'87 韓國自動制御學術會議論文集 1987. 10.16~17

공정제어 구조합성에서의 상호작용 해석

고 재욱
서울대학교 화학공학과

Interaction Analysis in Process Control System Structure Synthesis

Jae-Wook Ko
Dept. of Chem. Eng., Seoul Nat'l University

Abstract

A criterion is developed for the selection of the best pairing of the control and manipulated variables and for the interaction analysis of decentralized multi-input multi-output control systems. This criterion is based on the difficulty caused by the interaction terms in finding the inverse of the block steady gain matrix. A quantitative measure of the best pairing is obtained from the resemblance of a set of independent block multi-loop systems. Several examples show the validity of the pairing criterion.

I. 서 론

최근 원료와 에너지의 가격 상승, 환경보전 규제강화및 공정의 경제성등을 고려하여 공정은 서로 얽히고 재순환이 증가되었으며 이에 따라 공정제어구조도 복잡하게 되었다. 이로 인해 과거와는 달리 측정변수와 제어변수들간의 합리적 선택, 그에 따른 변수들간의 상호작용 해석등이 적절한 제어 법칙(control law)의 적용과 더불어 중요하게 되었다. 또한 변수들간의 상호작용 해석및 타당한 loop 선택은 근간에 활발히 진행되는 최적공정 설계와 제어 system의 통합(integration)에 관한 연구에서도 중요한 역할을 하고 있다.

Bristol[1]이 제시한 RGA(Relative Gain Array)는 정상상태 gain의 이용과 계산의 편리함때문에 loop들의 SISO(Single-Input Single-Output) pairing 기법으로 오랫동안 사용되어 왔다. 그러나 경우에 따라 pairing을 잘못하거나 상호작용 해석에 문제가 생길 수 있어 이를 보완하는 연구도 수행되었다[2,3]. 또한 Bruns와 Smith[4]는 공정 gain matrix의 Singular Value Decomposition(SVD)을 이용하여 새로운 loop pairing 기법을 제시하였으나 matrix의 scaling에 크게 의존하는 단점이 있다. Jerome와 Jensen[5,6]은 Direct Nyquist Array(DNA)를 사용하여 매우 믿을만한 방법을 제시하였으나 상당한 계산량과 system의 dynamics가 필요하여 공정설계시 사용하기 어렵다.

상호작용이 심한 복잡한 공정에서 SISO pairing은 무리가 있어 상호작용을 고려하여 block으로 잡아 Multi-Input Multi-Output(MIMO) pairing을 택하는 연구가 진행되고 있다. Arkun[7]등은 종래의 SISO pairing에 사용되는 RGA를 확장한 Block Relative Gain (BRG)을 제안하여 SISO pairing의 보다 나은 결과를 보였으나 block loop 사이의 interaction 해석이 미비한 편이다.

본 연구에서는 정상상태 gain matrix의 inverse matrix를 구하는 iterative 과정에서의 수렴속도를 이용하여[8] block loop의 영향이 고려된 합리적 MIMO pairing 기법을 제시하고자 한다. 이 기법은 비교적 계산이 간단하고 scale에 무관하며 정상상태 gain만을 이용하여 pairing이 가능하기 때문에 공정 제어구조

합성에 쉽게 이용할 수 있다.

몇가지 예를 통하여 다른 방법과 비교함으로써 유용성을 알아보았다.

II. 이 론

조작변수(m)와 제어변수(y)간의 정상상태 gain matrix는 다음과 같이 표시된다.

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_n \end{bmatrix} = G\,\bar{m} \qquad \text{--- (1)}$$

여기서 g_{ij}는 $m_j(m_{k \neq j}=0)$의 변화에 의한 y_i의 변화를 나타내는 정상상태 gain이다. 만약 y_i가 m_i의 변화에만 의존한다면 대각선에 있지않는(off-diagonal) 원소(element)는 모두 0이 된다. 이런 process는 정해진 pairing 변수외에는 상호작용(interaction)이 없다. 즉 off-diagonal 원소들이 process의 변수들간의 상호작용의 요인이라 할 수 있다.

