

항공기의 자동조종장치설계에 대한 이산확률최적설계의 적용

이 상 기

대한항공(주) 항공기술연구소

Application of Discrete Stochastic Optimal Control System for Aircraft Autopilot Design

Sang K. Lee

Korean Institute of Aeronautical Technology

1. 서론

항공기가 평형상태로 비행하는 도중 돌풍과 같은 외부 교란을 만난 교란상태운동은 선형화된 미분방정식으로 표현되며 비교적 짧은 비행시간동안의 비행은 선형시불변계가 된다. 돌풍은 Gauss-Markov 확률과정으로 모델링되며 항공기가 돌풍을 만난 교란상태운동은 시스템론적으로 보면 백색잡음이 성형필터를 거쳐 계에 입력되는 것과 같다. 초기의 설계방법은 고전적인 주파수영역에서의 해석방법을 사용하였으나 1968년대에 최적제어이론이 도입되면서 평가 함수를 사용하여 원하는 비행특성을 얻는 방법을 사용하게 되었다. (1,2) 그 후 계에 입력되는 외란과 측정시의 잡음으로 인한 불확실한 측정량으로부터 최적상태변수의 추정을 위해 필터링이론을 도입한 확률제어이론을 적용하여 자동조종장치를 설계하게 되었다. (3,4) 이때까지는 연속제어계로 설계되었으며 그 후 측정신호를 샘플링하여 연속제어계와 동가의 이산제어계를 사용한 자동조종장치가 등장하였으며 이 경우 설계기법으로는 연속제어계를 사용하고 실현시킬 때는 디지털컴퓨터를 사용하였다. (5) 이는 제어하는 동안 계의 계수와 제어법칙을 바꾸어 줄 수 있는 이산제어계의 장점을 이용하지 못하므로 처음부터 계를 동가의 이산계로 보고 제어계를 설계하는 방법이 도입되었다. 이 때 샘플링간격의 결정과 Quantization 영향이 설계시 고려되어야 한다.

2. 이산확률최적제어

확률과정인 외란이 입력되는 선형시불변가계어제에 대한 상태방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = F \cdot x(t) + G \cdot u(t) + f \cdot w(t) \quad (1)$$

여기서

w(t): zero mean Gaussian white noise process

$$E\{w(t)w^T(t')\} = Q \cdot \delta(t-t')$$

평가함수 J(x(t), u(t), t)는 다음과 같은 계급권을 사용한다.

$$J = E\left\{\int_0^T (x^T A x + u^T B u) dt\right\} \quad (2)$$

여기서

A : 狀態變數加重行列 (Positive Semidefinite)

B : 制御變數加重行列 (Positive Definite)

샘플링간격이 T 이고 Zero Order Holder를 사용한 경우 식 (1)의 연속계는 다음과 같은 동가의 이산선형시스템이 된다.

$$x(k+1) = \Phi(T)x(k) + G_d(T)u(k) + w(k) \quad (3)$$

여기서

$$\Phi(T) = \exp(FT) = I + FT + \frac{F^2 T^2}{2!} + \dots$$

$$G_d(T) = \int_0^T \phi(\tau) G d\tau$$

u(k) = 制御入力, kT ≤ t < (k+1)T에서 상수

w(k) = zero mean Gaussian white noise sequence

$$Q_0 \triangleq E\{w(k)w^T(k)\} = \int_0^T \phi(\tau) R Q \phi^T(\tau) d\tau$$

추정모델은 다음과 같다.

$$z(k) = H \cdot x(k) + v(k) \quad (4)$$

여기서

v(k): zero mean Gaussian white noise sequence

$$E\{v(k)v^T(l)\} = R \delta(k-l)$$

확률최적제어는 Separation Principle에 의해 확정최적제어와 확률적상태변수추정으로 나뉘며 식(2)와 같은 평가 함수를 사용하면 확정적 최적제어는 선형최적Regulator가 되며 시스템의 외란과 측정잡음이 Gaussian백색잡음이라면 확률적 상태변수 추정은 최적관측자인 Kalman Filter가 된다. 이 두가지 문제에 대한 정상상태는 수탁적으로 광대성을 지니므로 같은 방법으로 구할 수 있다. 이산확률최적제어계의 표준형으로 나타내기 위해 식(3)의 동가선형시스템과 식(2)의 평가함수를 다음과 같이 변환한다.

