙트럼을 추정하였다.

$$A(z) = 1+a_1 Z^{-1}+ \; ... \; + a_p Z^{-p} \quad (42)$$

$$B(z) = b_o + b_1 Z^{-1} + \; ... \; + b_q Z^{-q} \quad (43)$$

으로 정의하면 91)식의 Z변환을 취하면

$$Y(z) = (B(z)/A(z)) \; E(z) \quad (44)$$

따라서 파워스펙트럼은

$$S_y(w) = \left|\frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})}\right|^2 \sigma_e^2 = \frac{C(e^{j\omega})}{|A(e^{j\omega})|^2} \quad (45)$$

$$c(z) \triangleq B(z)B(z^{-1}) \quad (46)$$

(46)으로 정의된 c(Z)의 계수들을 분자 스펙트럼 계수라고 하며 MA계수대신 이를 추정함으로써 파워 스펙트럼을 추정할 수 있다.

(1)식에서 전향예측오차를 $\epsilon_o(t)$라고 하면

$$y(t) + \sum_{i=1}^{p} a_i y(t-i) \triangleq \epsilon_o(t) \quad (47)$$

$$\epsilon_o(t) = \sum_{i=0}^{p} a_i y(t-i) \qquad (a_o=1) \quad (48)$$

그러면 $C(e^{j\omega})$ 는 $\{\epsilon_0(t)\}$ 의 spectrum이므로

(49)

이를 Moses등[5]이 제시한 바와 같이하여 시평균을 이용하여 근사화하여

$$C_k(t)=[W_k/(t-q-k)]\sum_{i=q+1}^{t-k}\lambda^{t-k-i}\epsilon_0(i+k)\epsilon_0(i) \tag{50}$$

여기서 W_k는 윈도우 시퀀스이고 λ는 지수망각인수이다. (50)은 아래와 같이 순환적으로 update되며

$$C_k(t)=[\lambda(t-1-q-k)C_k(t-1)+W_k\epsilon_0(t)\epsilon_0(t-k)]\cdot[1/(n-q-k)] \tag{51}$$

$\tilde{C}_k(t) \triangleq [1/(n-q-k)]C_k(t)$ 로 정의하면

$$\tilde{C}_k(t)=\lambda\tilde{C}_k(t-1)+W_k\epsilon_0(t)\epsilon_0(t-k) \tag{52}$$

따라서 (45),(31),(52)을 이용하여 파워 스펙트럼을 추정할 수 있다.

5. 결 론

적은 량의 시계열 데이타 집합에 대하여 시계열 모델을 이용하여 파워 스펙트럼을 추정하는 경우에 계수 추정의 정확도를 높여 고행상도를 얻는 것이 필요하므로 계수의 차수보다 많은 정규 방정식을 이용하여 계수를 추정하는 과결정 계수추정방식을 사용하면 좋다. 그러나 이 경우 계산량이 과다하게 늘어나고 순환 알고리즘으로의 구현이 용이치 않으므로 본 논문에서는 전치 윈도우 데이타 집합의 경우에 데이타 행렬을 변형, 근사화시켜 고속 칼만 알고리즘의 형태로 순환 AR 계수 추정 알고리즘을 제시하였다.

그리고 신호의 모형화에 ARMA 모델을 이용하여 과결정 변형 Yule-Walker 방정식을 풀어 AR 계수를 추정한 뒤, MA계수를 추정하는데 있어서 MA 계수대신 분자스펙트럼 계수를 추정하여 효과적으로 파워스펙트럼을 추정하도록 하였다.

본 논문에서 제시된 알고리즘은 인접한 주파수를 갖는 정현파들과 같은 협대역 신호의 스펙트럼 추정에 이용될 수 있다.

REFERENCES

[1] S.M. Kay and S.L. Marple, Jr., "Spectrum Analysis -A Modern Perspective," Proc. IEEE, Vol.69, pp.1380-1419, Nov., 1981.

[2] J.A. Cadzow, "Spectral Estimation : An Over-determined Rational Model Equation Approch," Proc. IEEE, Vol,70, pp.907-939, Sept., 1982.

[3] L. Ljung, M. Morf and D.D. Falconer," "Fast Calculation of Gain Matrices for Recursive Estimation Schemes," Int. J. Contr., pp.1-19, 1978.

[4] B. Friedlander, "Efficient Algorithm for ARMA Spectral Estimation," Proc. IEE, Pt.F, Vol.130, pp.195-201, Apr. 1983.

[5] R.L. Moses, J.A. Cadzow and A.A. Beex, "A Recursive Procedure for ARMA Modeling," IEEE Tr. ASSP. Vol. ASSP-33, pp.1188-1196, Oct. 1985.