식(1)에서 gain G의 inverse matrix G^{-1}이 존재한다면

$$\bar{m} = G^{-1}\,\bar{y} \qquad \text{--- (2)}$$

로 표시할 수 있다. 수학적으로, G^{-1}를 구하는데 있어서 G^{-1}의 초기치를 G의 diagonal 원소만의 inverse로 잡아 반복하여 구한다면(Jacobi 반복 방법), 수렴 가능성과 수렴속도는 G의 off-diagonal 원소들의 영향이 크다. Matrix G^{-1}을 구하는 과정에서 수렴이 잘되는 것은 gain matrix G가 diagonal matrix에 가까움을 의미하며 이는 system에서 m_i와 y_j $(i \neq j)$ 사이의 상호작용이 작은것을 의미한다. 따라서 변수들의 pairing은 상호작용이 작도록 하여야 하므로 나열가능한 gain matirx중에서 G^{-1}를 구하는 과정에서 수렴속도가 가장 빠른 것을 택한다.

[예] 2x2 system:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = G_1\,\bar{m}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = G_2\,\bar{m}$$

G_1^{-1}에 관한 수렴속도가 G_2^{-1}에 관한 수렴속도보다 빠르다면 (y1-m1) (y2-m2)로 pairing하는 것이 상호작용이 적다.

— MIMO pairing을 위한 eigenvalue 판별기준

상호작용이 심한 복잡한 공정에서는 SISO pairing이 어렵기 때문에 MIMO pairing이 필요하다. 식(1)에서 주어진 정상상태 gain matrix를 block matrix를 사용하여 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \cdots \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1p} \\ \hline G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2p} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline G_{p1} & G_{p2} & \cdots & G_{pp} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \cdots \\ \bar{m}_p \end{bmatrix} = G_B\,\bar{m} \qquad \text{--- (3)}$$

만약에 block으로 pairing(예: y_1y_2-u_1u_4)된 변수들간에만 상호작용이 있고 다른 block의 변수들과는 상호작용이 없다면(즉, $G_{ij(i \neq j)}=0$), $G_B^{-1} = D^{-1}$가 된다.

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} G_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & G_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & G_{pp}^{-1} \end{array}\right] \qquad (4)$$

Block으로 된 MIMO pairing 사이에 상호작용이 있는 system($G_{ij(i \neq j)} \neq 0$)에 대해 G_B^{-1}의 근사 matrix를 B라 하면

$$G_B^{-1} = B + \Delta B \qquad \text{--- (5)}$$

$$(B+\Delta B)\, G_B = I \qquad \text{--- (6)}$$

이 된다. 정리하여 양변 matrix B를 뒤에 곱하면

$$\Delta B G_B B = (I-BG_B)\, B \qquad \text{--- (7)}$$

이 된다. B를 G_B^{-1}의 실제값이 되도록 접근해 간다면 $G_B B$는 I로 된다. 이로부터 다음과 같은 반복적 관계식을 유도할 수 있다.

$$\Delta B^{(i)} = (I-B^{(i)}G_B)\,B^{(i-1)} \qquad \text{—— (8)}$$

여기서 $B^{(0)}$는 식(4)의 D^{-1}를 취한다. B의 첫단계 계산식은

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= B^{(0)} + \Delta B^{(0)} \\ &= [I + (I-B^{(0)}G_B)]\,B^{(0)} \qquad \text{—— (9)} \end{aligned}$$

가 되며 N번째 반복계산 뒤에는 다음과 같다.

$$B^{(N)} = B^{(0)} + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta B^{(i)} = B^{(0)} + \Delta B_T \qquad \text{——(10)}$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta B_T = {} & [(I-B^{(0)}G_B) + (I-B^{(0)}G_B)^2 + \ldots \\ & + (I-B^{(0)}G_B)^N]\,B^{(0)} \qquad \text{——(11)} \end{aligned}$$

이다.

Matrix $(I-B^{(0)}G_B)$는 Jacobi 반복 matrix와 유사한 다음과 같은 형태의 matrix가 된다.

$$A = -\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & G_{11}^{-1}G_{12} & G_{11}^{-1}G_{13} & \cdots & G_{11}^{-1}G_{1p} \\ \hline G_{22}^{-1}G_{21} & 0 & G_{22}^{-1}G_{23} & \cdots & G_{22}^{-1}G_{2p} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline G_{pp}^{-1}G_{p1} & G_{pp}^{-1}G_{p2} & \cdots & G_{pp}^{-1}G_{pp-1} & \cdots \end{array}\right] \qquad \text{——(12)}$$

이것을 이용하여 block gain matrix G_B는 다음과 같이 표시된다.

$$G_B = (B^{(0)})^{-1}\,(I-A) = D\,(I-A) \qquad \text{——(13)}$$

따라서 식(11)은

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta B^{(i)} &= \Delta B_T \\ &= [A+A^2+\ldots+A^N]\,D^{-1} \qquad \text{——(14)} \end{aligned}$$

