

Dynamic Matrix Control의 응용

이문일, 여영구, 송형근, 박원희
한국과학기술원 화학공정연구소

Application of Dynamic Matrix Control

Il Moon, Yeong Koo Eyo, Hyung Keun Song and Won Hee Park
Chemical Process Lab. , KAIST

Abstract

The Dynamic Matrix Control(DMC) technique was applied to nonlinear and nonminimum phase system. System model was identified by using Least Square method. Desired output trajectory was prespecified and input suppression parameter was also introduced. It was shown that DMC technique worked with great success in solving both nonminimum phase system and nonlinear system.

1. 서론

컴퓨터의 가격이 낮아지고 능력이 증가함에 따라 많은 분야에서 이것을 응용하여 좋은 결과를 나타내고 있다. 특히 제어분야에서도 DDC(Direct Digital Control)의 응용으로 과거에 비해 매우 우수한 결과를 얻고있다. 이 제어이론의 하나인 DMC(Dynamic Matrix Control)는 1970년도 후반 산업계에서 개발되었으며 [1,2,3] 그 후 많은 연구를 통해 지금은 대표적인 제어 이론의 하나가 되었다.

본 연구에서는 DMC를 선형계와 비선형계에 적용하였고 그 성능을 일반적인 PID 방식과 비교하였다. 또한 대표적인 화학공정의 하나인 증류탑에 적용하여 그 타당성을 검토하였다.

2. 이론

(1) Dynamic Matrix 모델

선형계의 동특성은 다음과 같은 전달함수로 표시된다.

$$Y(S) = F(S) U(S) \quad (1)$$

컴퓨터 제어에서 입력은 일정한 시간 간격을 둔 U의 계단변화(step change)의 연속으로 표시된다. 현재 시간에 측정된 출력을 y(o) 라면 convolution 이론 [4]에 의해 y(o)는 다음과 같이 모든 과거입력 변화의 연속으로 표시된다.

$$y(o) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \Delta U(1-i) \quad (2)$$

여기서 f(i)는 계의 동특성을 표시하는 함수로써 다음 절에서 설명된다. (2)식을 이용하여 미래의 값을 다음과 같이 예측할 수 있다.

$$y(k) - y(o) = \sum_{i=1}^{\infty} (f(k+i) - f(i)) \Delta U(1-i) + \sum_{i=1}^k f(i+k-m) \Delta U(m+1-i) \quad K \geq 1 \quad (3)$$

여기서 $m=k$ if $k \leq n_c$ and $m=n_c$ otherwise

(n_c : 제어에 영향을 주는 미래 출력의 개수)

평형과정(equilibrium process)인 경우 $f(\infty)$ 는 일정한 값이므로

$$f(k+i) - f(i) = 0 \text{ for } i \geq n_p \quad (4)$$

($n_p T$ = settling time)

따라서 (3)식을 간략히 하면

$$y(k) - y(o) = \sum_{i=1}^{n_p} ((f(k+i) - f(i)) \Delta U(1-i)) + \sum_{i=1}^k f(i) \Delta U(m+1-i) \quad (5)$$

(5)식 우변의 첫 항은 과거의 입력에 대한 영향이고, 마지막 항은 예측된 미래의 영향을 의미한다. 이 식을 벡터형태로 나타내면

$$Y = Y_n + \Delta U \quad (6)$$

여기서 $\dim(\underline{y}) = \dim(\underline{y}_h) = n_c + n_p$ 즉 total future prediction horizon을 의미한다. $\dim(\Delta u) = n_c$.