$$x(k+1) = (\Phi - G_0 A_{22}^{-1} A_{21})x(k) + G_0 \tilde{u}(k) + w(k) \quad (5)$$

$$J = E\left\{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x_k^T \tilde{A} x_k + \tilde{u}_k^T \tilde{B} \tilde{u}_k]\right\} \quad (6)$$

여기서

$$\tilde{A} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

$$\tilde{B} = A_{22}$$

$$\tilde{u}_k = u_k + A_{22}^{-1} A_{21} x_k \quad (7)$$

$$A_{11} = \int_0^T \phi^T(\tau) A \phi(\tau) d\tau$$

$$A_{22} = \int_0^T [G_0^T \phi^T(\tau) A G_0(\tau) + B] d\tau$$

$$A_{21} = A_{21} = \int_0^T \phi^T(\tau) A G_0(\tau) d\tau$$

따라서 식(3)의 동가의 이산선형시스템의 최적제어는 식(5)의 변환된 이산선형시스템의 최적제어  $\tilde{u}_k$ 를 구한 후 식(7)에 따라 역변환하여 결정한다. 이와 같은 이산확률최적제어계를 사용한 전체시스템은 Fig.1과 같다.

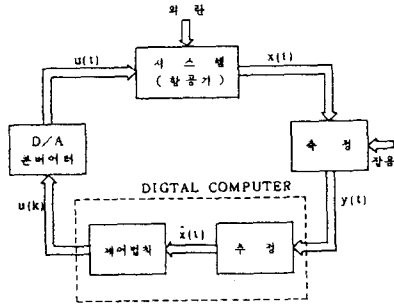


Fig. 1. Simplified Block Diagram of Discrete Stochastic Optimal Control System.

식(5)와 식(6)의 이산확률최적제어계의 표준형을 다음과 같이 생각하여 정상상태해를 구하면 k번째 샘플링순간의 최적제어는

$$u(k) = C \cdot \hat{x}(k)$$

여기서 C는 주어진 평가함수를 최소로 하는 정상상태이득 행렬이며  $\hat{x}(k)$ 는 최적관측자인 Kalman Filter를 통하여 구한 상태변수의 추정치이다.

(i) 이산최적Regulator의 정상상태제어법칙

$$\text{시스템 : } x(k+1) = \phi \cdot x(k) + G_0 \cdot u(k) \quad \dots\dots (8)$$

$$\text{평가함수 : } J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T A x_k + u_k^T B u_k) \quad \dots\dots (9)$$

식(9)의 functional과 식(8)의 구속조건에 대한 Lagrange 미계개수벡터  $\lambda_{k+1}^T$ 를 도입하여 최적조건을 찾으면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi + G_0 B^{-1} G_0^T \phi^T & -G_0 B^{-1} G_0^T \phi^T \\ -\phi^T A & \phi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서

$$x(0) = x_0 \\ \lambda_N = A_N x_N$$

식(10)의 행렬을 Hamiltonian행렬이라 하며 이 행렬의 특성치중 단위원안에 있는 특성치를 z라 하면  $z^{-1}$  (이를 E라 한다)는 단위원 밖에 있는 특성치 또한 Hamiltonian행렬의 특성치가 된다. 특성치 z, E에 해당하는 특성벡터를

$$\begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \dots x_k^{(n)} & x_k^{(n+1)} \dots x_k^{(2n)} \\ \lambda_k^{(1)} \dots \lambda_k^{(n)} & \lambda_k^{(n+1)} \dots \lambda_k^{(2n)} \end{bmatrix}$$

로 할 때 정상상태에서는 z에 해당하는 모우드는 사라지며 정상상태는 다음과 같다.

$$\lambda_k = \Lambda_k X_k^T x_k$$

따라서 최적제어법칙은

$$u_k = C \cdot x_k$$

여기서

$$C = -B^{-1} G_0 \phi^T (\Lambda_k X_k^T - A)$$

(ii) 이산최적필터의 정상상태추정법칙

$$\text{시스템 : } x(k+1) = \phi x(k) + G_0 u(k) + f_0 w(k)$$

$$\text{관측모델 : } y(k) = Hx(k) + v(k)$$

여기서 w(k)와 v(k)는 zero mean 이고 공분산이 각각  $\Omega_0, R$ 인 이산백색잡음확률과정이라고 할 때 (3.4) 이산최적정상 상태필터(Kalman Filter)는 다음과 같이 구성한다.

