

# 칼만 필터의 최근 동향 및 발전

이 장 규

서울대학교 제어계측공학과

이 연 석

서울대학교 제어계측공학과

## Advanced Kalman Filter -- A Survey --

Jang G. Lee

Seoul National Univ.

Yeon S. Lee

Seoul National Univ.

### Abstract

The Kalman filter is an optimal linear estimator that has been an active research topic for the past three decades. The scheme has become the milestone of modern filtering, and it is applied to many areas including navigations and controls of free vehicle. The Kalman filter technique is matured. But some problems are still remained to be resolved. The prevention of divergence induced by digital implementation, nonoptimal application for nonlinear system, and application to non-Gaussian processes are some of the problems. This paper surveys the problems. The square root filtering is suggested to prevent the divergence. The extended Kalman filter is used for nonlinear systems. And, many other approaches to Kalman-like optimal estimators are also investigated.

### 1. 서 론

칼만 필터는 선형시스템의 상태변수를 추정하는 방법으로서 1960년 칼만에 의하여 소개된 이후(1,2) 현재까지 매우 많은 연구가 진행되어 왔다. 칼만 필터는 구조가 선형적이며 여러가지 의미에서 최적성을 나타내고, 수렴성과 강인성이 어느정도 보장되며 또한 총선의 스펙트럼분석방법에서 벗어난 시간영역에서의 처리기법이므로 디지털컴퓨터에 의한 실시간처리가 가능한 특성이 있어서, 가히 추정론을 대표할 수 있을 만큼 발전을 거듭하여 왔다.

특히 칼만 필터는 항법장치의 특성과 잘 조화되어 초창기에 항법분야에서 많이 발달하여 최근에는 항공, 선박분야의 제어에 필수적인 요소로 되었으며 다른분야로의 응용이 일반화되어 가고 있다. 또한 칼만 필터의 특성은 Regulator Problem과 쌍대성의 관계를 갖고 있어 제어분야에서 발달된 Regulator Problem에 대한

여러가지 정리들을 적용할 수 있는 잇점을 갖고 매우 빠른 속도로 발전되어 여러가지 문제에 적용되고 있다.

그러나 아직은 실제문제의 적용에 있어서 완전히 해결되지 못한 문제점들이 남아 있기도 하다. 특히 디지털컴퓨터를 사용하여 계산할 때 고정숫자점연산의 절삭오차에 의한 수렴성의 파괴와 선형시스템에서 보장되는 최적성을 비선형시스템에서도 유지할 수 있도록 하는 방법, 그리고 시스템이나 잡음에 대한 정확한 지식이 없을 때에도 원래의 칼만 필터가 갖는 장점들을 유지시키는 문제등이 현재에도 연구되고 있는 주요 문제점에 속한다.

여기에서는 칼만 필터의 사용시에 발생하는 제한점들의 해결방안에 대한 연구들을 3장의 제곱근칼만 필터(square root Kalman filter), 4장의 비선형칼만 필터, 5장의 적응칼만 필터등으로 나누어 알아보고, 최근의 연구동향을 살펴봄으로써, 앞으로 칼만 필터에 대하여 연구하는데 도움이 되도록 하였다. 참고문헌은 본문의 내용에 따라서 분류하였으며, 주로 제어와 항법분야에서 발표된 내용들을 위주로 하였다.

### 2. 칼만 필터 (Kalman Filter)

일반적인 선형시스템은 식(2-1)과 같이 선형미분방정식으로 표시될 수 있으며, 측정지와 상태변수와의 관계가 식(2-2)와 같이 표현되고, A1, A2, A3의 가정들이 성립될 때, 최적 필터인 칼만 필터는 식(2-3)과 식(2-4)와 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (2-1)$$

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t) \quad (2-2)$$

A1. 모든 신호들은 가우시안분포를 갖는다.

A2. 시스템잡음  $w(t)$ 와 측정잡음  $v(t)$ 는 영평균백색잡음이며, 그 분산행렬은 각각  $Q(t)$ 와  $R(t)$ 로서 모두 정칙성을 갖는다.

A3.  $w(t), v(t), x(t)$ 들은 서로 상관관계가 없다.

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t) + K(t)\{y(t) - H(t)\hat{x}(t)\} \quad (2-3)$$

$$K(t) = P(t)H(t)R(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & P(t)F^T(t) + F(t)P(t) - K(t)R(t)K^T(t) \\ & + G(t)Q(t)G^T(t) \end{aligned} \quad (2-4)$$

또한 식(2-5),(2-6)과 같은 이산차분방정식의 경우에도 같은 조건 아래 칼만필터식이 구해지는데 연속신호인 경우와 달리 측정치보강 ( measurement update or A posteriori estimation )과 선점적추정 ( prediction or A Priori estimation )등의 2단계로 계산이 진행된다.

$$x(k+1)=F(k)x(k)+G(k)w(k) \quad (2-5)$$

$$y(k) =H(k)x(k)+v(k) \quad (2-6)$$

측정치 보강:

$$\hat{x}(k) =\bar{x}(k)+K(k)\{y(k)-H(k)\bar{x}(k)\} \quad (2-7)$$

$$K(k) =\bar{P}(k)H^T(k)\{H(k)\bar{P}(k)H^T(k)+R(k)\}^{-1} \quad (2-8)$$

$$P(k) =\{I-K(k)H(k)\}\bar{P}(k) \quad (2-9)$$

선점적 추정:

$$\bar{x}(k+1)=F(k)\hat{x}(k) \quad (2-10)$$

$$\bar{P}(k+1)=F(k)P(k)F^T(k)+G(k)Q(k)G^T(k) \quad (2-11)$$

여기서 칼만필터는 프로세스잡음  $w$ 와 측정잡음  $v$ 가 상관관계가 없을 때에 유도된 식이나, 만일 두가지 잡음들이 서로 상관관계가 존재할 때에도 같은 과정으로 칼만이득  $K$ 를 구할 수 있다. 또한 측정잡음  $v$ 가 백색잡음이 아닐 경우에는 형상필터 ( shaping filter )를 사용하여 적당한 상태변수들을 추가시키고 잡음을 백색잡음으로 하여 칼만필터를 구성한다.(5,6,7)