\underline{A} 는 Dynamic Matrix(DM)으로써 다음과 같이 정의된다.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} f(1) & 0 & \dots & 0 \\ f(2) & f(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ f(n_c) & f(n_c-1) & \dots & f(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(n_p) & f(n_p) & \dots & f(n_p) \end{bmatrix} \quad (7)$$

그리고 \underline{y}_h 는 과거자료의 vector를 의미한다.

$$(\underline{Y}_h)_k = y(o) + \sum_{i=1}^{n_p} (f(k+i) - f(i)) \Delta u(1-i) \quad (8)$$

(7)식을 m 개의 출력과 n 개의 입력을 갖는 MIMO 계로 확장하면

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \\ \vdots \\ \underline{Y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \\ \vdots \\ \underline{Y}_m \end{bmatrix}_h + \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \dots & \underline{A}_{1n} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \dots & \underline{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \underline{A}_{m1} & \underline{A}_{m2} & \dots & \underline{A}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

제어변수 u 에 외란을 고려하여 미래의 외란변화가 없다면 ($\Delta v = 0$) (8)식에서 \underline{y}_h 를 다음과 같이 보정해야 한다.

$$(\underline{y}_h)_k = y(o) + \sum_{i=1}^{n_p} (f_1(k+i) - f_1(i)) \Delta u(1-i) + \sum_{i=1}^{n_p} (f_2(k+i) - f_2(i)) \Delta v(1-i) + f_2(k) \Delta v(o) \quad (10)$$

(f_2 : Δv 에 대한 계의 동특성 함수)

이와 마찬가지로 DMC 모델은 STATE SPACE 와 ARMA 모델에도 적용할 수 있다. [5]

(2) Dynamic Matrix Control

DMC는 현재까지의 자료를 종합하여 미래의 변화를 예측하고 그 예측한 값과 설정점(set point)의 차를 최소화하는 최적제어이다. 즉 예라와 목적함수(objective function)는 다음과 같이 정의된다.

$$\underline{E} = (\underline{Y}_{sp} - \underline{Y}), \text{ 목적함수 } \min(\underline{E}^T \underline{E}) \quad (11)$$

최적제어의 최소자승법에 의하면 입력은 다음과 같다.

$$\Delta \underline{u} = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{E} \quad (12)$$

여기서 \underline{A} 는 계의 동특성을 나타내는데 전체 제어시간에 비해 변동이 거의 없으므로 상수로 가정할 수 있다.

따라서 출력을 계산할 때 $(\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T$ 는 한번만 계산해 놓고 뒷부분만 매번 계산하면 된다. 만일 계의 동특성이 시간에 따라 변하면 전체행렬을 다시 계산하는 것이 좋다.

(3) 파라메타 추정

앞에서 설명한 제어이론을 적용하기 위해서는 제어 먼저 계의 동특성을 나타내는 \underline{A} 행렬을 구해야 한다.

가) 계단 입력의 값을 읽는 법

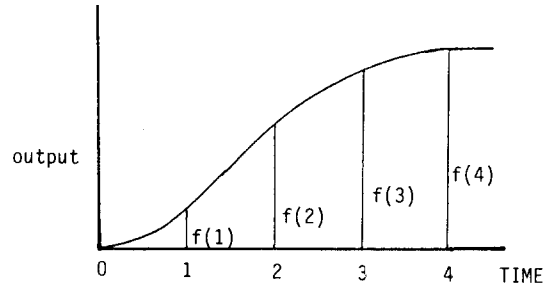


Fig. 1 Response to a unit step change at time zero

초기에 계단 입력을 주고 나오는 출력의 값을 매 샘플링 시간마다 읽은 값을 $f(i)$ 라 하고 (7)식에서 \underline{A} 를 결정한다.

나) 최소 자승법

계단입력대신 임의의 입력을(예: white noise) 주고 그 출력을 측정하여 계의 동특성을 가장 잘 표현하는 f_i 를 구하는 방법이다. 즉 (11)(12)식에서 \underline{A} 를 이용하여 \underline{v} 를 구한 것과 반대로 \underline{v} 를 알고 \underline{A} 를 구하는 것이므로 목적함수는

$$\text{objective function} = (\underline{Y} - \underline{A}\Delta \underline{u})^T (\underline{Y} - \underline{A}\Delta \underline{u}) \quad (13)$$

$$\underline{A} = (\Delta \underline{u}^T \Delta \underline{u})^{-1} \Delta \underline{u}^T \underline{Y} \quad (14)$$

(4) 가중최소 자승법(Weighted Least Squares)

다음의 두가지 이유로 (12)식을 보정할 수 있다.