Propagated Process :

$$\bar{X}(k+1) = \phi \bar{X}(k) + G_0 u(k)$$

Update Process :

$$\hat{X}(k+1) = \bar{X}(k+1) + K[y(k+1) - H\bar{X}(k+1)]$$

여기서

$$K = P H^T R^{-1}$$

$$P = \phi^{-1} (M - f_0 Q_0 f_0^T) \phi^{-T}$$

M은 추정하기 전의 오차의 공분산행렬이며 다음의 Hamiltonian행렬의 특성벡터로부터 구할 수 있다.

Hamiltonian 行列 =

$$\begin{bmatrix} \phi^T + H^T R^{-1} H \phi^{-1} f_0^T Q_0 f_0 & -f_0^T B^{-1} H \phi^{-1} \\ -\phi^{-1} f_0 Q_0 f_0^T & \phi^{-1} \end{bmatrix}$$

$$M = X_k \Lambda_k^{-1}$$

이상의 제어법칙과 추정법칙에 의해 식(2)의 평가함수를 사용하여 식(1)로 표현되는 선형시불변계에 이산확률최적 제어계를 Fig.2에 나타내었다.

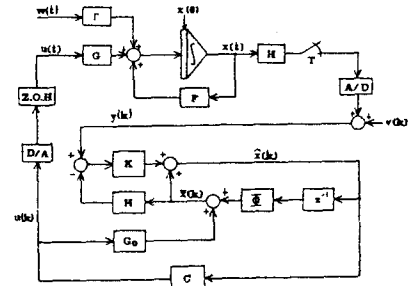


Fig. 2. Block Diagram of Discrete Stochastic Optimal Control System.

디지털 컴퓨터를 사용한 이산제어계로 확률최적제어계를 설계하기 위해서는 상태변수를 측정된 신호를 샘플링해야 하는데 전체시스템에 대해 원하는 특성을 만족시키는 범위에서 가능한 샘플링간격을 크게 하는 것이 바람직하며 대개 측정신호의 Bandwidth의 두 배 이상 빨리 샘플링 해주어야 하나 확률과정인 외란이 있는 경우 정상상태 rms 반응을 고려하여 샘플링한다. 상태변수의 최적추정과 제어법칙에 따라 제어량을 구할시킬 때 D/A Converter와 Zero Order Holder를 거치게 된다. 이 때 유한한 비트 수에 의한 Quantization영향이 생기며 전체시스템에 미치는 변화를 시간반응을 고려하여 알아보고 적절한 비트 수를 선정한다.

3. 항공기에의 적용

해면고도에서 초음속비행이 필요한 경우 돌풍을 만나면 외란인 돌풍의 correlation time이 작아 교란량은 더욱 더 심각하게 된다. 이와 같은 교란상태운동에 대해 중운동의 경우 시정수가 큰 장주기운동보다 시정수가 작은 단주기운동에 대한 제어가 먼저 고려되며 (11) 항공기의 안정화포계에 대한단주기운동방정식은 다음과 같다.

$$\dot{q} = (M_2)_q + (M_3)_\alpha r + (M_3)_\delta \dot{\alpha} - (M_3)_\delta \delta$$

$$\dot{\alpha}_r = q + \left(\frac{Z_\alpha}{U_0}\right) \alpha_r + \frac{1}{U_0 \tau_w} w_\alpha + \left(\frac{Z_\alpha}{U_0}\right) \delta$$

$$- \frac{\sqrt{2} \tau_w \sigma_w}{\tau_w U_0} \gamma_\alpha$$

$$\alpha_r = \alpha - \frac{W_\alpha}{U_0}$$

여기서

$q$  = pitch rate (rad/sec)  
 $\alpha_T$  = total angle of attack의 擾亂量(rad)  
 $w_z$  = normalized zero mean Gaussian white noise

$w_z$ 는 상하방향의 돌풍이며 일차의 Gauss-Markov 확률과정으로 다음과 같이 가정한다.

$$\dot{w}_z = -\frac{1}{\tau_w} w_z + \frac{\sqrt{2\tau_w} \sigma_w}{\tau_w} \eta_z$$