이와 같은 칼만필터는, 당시에 시스템의 동작을 설명하기 위하여 사용되기 시작하였던 상태변수표시법과 또한 디지털 컴퓨터의 발전에 힘입어, 종래의 주파수영역에서 설계되었던 위너필터( Wiener filter )의 개선을 목적으로 제시되었으므로 위너필터와 칼만필터는 서로 많은 관계를 지니고 있다.(1-4)

위너필터는 설계가 까다롭고 실시간 구현이 어려우며 복잡한 계산을 요구하는 반면에, 칼만필터는 시간영역에서 설계되어 컴퓨터로 구현시키기가 용이하며 또한 설계 자체도 용이하고, 특히 여러가지 의미에서 최적성을 나타내고 있어 당시의 추정 이론에 획기적인 발전방향을 제시하게 되었다. 칼만이 직교투영성 ( orthogonal projection )을 이용하여 최적필터를 유도하였으나, 이는 오차의 최소평균분산치의 의미에서도 최적필터를 나타내며, (8,9,120,122) Minimax추정법에서의 최적필터도 오차크기의 규정에 따라 칼만필터를 유도할 수 있으며,(10-13) 점추정 ( point estimation )에서는 샘플평균 ( sample mean )의 형태로 나타나므로(14) 신호들이 가우시안분포를 가질 경우의 최소제곱추정치 ( least square estimation)와 같이 나타나며,(15,16,124) 또한 Blended Model 상태변수추정법과도 같은 의미로 사용될 수 있음을 보여주기도 한다.(17)

칼만필터가 여러가지 추정법들과 공통성을 나타내는 이유는 각 의미에서 최적성을 나타내기 때문이다. 칼만필터의 최적성은 여러 문헌들에서도 언급되고 있는데,(119-124,127) 특히 Gelb는 추정치오차의 최소제곱평균치를 사용하여 칼만필터를 설명하였고, Jazwinski는 최대조건평균치의 의미로서 설명하였으며, 다른 여러 사람들이 여러가지 의미에서 그 최적성을 고찰

하였다.(18-20)

이러한 최적성이 유지되는 가장 큰 이유는 칼만필터의 오차분산 행렬  $P$ 가 일정한 값에 수렴한다는 점에 있다. 식(2-4)의  $P$ 에 대한 전개식은 잘 알려진 리카티방정식이다. 여기에서  $Q,R$ 은  $w,v$ 의 분산행렬이므로 정칙성 ( positive definiteness )을 가지며, 정칙 행렬  $P$ 는 유일하게 결정되고, 그 특성근들의 실수부는 항상 음으로써 칼만필터는 수렴성이 보장된다.(125-127) 또한  $P$ 의 수렴값은 최소추정오차의 분산행렬로서 칼만필터는 그 수렴성과 최적성을 보장받게 된다.

수렴성을 보장받는 칼만필터의 추정된 상태변수는 모델링 된 상태변수에는 접근하지만, 실제의 상태변수에 어느정도 접근하게 되는지는 모델링이 얼마나 정확하게 되었는가에 따라 결정된다. 또한  $P$ 의 초기치나  $Q$ 와  $R$ 의 크기에 따라 추정된 상태변수의 의미가 달라지므로, 필터를 설계할 때 주의해야 한다.(21)

이와 같이 추정법에서의 오차의 크기는 추정법의 성능을 나타내는 지표가 되며, 일반적인 최소오차한계를 지시하는 Cramer-Rao한계치는 바로 칼만필터에서 계산되는  $P$ 를 지시하기도 한다.(22-25) 이러한 오차해석과 더불어 필터의 발산현상은 여러가지 의미에 고찰되며, 각각의 적용에 따라서 해석되기도 한다. 이러한 성질들은 상태변수를 어떻게 선택하는, 어떠한 좌표계에서 해석하든 관계없이 유지된다.(26,27)

이상과 같은 여러가지 성질들은 주로 시간영역에서 고찰되었으나 최근에는 주파수영역에서의 고찰도 진행되고 있으며,(28-31) 이 외에도 여러가지면에서 칼만필터의 성능을 분석 평가하고 있다.(32-40)

### 3. 제곱근 칼만필터 ( Square Root Kalman Filter )

2장에서 언급한 바와 같이 칼만필터에서의 행렬  $P$ 는 Cramer-Rao 한계치를 지시하는 최소오차분산행렬로서 항상 정칙성을 지니며 그 수렴성과 최적성이 보장된다. 그러나 디지털컴퓨터로 구현시킬 때에는 정칙성이 파괴될 수 있으며, 계산되는 행렬식의 특이치의 최대값과 최소값의 비율인 특이율 ( conditional number )은 이러한 걸작오차의 영향을 매우 크게하여 필터의 발산을 초래하는 경우도 있다.(41-47) 이와 같은 현상은 칼만필터의 실시간구현시에 자주 나타나며, 계산시간을 줄이기 위하여 짧은 단어길이 ( word-length )로 계산하거나 또는 고정숫자점연산으로 처리할 때에는 매우 조심하여야 할 점이다.