- i) 과도한 제어 장치
- ii) 동특성 $(\underline{A}^T \underline{A})$ 행렬의 오차 영향을 최소화

control action penalty factor p 를 도입하면

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \dots \\ p \underline{I} \end{bmatrix} \Delta \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{Y} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

목적함수는

$$\min : (\underline{A} \Delta \underline{u} - \underline{Y})^T (\underline{A} \Delta \underline{u} - \underline{Y}) + p^2 (\Delta \underline{u} - 0)^T (\Delta \underline{u} - 0) \quad (16)$$

최소자승법의 해는 :

$$\Delta \underline{u} = (\underline{A}^T \underline{A} + p^2 \underline{I})^{-1} \underline{A}^T \underline{Y} \quad (17)$$

여기서 p 값을 잘 선택함으로써 i)ii)의 효과를 얻을 수 있다.

3. 사례연구

(1)공정모델

아래와 같은 선형계와 비선형계의 임의의 두 모델을 채택하여 DMC 를 적용하였다.

system 1 (linear model)

$$y(k)=0.73576y(k-1)-0.13534y(k-2)+0.0803u(k-3) \\ +0.3192u(k-4)+0.4d(k-2)-0.1d(k-3)+sd \\ (sd : \text{system disturbance})$$

system 2 (nonlinear ; bilinear model)

$$y(k)=0.6y(k-1)+0.3y(k-2)+0.3y(k-1)u(k-1) \\ +0.2y(k-2)u(k-2)+0.4u(k-1)+0.5u(k-2) \\ +0.4d(k-2)-0.1d(k-3)$$

급격한 제어를 감소시키기 위해서 다음과 같이 상수 를 도입하여 설정점을 변화시켰다.

$$S_r = \alpha y(k) + (1-\alpha) \text{Set}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Set} : \text{설정점} \\ S_r : \text{보정된 설정점} \\ y(k) : \text{현시간의 출력} \\ \alpha : \text{설정점 보정 상수} \end{array} \right.$$

그림 2.3.4.5는 step 변화에 대한 system 1,2의 penalty factor p 와 설정점 보정상수 α 의 영향을 나타낸다. 그림 6.7은 system 1에서 임의의 외란변화에 따른 DMC 제어 결과를 나타낸다. 그림 8.9는 DMC 와 PID 제어를 비교하여 나타낸다. PID 의 상수는 오차의 자승을 최소화하는 값으로 하였다.

(2)증류탑 제어

메탄올-물의 이성분계 증류탑 모델[6]에 DMC 를 적용하였다. 증류탑 모델에 사용된 수식이 table 1에 있다. 그림 10은 설정점 보정상수의 영향을 나타내고, 그림 11, 12는 n_c 의 영향을 나타낸다.

Table 1. The required equations of distillation tower model

object of calculation	eqn. or reference
Temp. and vap. conc. at each tray	Wilson eqn., Antoine eqn.
Enthalpy	Fuentes and Luyben (1982)
Density of liq.	Fuentes and Luyben (1982)
Density of Vap.	ideal gas law
Liquid flow rate	Francis weir formula (Smith, 1963)
vapor flow rate	$V_n = \frac{L_{n+1}(h_{n+1}-h_n)}{H_n-h_n} + V_{n-1} \frac{H_{n-1}-h_n - m_n \frac{dh_n}{dt}}{H_n-h_n}$ $\left(\frac{dh_n}{dt} = \frac{h_n^k - h_n^{k-1}}{\Delta t} \right)$

H, h ; enthalpy of vapor and liquid
V, L ; flow rate of vapor and liquid
Mn ; liquid holdup on tray n
k ; iteration counter