이 되며

$$G_B^{-1} = [I+A+A^2+\ldots+A^N]\,D^{-1} \qquad \text{——(15)}$$

의 관계가 된다. 식(14)의 matrix 수열이 수렴하기 위한 필요충분조건은 A의 가장 큰 eigenvalue의 modulus가 1보다 작아야 한다.[9] 또한 Young은 N이 무한히 커지고 G가 D에 가까와지면 ΔB_T는 작아지고 수렴속도가 빠르다고 결론지었으며 수렴속도를 다음과 같이 정의하였다.

$$R(A) = -\log S(A) \qquad \text{——(16)}$$

여기서 S(A)는 A의 spectral radius(혹은 A의 eigenvalue중의 가장 큰 modulus)이다.

MIMO pairing을 위해 식(1)에서 주어진 gain matrix로부터 나열가능한 block gain matrix를 형성하여 각각의 식(12)의 A matrix의 eigenvlaue를 구한다. 그로부터 식(16)의 수렴속도가 가장 큰 block gain matrix를 구하여 상호작용이 적은 MIMO pairing을 행할 수 있다.

III. 적용과 검토

— 예제 1.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.1 & 1.0 \\ -0.5 & 0.6 & 0.1 \\ -0.2 & -0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$RGA = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.34 & -0.02 & \underline{0.68} \\ \underline{0.50} & 0.39 & 0.11 \\ 0.16 & \underline{0.63} & 0.21 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_3 & m_1 & m_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underline{0.68} & 0.34 & -0.02 \\ 0.11 & \underline{0.50} & 0.39 \\ 0.21 & 0.16 & \underline{0.63} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$BRG(2) = \begin{array}{c|ccc} & m_1+m_2 & m_1+m_3 & m_2+m_3 \\ \hline y1 & 0.32 & \underline{1.02} & 0.66 \\ & \underline{0.89} & \underline{0.61} & 0.50 \\ & \underline{0.79} & 0.37 & 0.84 \end{array}$$

Pairing	S(A)
y_1-m_3, y_2-m_1, y_3-m_2	0.79
y_1-m_2, y_2-m_3, y_3-m_1	10.0
y_1-m_3, $(y_2,y_3)-(m_1,m_2)$	0.69
$(y_1,y_2)-(m_1,m_3)$, y_3-m_2	0.77

SISO pairing을 한 경우에 대해 RGA판별법과 제시한 방법이 같은 결과를 보였다. 그러나 RGA의 대각선의 원소가 1에서 많이 벗어나 있는 것으로 보아 interaction이 심함을 알 수 있다. MIMO pairing을 위해 BRG(2) 판별법을 사용하면 (y_1-m_3), $(y_2,y_3)-(m_1,m_2)$ pairing과 $(y_1,y_2)-(m_1,m_3)$, y_3-m_2 pairing이 모호한 반면 이 방법을 사용하면 (y_1-m_3), $(y_2,y_3)-(m_1,m_2)$ pairing이 나음을 알 수 있다.

— 예제 2.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & -0.1 \\ 1.0 & -3.0 & 1.0 \\ 0.1 & 2.0 & -1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$RGA = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.53 & 0.59 & -0.12 \\ 0.43 & 1.59 & -1.02 \\ 0.04 & -1.18 & 2.14 \end{bmatrix} \end{array}$$

BRG(2) =

	m_1+m_2	m_1+m_3	m_2+m_3
y_1	1.12	0.41	0.47
y_2	2.02	-0.59	0.57
y_3	-1.14	2.18	0.96

Pairing	S(A)
y_1-m_1, y_2-m_2, y_3-m_3	0.63
y_1-m_2, y_2-m_1, y_3-m_3	1.81
$(y_1,y_2)-(m_1,m_2)$, y_3-m_3	0.73
y_1-m_1, $(y_2,y_3)-(m_2,m_3)$	0.93

SISO pairing에 대해 RGA 판별법은 사용이 애매하나 제시한 방법은 애매한 두경우의 판별이 가능하다. 또한 BRG(2)도 MIMO pairing에 대해 좋은 pairing을 제시하지 못하나 이 방법은 $(y_1,y_2,y_3)-(m_1,m_2,m_3)$를 하지않을 경우 y_1-m_1, y_2-m_2, y_3-m_3 SISO pairing이 나음을 보여준다.