걸작오차에 의한 필터의 발산효과를 방지하기 위하여 배정도 계산 ( double precision )을 사용하거나 유동숫자점연산을 사용하지만, 제곱근칼만필터 ( square root Kalman filter )도 많이 사용된다. 제곱근칼만필터는 식(3.1)과 같이  $P$ 를 제곱근행렬로 나누어 계산하는 것이 그 주요점인데, 제곱근행렬을 구하는 방식주로 Choleski분해법 ( decomposition algorithm )이 사용된다. 제곱근행렬을 사용하는 잇점은 먼저 행렬식의 특이율을 절반으로 줄일 수 있으며, 또한  $P$ 는 항상 두 제곱근행렬의

제곱으로 표현되므로 정칙성을 유지할 수 있다는 점이다.

$$P = S \cdot S^T \quad (3-1)$$

초기에 Potter에 의하여 제시된 제곱근칼만필터는 프로세스 잡음이 없는 경우에 대하여 전개되었으며 추정치도 하나인 경우에 대하여 구성하였다. 추정치가 여럿일 경우에도 추정치에 부가되는 잡음들이 센서들의 독립적인 특성에 기인하므로 서로 독립적으로 고려될 수 있으며, 따라서 각 추정치에 대하여 각각 추정치보장을 전개시킬 수 있고, Singer와 Sea에 의하면 이러한 방법이 계산량을 줄일 수 있다는 것을 보였다.(48) Bellantoni와 Dodge는 Potter의 알고리즘을 벡터의 경우로 확장하여 추정치 잡음의 분산행렬을 대각행렬로 변환시켜 전개하였으며,(49) 또한 Andrew는 대각행렬로의 변환 대신에 R을 Choleski분해법을 이용하여 추정잡음의 효과를 추정치보장의 순서대로 미치게 하여, 추정치의 갯수 만큼의 추정치를 순차적으로 보장시키는 방법을 사용하여 효율을 증대시켰다.(50)

그러나 문제는 S의 선형적추정치의 계산에 있다. 실제로 프로세스잡음이 있는 경우의 P의 선형적추정치의 전개식인 식(2-11)은 단순히 구해지지는 않는다. 이에 따라서 S의 선형적 추정식은 여러가지 형태로 개발되었다. Calson은 S를 제곱하여 P를 구하고 식(2-11)을 수행하여  $\bar{P}$ 를 구한 다음 다시 Choleski 분해법을 사용하여  $\bar{S}$ 를 구하는 RSS( root sum square)방식을 사용하였고,(52) Golub은 Q의 제곱근행렬 W를 사용하여 Gram-Schmidt방법으로써 S의 선형적추정치를 구하는 삼각행렬화방법(triangularization method)을 사용하였는데, 이를 계산하는 알고리즘에 따라 Householder알고리즘이나 Given's알고리즘, 또는 Modified Gram-Schmidt알고리즘등이 있다.(51,122)

이와 같은 알고리즘들은 현재의 Gram-Schmidt방법보다도 계산량을 줄여줄 뿐만 아니라 컴퓨터내에서 차지하는 메모리의 양도 줄여 준다. 또한 계산량이 적으므로 그만큼 계산오차 역시 줄어들게 된다.

이상의 제곱근칼만필터는 모두 리카티방정식으로 전개되는 오차분산행렬에 대하여 고찰되었으나 또다른 형태로부터 제곱근필터를 구할 수 있다. 그것은 리카티방정식 대신에 Chandrasekhar 방정식을 이용하는 것만이 다른 본 앞에서와 거의 같은 방식으로 유도될 수 있다.(52-57)

제곱근필터의 또 다른 형태는 U-D칼만필터이다. U-D칼만필터는 제곱근칼만필터와 개념은 같으나 오차분산행렬 P를 대각행렬 D와 두개의 삼각행렬 U의 곱으로 표현하는 점이 다르다.(58-66) U-D칼만필터는 제곱근칼만필터보다는 좀더 유리한 점이 많아 현재에는 대체적으로 U-D칼만필터를 많이 사용하고 있으며, 이와 같은 여러가지 칼만필터의 형태들은 많이 비교되고 있다.

#### 4. 비선형 칼만필터

칼만필터는 시스템이 선형인 경우에 적용될 수 있는 추정법 이므로 비선형시스템의 상태변수를 추정할 때에는 더 이상의

의미가 없다. 비선형시스템의 상태변수를 추정하는 방법은 여러가지가 제시되었으나, 뚜렷한 방법은 아직 제시되지 못하고 있다. 단지 비선형시스템의 상태변수추정에는 유한차수의 필터로서는 최적필터의 구성이 불가능하며, 무한차수로서만이 최적필터를 구성할 수 있다.(67,68,119)

따라서 선형인 경우에 최적성을 나타내는 칼만필터를 비선형 시스템의 상태변수를 추정할 때에도 사용하게 되는데, 그 근간이 되는 것은 비선형시스템의 선형화방법에 있다. 비선형시스템의 선형화방법에는 섭동법(perturbation method)과 의사선형법(quasilinearization),(69) 그리고 추계적선형법(stochastic linearization)(70-73)등이 사용되고 있으며, 주로 첫번째 방법에 의한 확장칼만필터법이 많이 사용되고 있다.(73-78)

비선형시스템을 섭동법을 이용하여 선형화시킨 다음 이 선형화 모델에 대하여 칼만필터를 적용시키는 선형화칼만필터는 선형화 모델을 잘못 선정하였을 경우에는 전혀 다른 값을 추정하게 된다. 이러한 단점을 보강하기 위하여 초기치에 대하여 선형화된 모델에서 다음의 추정치를 구하고, 새로운 추정치를 사용하여 다시 선형화모델을 구하여 다음 값을 추정하는 방법을 사용하게 되는데, 이 방법을 확장칼만필터라고 한다.