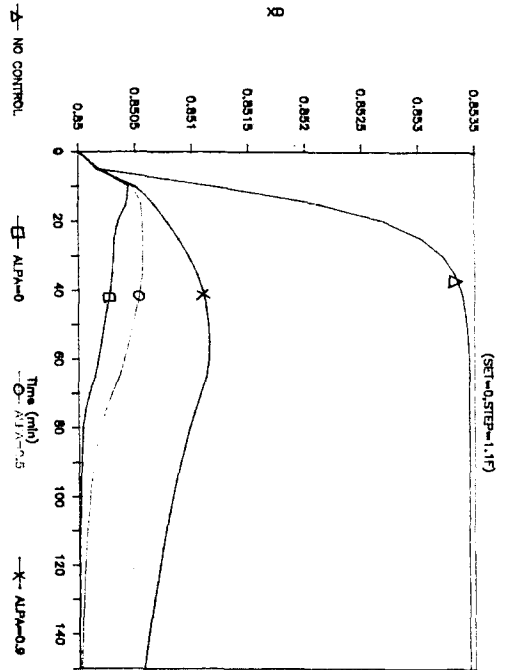
4. 결 론

DMC 방법은 선형계뿐만 아니라 비선형도가 큰 계에서도 제어 결과가 좋았으며 일반적 PID 에 비해서 월등히 우수한 성능을 보여주었다. 계가 바뀔때 따라 제어 보정 상수들을 최적화하여야 하나 비교적 변화의 폭이 적으므로 DMC 방법이 매우 안정한 제어방법임을 알 수 있다.

참고문헌

1. C.R. Cutler and B.L. Ramaker, "DMC - A computer control algorithm", Paper No. S1b, AIChE 86th National Meeting, April 1979.
2. Dynamic Matrix Control, Shell's U.S. Patent No. 4,349,869
3. L. Wooyoung and V.W. Weekman, "Advanced Control Practice in the Chemical Process Industry", AIChE Journal, vol. 12, No. 1, 1976.
4. Erwin Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", 4th ed, pp223, 1979.
5. Odd A. Asbjornsen, "Feed forward predictive and adaptive control by the dynamic matrix", Amer. Cont'l conf. , TA4, 1984.
6. Young Soon Choe, "Rigorous Dynamic of Distillation columns", Korean Automatic control conference, pp212, 1986.

Fig 10. Set-point weighting factor effect (distillation tower)



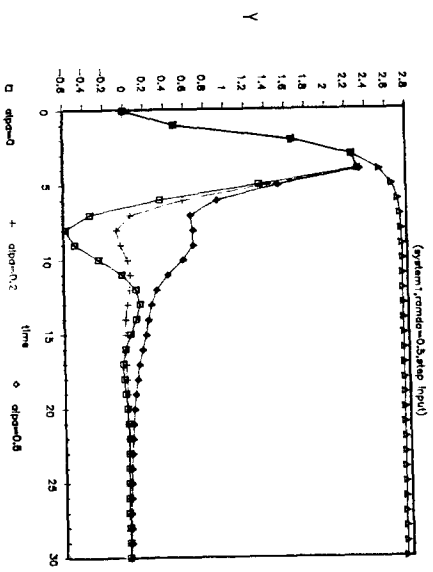


Fig2. Penalty factor effect(system1)

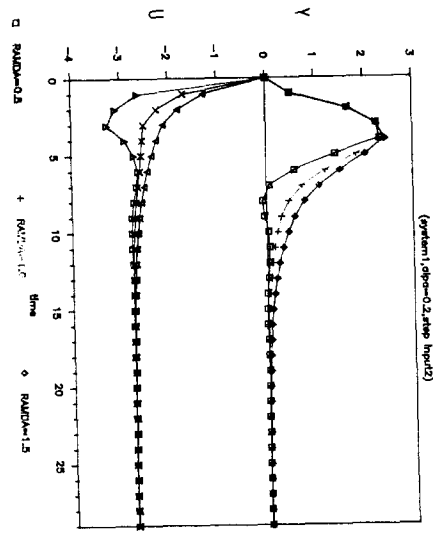


Fig4. Set-point weighting factor effect (system 1)