여기서

$\tau_w$  : 突風の 時間定數 (0.5 sec)  
 $\sigma_w$  : 突風の rms 값 (12 ft/sec)

속정기는 상하방향의 가속도계와 pitch rate를 측정하기 위한 Rate Gyro를 사용한다.

rate gyro :  $q_r = q + v_q$   
 accelerometer :  $\eta_a = l_a M_a \cdot q + (l_a M_a - Z_a) U_a + \alpha_T + v_a$

여기서  $l_a$  = 重心과 accelero meter 사이의 거리 (ft)  
 $v_a, v_n$  : 測定雜音

해면고도에서 Mach 1.2로 날으는 항공기(미사일)의 단주기 종운동의 상태방정식은 다음과 같다.(6)

$$\text{시스템 : } \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha}_T \\ \dot{w}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2132 & -177.0 & 0 \\ 1.0 & -4.03 & 0.00149 \\ 0 & 0 & -2.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha_T \\ w_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -69.3 \\ -0.2978 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0179 \\ -24.0 \end{bmatrix} \eta_a$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = F \cdot x(t) + G \cdot u(t) + r \cdot w(t)$$

$$x(t) = [q(t) \ \alpha_T(t) \ w_z(t)]$$

$$u(t) = \delta_a \ (\angle 0.4 \text{ rad})$$

$$w(t) = \eta_a(t)$$

$$\text{측정 : } \begin{bmatrix} q_k \\ \alpha_k \\ \eta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ -26.74 & -568.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha_T \\ w_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_q \\ \alpha_T \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$y(k) = H x(k) + v(k)$$

여기서

$$E\{v_q^2(k)\} = 8.0 \times 10^{-7} \text{ rad}^2/\text{sec}^2$$

$$E\{v_n^2(k)\} = 0.8 \text{ ft}^2/\text{sec}^2$$

속정잡음의 분산치는 샘플링간격과는 무관하다고 가정하였으며 속정기 자체의 잡음과 A/D Converter의 신호변환잡음으로 이루어진다. 이 때 가장 영향은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 11.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = 1$$

샘플링간격에 따른 pitch rate와 Total angle of attack의 rms값을 Fig.3에 도시하였다.

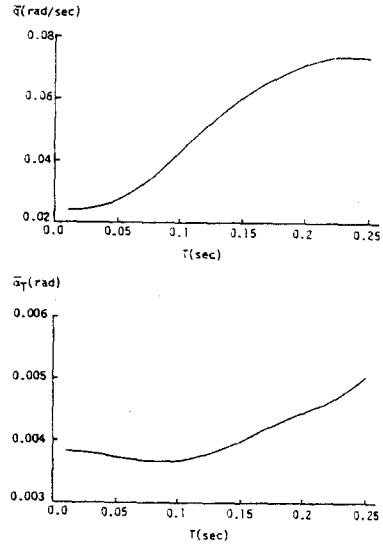


Fig. 3. Rms Value of Pitch Rate and Total Angle of Attack.

#### 4. 계산결과 및 검토

초기조건을 pitch rate는 0.1 rad/sec, total angle of attack은 0 rad로 하여 샘플링간격이 0.2초, 0.1초, 0.05초 때에 따라 시간반응을 시뮬레이션하였다. 각 샘플링간격을 8번 이상 subinterval로 나누어 시뮬레이션하였으며 이를 Fig.4,5,6에 도시하였다. 그림에서 점선은 open-loop의 시간반응이며 이점쇄선은 6비트, 일점쇄선은 8비트, 실선은 12비트의 D/A Converter를 사용할 때의 시간반응이다.

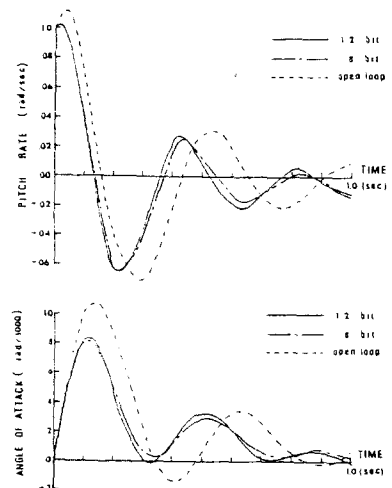


Fig. 4. Time Response of Pitch Rate and Angle of Attack (Sampling Period = 0.5 sec).