그러나 이와 같은 확장칼만필터는 매번 상태변수가 추정될 때마다 새로이 선형화가 필요하게 되고 또한 칼만이득 K를 선형 시스템의 경우와는 달리 비직결처리(off-line process)로 구할 수 없으므로 상당히 많은 계산시간을 필요로 하게 된다. 또한 선형화과정에서의 오차를 무시할 수 없을 때에는 더욱 복잡한 과정이 필요하게 된다.(74) 반면에 시스템이 cone-bound되어 있다고 하면 어느정도의 오차를 감수하고 칼만이득을 비직결처리로서 구할 수도 있다.(79)

확장칼만필터에서는 추정된 상태변수로부터 선형적추정치를 얻어내고 나서 추정치보장으로써 새로이 평형점을 구하게 되는데 이때의 선형적추정치는 보간법(interpolation)을 사용하여 그 오차를 줄일 수도 있다. 즉 선형적 추정치는 전상태에 선형화된 식으로부터 구해지므로 현상태의 상태변수와는 오차가 있으므로 현상태의 추정치보장후에 새로이 선형화를 시키고 이 추정치보장 추정치와 선형적추정치를 사용하여 보간법으로써 더 나은 추정치를 얻을 수 있다. 이러한 방법을 반복확장칼만필터라 하며 비선형 시스템의 상태변수를 추정할 때에 시간이 걸려도 비교적 정확한 추정치를 얻고 싶을 때 사용되는 방법이다.(80,81,119)

이와 같은 방법은 모두 섭동법을 이용한 방법으로서 일반적으로 받아들여지고 있고 많이 사용되고 있으며, 이들의 해석은 이미 선형화과정에서 최적성을 잃어버리고 시스템에 따라 선형화오차가 다르므로 적용에 따라 다른 해석이 나오기도 한다. 이러한 섭동법 외에도 최근에는 불확실성 모델에 대한 연구가 진행되면서 의사선형법과 추계적선형법도 많이 연구되고 있다.

이 외에도 이미 최적성을 잃어버리긴 했지만 성능을 개선하기 위한 방법도 많이 연구되고 있는데, 이들은 가끔 최적성에 접근

할 수 있는 칼만이득을 구하는 문제로 귀결되며 최근에도 계속 연구가 진행중이다.

확장칼만필터의 또 다른 장점은 시스템이 선형이기는 하지만 그 시스템변수들을 모를 때, 시스템변수와 상태변수를 동시에 추정할 수 있다는 점이다.(82-85) 이러한 방법은 불확실성모델에 대한 연구가 진행되면서 같이 발전하였는데, 시스템변수들을 또 다른 상태변수로 취급하여 비선형시스템을 만들고 확장칼만필터를 적용하면 상태변수와 시스템변수들을 동시에 추정할 수 있게 된다. 이러한 방법은 적응필터의 영역과 시스템식별론의 영역에서도 다루어지는 흥미있는 문제이며 현재에도 많이 연구되고 있는 분야이다.(86-94)

### 5. 적응칼만필터 (Adaptive Kalman Filter)

앞에서 칼만필터의 발산을 방지하기 위한 재규근칼만필터 방식과 비선형시스템에 적용하기 위한 확장칼만필터에 대하여 설명하였다. 이러한 모든 경우는 시스템에 대하여 잘 알고 있고 또 시스템의 모든 신호들이 모두 가우시안분포를 가질 때에 사용할 수 있는 상태변수의 추정법이다. 물론 칼만필터는 위상여유나 이득여유가 상당히 큰편이어서 그 강인성이 있기는 하지만 시스템의 변수에 대하여 정확히 알지 못하거나 잡음들에 대한 선형적지식들이 적을 때에는 상당히 큰 추정오차를 감수해야만 하며, 심한 경우에는 필터가 발산하는 경우도 발생하게 된다. 이에 따라서 적응적인 필터알고리즘이 필요하게 되었다.

칼만필터에서의 적응필터는 주로 불충분한 선형적지식들을 보강하는 방법으로써, 알지 못하는 시스템변수들을 추정하거나 또는 칼만이득을 최적치로 접근하도록 하는 방법들로 귀결된다.(95)

시스템에 대하여 정확한 지식은 없으나 유한개의 모델들 중의 하나만이 분명한 때에 적용할 수 있는 칼만필터를 Magill이 제시하였다.(96) 이 방법은 항공기식별이나 식별된 항공기를 추적할 경우에 사용되며, 칼만필터가 지니는 원래의 성질들을 유지할 수 있다.

먼저 유한개의 모델들에 대하여 칼만필터를 구성하고, 시스템으로부터의 정보로서 각각의 칼만필터들을 동작시키게 되면 각각의 칼만필터들로부터 추정치가 출력된다. 이 출력들 중에서 실제 시스템과 가장 부합되는 것을 선택하면 그 출력에 해당하는 시스템이 실제 시스템을 설명하는 모델이 된다. 이때 실제의 시스템이 미리 예측한 모델들과 같지 않더라도 그들의 일차 결합으로 표시될 수 있을 때에도 원하는 값을 잘 추정하여 근래에도 많은 연구가 진행되고 있다.(97-105)

적응칼만필터를 구성하는 또 다른 방법은 시스템식별론의 영역에서도 다루어지는 방법으로써 최적필터인 칼만필터의 선형적 추정오차가 백색가우시안잡음을 이용하는 방법이다. 먼저 잘 알지 못하는 정보들에 대하여 초기예상치를 가정하고 칼만필터를 구성한 다음 선형적추정오차를 백색가우시안잡음이 되도록 칼만

이득을 조정함으로써 적응적으로 상태변수를 추정하게 되는데, 이 방법은 잡음에 대한 정보가 적을 때에도 적용될 수 있으며, 시스템식별론과 함께 많은 연구가 진행되었다.(106-111)

다른 한편으로는 칼만필터가 정상상태에 이르렀을 때의 칼만이득이 최적필터의 성격을 나타낸다는 점에 착안하여 정상 상태에서의 칼만이득의 성질 및 변화를 파악하고 이를 이용하는 방법도 제시되었다.(112,113) 이외에도 여러가지 방법을 사용하여 강인성을 지닌 적응칼만필터를 구성하는 연구도 많이 진행되고 있다.(114,115)