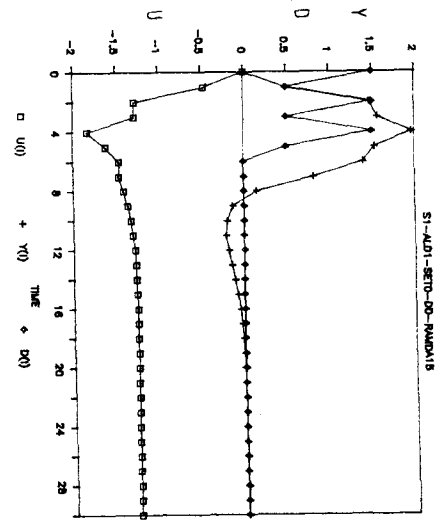


Fig6. Response to a random input (set-point = 0)

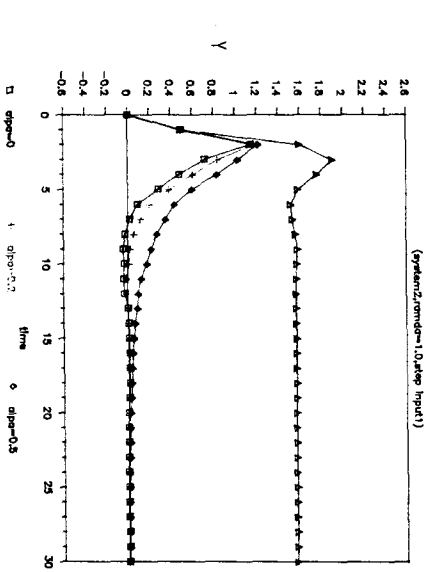


Fig3. Penalty factor effect(system2)

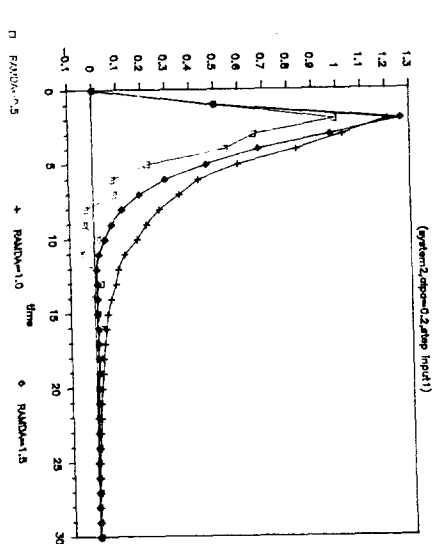


Fig5. Set-point weighting factor effect (system 2)

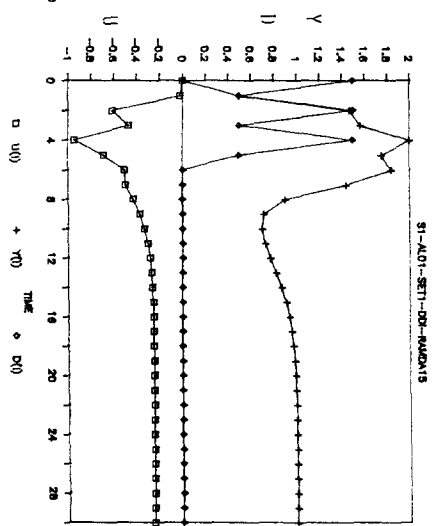


Fig7. Response to a random input (set-point = 1)