참고 문헌

1. Arthur E. Bryson, Jr., Aircraft Autopilot Logic, Stanford University, California, 1981
2. Charles A. Harvey and Gunter Stein, "Quadratic Weight for Asymptotic Regulator Properties," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-23, No. 3, June 1968, pp. 378-387
3. Kalman R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem," Trans. ASME, J. Basic Eng., Mar. 1960
4. Kalman R. E., and Bucy R.S., "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," Trans. ASME, J. Basic Eng., Dec. 1961
5. Berman, H., and R. Gran, "Design Principles for Digital Autopilot Synthesis," J. of Aircraft, Vol. 11, No. 7, July 1974
6. Paul Katz, "Selection of Sampling Rate for Digital Control of Aircraft," Stanford University, California, Sep. 1974
7. Arthur E. Bryson, Jr. and W. Earl Hill, Jr., "Optimal Control and Filter Synthesis by Eigenvector Decomposition," SUDDAR 436, Stanford University, 1971
8. P. Borado and A. H. Lewis, "Optimal Linear Regulators: Discrete Time Case," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6, Dec. 1971, pp. 613-620
9. Holley, W. E. and Bryson, A. E. Jr., "Wind Modelling and Lateral Control for Automatic Landing," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 14, No. 2, Feb. 1977, pp. 65-72
10. Arthur E. Bryson, Jr. and Yu-Chi Ho, Applied Optimal Control, John Wiley & Sons, New York, 1975
11. Choon Bae Park, "Suboptimal Design of Longitudinal Aupilot," 서울대학교 공과대학 석사학위논문, 1975
12. Waldo I. Ockman, "Optimum Design Considerations of A Gust Alleviator for Aircraft," NASA TN D-8152 NASA Lanley Research Center, Mar. 1976

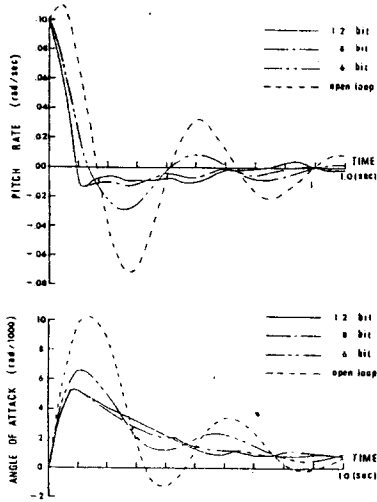


Fig. 5. Time Response of Pitch Rate and Angle of Attack (Sampling Periods = 0.1 sec)

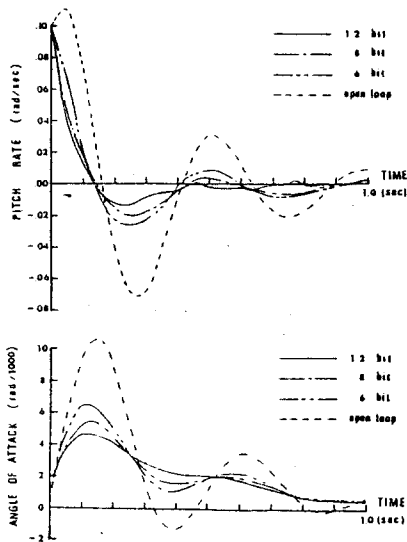


Fig. 6. Time Response of Pitch Rate and Angle of Attack (Sampling Period = 0.05 sec).

5. 결론

해면고도에서 Mach 1.2로 날으는 미사일의 단주기종운동에 대한 안정성증대와 동항경감을 위한 이산확률적적제이계통 설계안 결과 최대샘플링간격은 0.1초이며 D/A Converter는 8 비트까지 사용될 수 있다. 또한 이는 항공기의 단주기 운동뿐만 아니라 전체종운동, 평항운동 등 더 나아가 엘리베이터의 공중비행상태 및 전진비행상태에도 그대로 적용된다. 앞으로의 연구과제는 Quantization 영향을 좀 더 해석적인 방법으로 파악하는 일과 동종운동 좌절수정하는 방법 등에 대한 연구가 계속되어야 한다.