이상의 적응칼만필터는 신호들이 가우시안일 경우에 적용하는 것이지만, 잡음들이나 상태변수의 불확실성모델이 가우시안이 아닐 경우의 적용방법도 여러가지형태로 진행되었으며 현재에도 재미있는 과제로 인정받고 있다.(116-118)

### 6. 최근의 동향

칼만필터는 선형시스템의 상태변수를 추정하는 방법으로서 최적성을 지니며, 수렴성이 보장되고 강인성도 있으며, 근래에 더욱 발달한 디지털컴퓨터로 구성하기가 용이하여, 가히 현대 추정론을 대표할 수 있을 만 하다. 실제로 항법이나 유도제어 특히 추적기분야에서는 칼만필터의 사용이 필수적이며 이들의 적용, 해석, 개선점 등에 대한 연구는 나열할 수조차 없을 정도이며 최근에는 통신분야, 핵발전소, 대단위 화학공정 시스템, 의학 분야에까지도 적용예가 발표되어 거의 모든 분야에 사용되고 있음을 알 수 있다.

그러나 칼만필터의 디지털컴퓨터 계산시에 발생하는 오차에 대한 문제, 비선형시스템에의 적용문제, 그리고 칼만필터가 필요로 하는 여러가지 제약조건들에 대한 문제점들은 많은 연구에도 불구하고 아직 뚜렷한 해결점이 제시되지 못했다. 특히 비선형문제와 적응필터의 문제는 많은 연구에도 불구하고 제시된 해결점이 적어 앞으로 이 분야의 연구가 계속될 것으로 보이며, 비선형시스템이론이나 시스템 식별론과의 병행연구로 좋은 결과를 얻을 수 있으리라 생각된다.

### 참 고 문 헌

1. General Kalman Filter.
- [1] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," J. Basic Eng. Trans., ASME, vol. 82D, pp. 35-45, 1960. 3.
- [2] R. E. Kalman, "New Methods in Wiener Filtering Theory," Proceedings of the First Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability, J. L. Bogdanoff & F. Kosin, Eds., New York: Wiley, 1963.
- [3] R. A. Singer & Paul A. Frost, "On the Relative Performance of the Kalman and Wiener Filters," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 390-394, 1969. 8.
- [4] M. J. Grumble, "Wiener and Kalman Filters for Systems with Random Parameters," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-29, pp. 35-45, 1960. 3.
- [5] A. E. Bryson & D. E. Johansen, "Linear Filtering for Time-Varying Systems Using Measurements Containing Coloured Noise," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-10, pp 4-10, 1965. 1.
- [6] S. Fujita & T. Fucao, "Error Analysis of Optimal Filtering Algorithm for Coloured Noise," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 452-455, 1970. 8.
- [7] 지규인, "화기제어를 위한 선제운동의 추정", 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 석사논문, 1984.
- [8] T. T. Soong, "On A Priori Statistics in Minimum