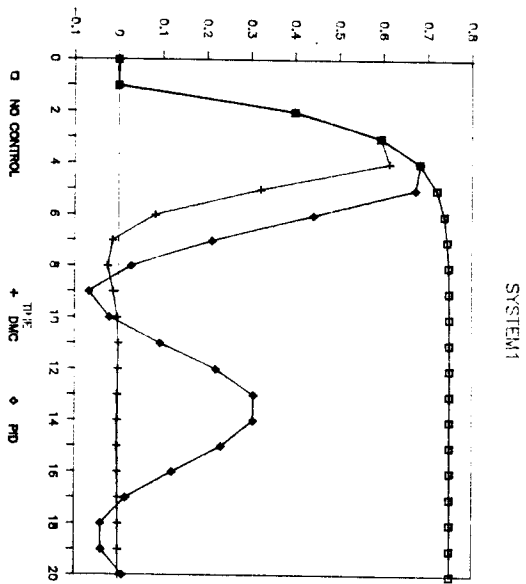


Fig. 8. Comparison of DMC and PID (system 1)

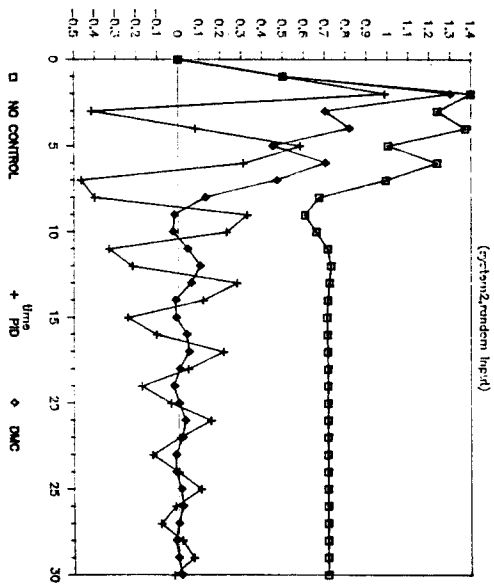


Fig. 9. Comparison of DMC and PID (system 2)

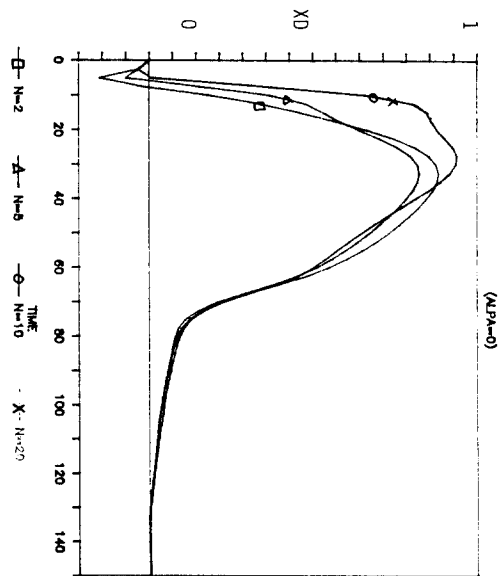


Fig. 11. Penalty factor effect at distillation tower ($\alpha = 0$)

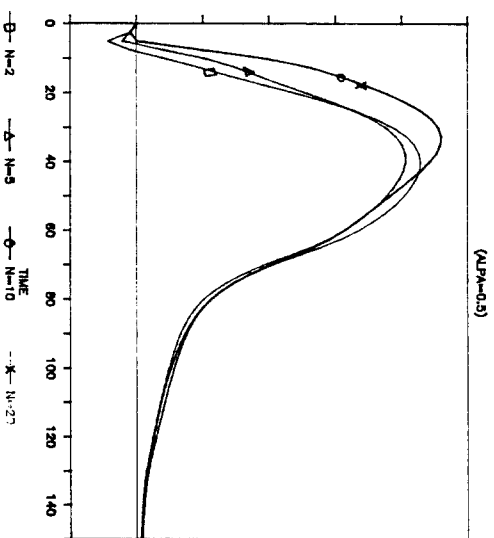


Fig. 12. Penalty factor effect at distillation tower ($\alpha = 0.5$)