— 예제 3.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 1.0 & 0.4 & 0.35 \\ 0.35 & 0.4 & 1.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{RGA} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underline{1.748} & -0.686 & -0.096 & 0.034 \\ -0.727 & \underline{1.874} & -0.092 & -0.055 \\ -0.055 & -0.092 & \underline{1.874} & -0.727 \\ 0.034 & -0.096 & -0.686 & \underline{1.748} \end{bmatrix} \end{array}$$

BRG(2) =

	m_1+m_2	m_1+m_3	m_1+m_4	m_2+m_3	m_2+m_4	m_3+m_4
y_1	1.062	1.652	1.782	-0.782	-0.652	-0.062
y_2	1.147	-0.819	-0.782	1.782	1.819	-0.147
y_3	-0.147	1.819	-0.782	1.782	-0.819	1.147
y_4	-0.062	-0.652	1.782	-0.782	1.652	1.062

BRG(3) =

	$m_1+m_2+m_3$	$m_1+m_2+m_4$	$m_1+m_3+m_4$	$m_2+m_3+m_4$
y_1	0.966	1.096	1.686	-0.748
y_2	1.056	1.092	-0.874	1.727
y_3	1.727	-0.874	1.092	1.056
y_4	-0.748	1.686	1.096	0.966

Pairing	S(A)
y_1-m_1, y_2-m_2, y_3-m_3, y_4-m_4	1.28
$(y_1,y_2)-(m_1,m_2)$, $(y_3,y_4)-(m_3,m_4)$	0.41
$(y_1,y_2,y_3)-(m_1,m_2,m_3)$, y_4-m_4	0.65
$(y_1,y_2,y_4)-(m_1,m_2,m_4)$, y_3-m_3	0.68

SISO pairing에 대해 RGA 판별법과 제시한 방법은 같은 결과를 보였다. 선택된 가장 좋은 pairing의 S(A)가 1보다 큰것은 perfect 대각 제어기로는 system 제어가 불안정하다는 것을 뜻한다. 따라서 개선된 대각 제어기(integral mode 포함)를 사용하거나 MIMO pairing을 사용하여야 한다. $(y_1,y_2)-(m_1,m_2)$, $(y_3,y_4)-(m_3,m_4)$ pairing이 가장 좋은 MIMO pairing임을 BRG 판별법과 제시한 방법을 통해 알 수 있었다.

IV. 결 론

Inverse matrix를 구할때 matrix의 대각선상에 있지않은 원소가 수렴성과 수렴속도에 영향을 미치는 원리를 이용하여 system의 제어변수와 조작변수들간의 pairing과 상호작용을 해석하였다. 변수들간의 상호작용이 작도록 pairing된 system은 정상상태 gain matrix의 inverse matrix를 구할 때 수렴속도가 다른 것보다 빠름을 보였다. SISO pairing만으로는 부적합한 복잡한 공정에 대해서 제시한 판별법을 이용하여 MIMO pairing을 효과적으로 할 수 있었다. 몇가지 예를 통하여 제시한 방법이 pairing의 일반적인 판별기준으로 사용 가능하고 기존의 방법으로는 선택이 불투명한 경우에 대해서도 적용이 가능하였다.

Reference

1. Bristol, E., "On New Measure of Interaction for Multivariable Process Control," IEEE Trans. Autom. Control, AC-11, 133 (1966)
2. McAvoy, T.J., "Interaction Analysis - Principles and Applications," Instrument Soc. America, Research Triangle Park, NC, 55-85 (1983)
3. Friedly, J.C., "Use of the Bristol Array in Designing Noninteracting Control Loops - A Limitation and Extension," Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., 23, 469 (1984)
4. Bruns, D.D., and C.R. Smith, "Singular Value Analysis - A Geometrical Structure for Multivariable Processes," AIChE Winter Meet. (1982)
5. Jerome, N., "Multivariable Control," M.Sc. Thesis, Univ. of Wisconsin, Madison (1982)
6. Jensen, N., D.G. Fisher, and S.L. Shah, "Interaction Analysis in Multivariable Control System Design," AIChE J., 31, 70 (1986)
7. Manousiouthakis, V., R. Savage, and Y. Arkun, "Synthesis of Decentralized Process Control Structures Using the Concept of Block Relative Gain," AIChE J., 32, 991 (1986)
8. Mijares, G., J.D. Cole, N.W. Naugle, H.A. Preisig, and C.D. Holland, "A New Criterion for the Pairing of Control and Manipulated Variables," AIChE J., 32, 1439 (1986)
9. Young, D.M., Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, New York (1971)