- Variance Estimation Problems," J. Basic Eng., Trans. ASME, vol. 87D, pp.109-112, 1965. 3.
- [9] M. Athans & E. Tse, "A Direct Derivation of the Optimal Linear Filter Using the Maximum Principle," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-12, pp. 690-698, 1967. 12.
- [10] Max Mintz, "A Note on Minimax Estimation and Kalman Filtering," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 588-590, 1969. 10.
- [11] M. Mintz, "A Kalman Filter as a Minimax Estimation," J. Opt. The. & Appl., vol. 9, pp. 99-111, 1972. 2.
- [12] J. M. Morris, "The Kalman Filter: A Robust Estimator for Some Classes of Linear Quadratic Problems," IEEE Trans. on Inform. Th., vol. IT-22, pp. 526-534, 1976. 9.
- [13] A. J. Krener, "Kalman-Bucy and Minimax Filtering," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-25, pp. 291-292, 1980. 4.
- [14] J. D. Irwin & J. C. Hung, "Kalman Estimator and Sample Mean," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-12, p.472, 1967. 10.
- [15] T. Kailath, "A View of Three Decades of Linear Filtering Theory," IEEE Trans. on Info. Th., vol. IT-20, pp. 145-181, 1974. 3.
- [16] S. Nakamori & A. Hataji, "Relation Between Filter Using Covariance Information and Kalman Filter," Automatica, vol. 18, pp. 479-483, 1982. 4.
- [17] D. Gieseking, "Relationship Between Kalman-Bucy State Estimation and Blended-Model State Estimation," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-14, pp. 308-309, 1969. 6.
- [18] B. T. Fang, "Kalman-Bucy Filter for Optimum Radio-Inertial Navigation," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-12, pp. 430-431, 1967. 10.
- [19] J. S. Demetry, "A Note on the Nature of Optimality in Discrete Kalman Filter," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 603-604, 1970. 10.
- [20] S. S. L. Chang, "Optimum Filtering and Control of Randomly Sampled Systems," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-12, pp. 537-546, 1967. 10.
- [21] T. Nishimura, "Error Bounds of Continuous Kalman Filters and the Application to Orbit Determination Problems," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-12, pp. 268-275, 1967. 6.
- [22] H. W. Sorenson, "On the Error Behavior in Linear Minimum Variance Estimation Problems," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-12, pp. 557-562, 1967. 10.
- [23] A. S. Gilman & I. B. Rhodes, "Cone-Bounded Nonlinearities and Mean-Square Bounds -- Estimation Upper Bound," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-18, pp. 260-265, 1973. 6.
- [24] B. Z. Bobrovsky & M. Zakai, "A Lower Bound on the Estimation for Markov Processes," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-20, pp. 785-788, 1975. 12.
- [25] J. H. Taylor, "The Cramer-Rao Estimation Error Lower Bound Computation for Deterministic Nonlinear Systems," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-24, pp. 343-344, 1979. 4.
- [26] M. Athans, "The Relationship of Alternate State-Space Representations in Linear Filtering Problems," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-12, pp. 471-472, 1967. 12.
- [27] R. J. Fitzgerald, "On Reentry Vehicle Tracking in Various Coordinate Systems," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-19, pp. 581-582, 1974. 10.
- [28] T. Nishimura, "On the Solution of Error Covariance Difference Equations by Means of Canonical Decomposition and Z-Transform," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-12, pp. 471-472, 1967. 10.
- [29] B. Priel & U. Shaked, "Regions of Pole Location of the Discrete Stationary Kalman Filter," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-29, pp. 371-373, 1984. 4.
- [30] U. Shaked, "The Location of the Continuous Time Stationary Kalman Filter Poles," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-29, pp. 373-376, 1984. 4.
- [31] M. J. Grimble & K. J. Astrom, "Frequency-Domain Property of Kalman Filters," Int. J. Cont., vol. 45, pp. 907-925, 1987. 5.
- [32] R. J. Fitzgerald, "Divergence of the Kalman Filter," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-16, pp. 736-747, 1971. 6.
- [33] T. Nishimura, "Worst Error Performance of Continuous Kalman Filters," IEEE Trans. on A.E.S., vol. AES-11, pp. 190-194, 1975. 3.
- [34] A. E. Bryson, "Kalman Filter Divergence and Aircraft Motion Estimators," J. of Guid. & Cont., vol. 1, pp. 71-79, 1978. 1.
- [35] P. S. Maybeck, "Performance Analysis of a Particularly Simple Kalman Filter," J. of Guid. & Cont., vol. 1, pp. 391-396, 1978. 11.
- [36] T. Nishimura, "Worst Error Performance of Continuous Kalman Filters," IEEE Trans. on A.E.S., vol. AES-11, pp. 190-194, 1975. 3.
- [37] H. M. Faridani, "Performance of Kalman Filter with Missing Measurements," Automatica, vol. 22, pp. 117-120, 1986. 1.
- [38] B. Friedland, "Steady-State Behavior of Kalman Filter with Discrete- and Continuous-Time Observations," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-25, pp. 988-992, 1980. 10.
- [39] S. J. Orfanidis, "An Exact Solution of the Time-Invariant Discrete Kalman Filter," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-27, pp. 240-242, 1982. 2.
- [40] F. M. Ham, "Observability, Eigenvalues, and Kalman Filtering," IEEE Trans. on A.E.S., vol. AES-19, pp. 269-273, 1983. 3.
2. Square Root Kalman Filter.
- [41] P. G. Kaminski, A. E. Bryson & S. F. Schmidt, "Discrete Square Root Filtering: A Survey of Current Technique," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-16, pp. 727-735, 1971. 12.
- [42] J. M. Mendal, "Computation Requirements for a Discrete Kalman Filter," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-16, pp. 748-758, 1971.12.
- [43] G. J. Bierman, "A Comparison of Discrete Linear Filtering Algorithms," IEEE Trans. on A.E.S., vol. AES-9, pp. 28-37, 1973. 1.
- [44] G. J. Bierman & C. L. Thornton, "Numerical Comparison of Kalman Filter Algorithms: Orbit Determination Case Study," Automatica, vol. 13, pp. 23-35, 1977. 1.
- [45] D. P. Loose, "Factored Covariance Algorithms for Discrete Kalman Filtering," Private Paper Typing in 1977.
- [46] A. B. Stipad, "Performance Degradation in Digitally Implemented Kalman Filters," IEEE Trans. on A.E.S., vol. AES-17, pp. 626-634, 1981. 9.
- [47] M. Verhaegen & P. Van Dooren, "Numerical Aspects of Different Kalman Filter Implementations," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-31, pp. 907-917, 1986. 10.
- [48] R. A. Singer & R. G. Sea, "Increasing the Computational Efficiency of Discrete Kalman Filters," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-16, pp. 254-257, 1971. 6.
- [49] J. F. Bellantoni & K. W. Dodge, "A Square Root Formulation of the Kalman-Schmidt Filter," AIAA Jour., vol. 5, pp. 1309-1314, 1967. 7.
- [50] A. Andrews, "A Square Root Formulation of the Kalman Covariance Equations," AIAA Jour., vol. 6., pp. 1165-1166, 1968. 6.
- [51] P. Dyer & S. McReynolds, "Extension of Square-Root Filtering to Include Process Noise," Jour. of Opt. The. & Appl., vol. 3, pp. 444-458, 1969. 6.
- [52] N. A. Calsion, "Fast Triangular Formulation of the Square Root Filter," AIAA Jour., vol. 11, pp. 1259-1265, 1973. 9.
- [53] T. Kailath, "Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant linear Systems," IEEE Trans. on Info. Th., vol. IT-19, pp. 750-760, 1973. 11.
- [54] M. Morf & T. Kailath, "Square-Root Algorithms for Least-Squares Estimation," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-20, pp. 487-497, 1975. 8.
- [55] D. G. Lainiotis, "Generalized Chandrasekhar Algorithms: Time-Varying Models," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-21, pp. 728-732, 1976. 10.
- [56] M. Morf, B. Levy & T. Kailath, "Square-Root Algorithms for the Continuous-Time Linear Least-Square Estimation Problem," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-23, pp. 907-911, 1978. 10.
- [57] T. Kailath, L. Ljung & M. Morf, "Recursive Input-Output and State-Space Solutions for Continuous-Time Linear Estimation Problems," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-28, pp. 897-906, 1983. 9.
- [58] R. H. Wampler, "A Report on the Accuracy of Some Widely Used Least Squares Computer Programs," Jour. of Amer. Statis. Assoc., vol. 65, pp. 549-565, 1970. 6.
- [59] C. L. Thornton & G. J. Bierman, "Filtering and Error Analysis via the UDU' Covariance Factorization," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-23, pp. 901-906, 1978. 10.
- [60] B. D. Tapley & J. G. Peters, "Sequential Estimation Algorithm Hsing a Continuous UDU' Covariance Factorization," Jour. of Guid. & Contr., vol. 3, pp. 326-331, 1978. 7.
- [61] G. J. Bierman, "Comment on 'Sequential Estimation Algorithm Using a Continuous UDU' Covariance Factorization'," Jour. of Guid. & Contr., vol. 4, pp. 444-446, 1979. 7.
- [62] G. J. Bierman, "Efficient Time Propagation of U-D Covariance Factors," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-26, pp. 890-893, 1981. 8.
- [63] F. M. Hsu, "Square Root Kalman Filtering for High-Speed Data Received over Fading Dispersive HF Channels," IEEE Trans. on Info. Th., vol. IT-28, pp. 753-763, 1982. 9.
- [64] L. O. Lupash, "Comments on 'Efficient Time Propagation of U-D Covariance Factors'," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-28, pp. 1061-1063, 1983. 11.
- [65] I. Y. Bar-Itzhack & Y. Medan, "Efficient Square Root Algorithm for Measurement Update in Kalman Filtering," Jour. of Guid., vol. 6, pp. 129-134, 1983. 5.
- [66] W. S. Gessing & D. Blake Reid, "An Integrated Multisensor Aircraft Track Recovery System for Remote Sensing," IEEE Trans. on A.C., vol. AC-28, pp. 356-362, 1983. 3.
3. Nonlinear Kalman Filter.
- [67] R. S. Bucy, "Linear and Nonlinear Filtering," Proc of IEEE, vol. 58, pp. 854-864, 1970. 6.
- [68] H. J. Kushner, "Approximations to Optimal Nonlinear Filters," IEEE trans. on A.C., vol. AC-12, pp. 546-556, 1967. 8.
- [69] R. F. Ohap & A. R. Stubberud, "A Technique for Estimating the State of a Nonlinear System," IEEE trans. on A.C., vol. AC-10, pp. 150-155, 1965. 4.

- [70] R. E. Curry & W. E. Vander Velde. "An Extended Criterion for Statistical Linearization." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 106-108, 1970. 2.
- [71] P. R. Hempel & J. P. Cartland. "Application of the Statistically Linearized Filter to Re-entry Estimation." Jou. of Guid., vol. 5, pp. 111-112, 1982. 3.
- [72] Y. Sunahara. "An Approximation Method of State Estimation for Nonlinear Dynamical Systems." J. Basic Eng. Trans., ASME, vol. 92D, pp. 385-393, 1970. 5.
- [73] L. D. Hostettler & R. D. Andreas. "Nonlinear Kalman Filtering Techniques for Terrain-Aided Navigation." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-28, pp. 315-323, 1983. 3.
- [74] J. S. Lee. "Nonlinear Filtering Techniques with Application to Strapdown Computation." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 74-81, 1970. 2.
- [75] M. G. Safonov & M. Athans. "Robustness and Computational Aspects of Nonlinear Stochastic Estimators and Regulators." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-23, pp. 717-725, 1978. 8.
- [76] H. Weiss & J. B. Moore. "Improved Extended Kalman Filter Design for Passive Tracking." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-25, pp. 807-811, 1980. 8.
- [77] H. E. Emara-Shabaik & C. T. Leondes. "A Note on the Extended Kalman Filter." Automatica, vol. 17, pp. 411-412, 1981. 2.
- [78] R. J. Kenefic & P. L. Goulette. "Sensor Netting Via the Discrete Time Extended Kalman Filter." IEEE Trans. on A.E.S., vol. AES-17, pp. 482-489, 1981. 7.
- [79] H. E. Emara-Shabaik & C. T. Leondes. "Nonlinear Filtering -- the Link Between Kalman and Extended Kalman Filters." Int. Jour. Contr., vol. 34, pp. 1207-1214, 1981. 11.
- [80] J. M. Mendel. "Postflight Data Analysis by Means of Adaptive, Iterated, Extended Kalman Filtering." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-19, pp. 467-474, 1974. 10.
- [81] R. K. Mehra. "A Comparison of Several Nonlinear Filters for Reentry Vehicle Tracking." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-16, pp. 307-319, 1971. 3.
- [82] K. J. Astrom & P. Eykhoff. "System Identification -- A Survey." Automatica, vol. 7, pp. 123-162, 1971. 2.
- [83] T. Yoshimura, K. Konishi & T. Soeda. "A Modified Extended Kalman Filter for Linear Discrete-Time Systems with Unknown Parameters." Automatica, vol. 17, pp. 657-660, 1981. 4.
- [84] R. M. Prasad & A. K. Sinha. "On Bootstrap Identification Using Stochastic Approximation." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-22, pp. 671-672, 1977. 8.
- [85] R. M. Prasad, A. K. Sinha & R. M. Maharanabis. "Two-Stage Identification of Closed-Loop Systems" IEEE Trans. on A.C., vol. AC-22, pp. 987-988, 1977. 12.
- [86] L. Ljung. "Analysis of Recursive Stochastic Algorithms." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-22, pp. 551-575, 1977. 8.
- [87] L. Ljung. "Convergence Analysis of Parametric Identification Methods." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-23, pp. 770-783, 1978. 10.
- [88] L. Ljung. "Asymptotic Behavior of the Extended Kalman Filter as a Parameter Estimator for Linear Systems." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-24, pp. 36-50, 1979. 2.
- [89] T. L. Song & J. L. Speyer. "The Modified Gain Extended Kalman Filter and Parameter Identification in Linear Systems." Automatica, vol. 22, 1986. 1.
- [90] T. L. Song & J. L. Speyer. "A Stochastic Analysis of a Modified Gain Extended Kalman Filter with Applications to Estimation with Bearings Only Measurements." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-30, pp. 940-949, 1985. 10.
- [91] H. Kaufman & D. Beaulier. "Adaptive Parameter Identification." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-17, pp. 729-731, 1972. 10.
- [92] 양태용. "최대공산법과 확장칼만필터를 이용한 미사일의 공기역학적 계수추정". 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 석사논문. 1984.
- [93] 이달호. "비행시험 데이터를 이용한 미사일 공력계수 추정". 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 석사논문. 1985.
- [94] 정학영. "적용필터를 이용한 선제운동의 추정". 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 석사논문. 1985.
- [95] R. K. Mehra. "Approach to Adaptive Filtering." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-17, pp. 693-698, 1972. 10.
- [96] D. T. Magill. "Optimal Adaptive Estimation of Sampled Stochastic Processes." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-10, pp. 434-439, 1965. 10.
- [97] F. L. Sims & D. G. Lainiotis. "Recursive Algorithm for the Calculation of the Adaptive Kalman Filter Weighting Coefficients." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-14, pp. 215-218, 1969. 4.
- [98] F. L. Sims & D. G. Lainiotis. "Performance Measure for Adaptive Kalman Estimators." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 249-250, 1970. 4.
- [99] D. G. Lainiotis. "Optimal Adaptive Estimation: Structure and Parameter Adaptation." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-16, pp. 215-218, 1971. 4.
- [100] D. G. Lainiotis, S. K. Park & R. Krishnaiah. "Optimal State Vector Estimation for Non-Gaussian Initial State Vector." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-16, pp. 197-198, 1971. 4.
- [101] 백문룡. "가설검정방법을 이용한 미사일의 공기역학적 구조 추정". 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 석사논문. 1984.
- [102] R. L. Moose, M. K. Sistanizadeh & G. Skagfjord. "Adaptive Estimation for a System with Unknown Measurement Bias." IEEE Trans. on A.C., vol. AES-22, pp. 732-739, 1986. 11.
- [103] B. Wittenmark. "A Two-Level Estimator for Time Varying Parameters." Automatica, vol. 15, pp. 85-89, 1979. 1.
- [104] E. K. Westwood. "Filtering Algorithms for the Linear Estimation with Switching Parameters." Thesis in Texas Univ., 1984. 5.
- [105] A. I. Yashin. "Continuous-Time Adaptive Filtering." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-31, pp. 776-779, 1986. 8.
- [106] R. K. Mehra. "On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 175-184, 1970. 4.
- [107] R. L. Kashyap. "Maximum Likelihood Identification of Stochastic Linear Systems." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 25-34, 1970. 2.
- [108] R. L. Kashyap. "A New Method of Recursive Estimation in Discrete Linear Systems." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-15, pp. 18-24, 1970. 2.
- [109] R. K. Mehra. "On-Line Identification of Linear Dynamic Systems with Applications to Kalman Filtering." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-16, pp. 12-21, 1971. 2.
- [110] S. S. Godbole. "Kalman Filtering with No A Priori Information About Noise -- White Noise Case: Identification of Covariances." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-19, pp. 561-563, 1974. 10.
- [111] D. L. Alspach. "A Parallel Filtering Algorithm for Linear Systems with Unknown Time Varying Noise Statistics." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-19, pp. 552-556, 1974. 10.
- [112] B. Carew & P. R. Belanger. "Identification of Optimum Filter Steady-State Gain for Systems with Unknown Noise Covariances." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-18, pp. 582-587, 1973. 12.
- [113] S. S. Tajima. "Estimation of Steady-State Kalman Filter Gain." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-23, pp. 944-945, 1978. 10.
- [114] N. E. Nahi & B. M. Schaefer. "Decision-Directed Adaptive Recursive Estimators: Divergence Prevention." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-17, pp. 61-68, 1972. 2.
- [115] C. J. Martin & M. Mintz. "Robust Filtering and Prediction for Linear Systems with Uncertain Dynamics: A Game-Theoretic Approach." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-28, pp. 888-896, 1983. 9.
- [116] C. J. Masreliez & R. D. Martin. "Robust Bayesian Estimation for the Linear Model and Robustifying the Kalman Filter." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-22, pp. 361-371, 1977. 6.
- [117] B. W. Stuck. "Minimum Error Dispersion Linear Filtering of Scalar Symmetric Stable Processes." IEEE Trans. on A.C., vol. AC-23, pp. 507-509, 1978. 6.
- [118] C. Tsai & L. Kurz. "An Adaptive Robustizing Approach to Kalman Filtering." Automatica, vol. 19, pp. 279-288, 1983. 3.
5. Books About Kalman Filter.
- [119] A. H. Jazwinski. "Stochastic Processes and Filtering Theory." Academic Press, 1970
- [120] A. Gelb. "Applied Optimal Estimation." The M.I.T. Press, 1974.
- [121] B. D. O. Anderson & J. B. Moore. "Optimal Filtering." Prentice-Hall, 1979.
- [122] P. S. Maybeck. "Stochastic Models, Estimation, and Control; Volume 1." Academic Press, 1979.
- [123] P. S. Maybeck. "Stochastic Models, Estimation, and Control; Volume 2." Academic Press, 1982.
- [124] R. G. Brown. "Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering." John Wiley & Sons, 1983.
- [125] S. Barnett. "Matrices in Control Theory." Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.
- [126] R. W. Brockett. "Finite Dimensional Linear Systems." John Wiley & Sons, NY, 1970.
- [127] A. E. Bryson & Y. C. Ho. "Applied Optimal Control." A Halsted Press, 1975.