

# 數值技法을 利用한 擴散 - 移送의 2次元 解析

## Two-Dimensional Analysis of Convection-Dispersion Using Numerical Scheme

申應培 \* , 徐承源 \*\*

Shin, Eung Bai \* and Suh, Seung Won \*\*

### 요 지

하천에서 중, 횡방향의 고려된 확산-이송 현상을 수치기법인 유한요소법을 이용하여 2차원으로 해석하였다. 유한요소법으로는 Galerkin의 가중잔차 방법을 수심에 대해 적분을 취한 연속, 운동량 및 확산-이송방정식에 적용하였고, 선형보간함수와 선형삼각형요소가 이용되었다.

모형의 타당성을 입증하기 위해 단순화된 1차원 수로에서 수차례 점정한 결과 정확해와 거의 일치하는 만족할만한 결과가 도출되었다. 개발된 모형의 실험이 2차원수로에서 행하여져 지류의 유입에 따른 확산-이송현상이 모의되었으며, 실험적용은 개발사업후의 한강본류 9 km 구간에서 적용되어 탄천과 중랑천의 지천 영향을 받는 오염 농도가 2차원적으로 도시되었다.

\* 한국과학기술원 환경공학연구실장

\*\* 한국과학기술원 환경공학연구원

## 1. 서 론

수자원의 효율적인 관리와 수질오염의 저감대책을 수립하는데 있어서는 무엇보다도 먼저 수역의 국부적인 지형특성이 고려된 흐름과 오염물의 확산 이송현상을 정확히 아는것이 선행되어야 한다.

그러나 지금까지 개발되어 하천에서 적용되고 이용된 수질모의 모형은<sup>(2,12,13,17,18)</sup> 일차원적으로 해석했기 때문에 하폭이 큰 하천의 지류 유입에 따른 변화와 횡확산의 영향이 민감하게 나타나지 않는 제약점이 있어 본 연구는 하천에서의 흐름현상과 오염물 확산 이송현상에 대해 수치기법을 이용한 이차원 해석을 시도하여 하천에서의 확산 이송에 대한 보다 상세한 결과의 도출을 꾀하고자 한다. 수치기법으로는 불규칙한 하천형상에 적용성이 뛰어난 유한요소법을 채택하였고, 개발된 모형은 한강본류 9 km 구간에 적용되어 수질지표로 표현되는 비보존성인 BOD 농도분포가 이차원적으로 도시되었다. 그리고 계산은 PC에서 수행되어 모형의 적용성 및 활용성 증진을 도모하였다.

## 2. 유한요소식의 전개

### 2-1. 지배방정식

자연하천에서의 흐름과 확산 이송해석을 위해 본 연구에서는 수표면과 하상사이의 변동을 무시한 즉, 수심에 대해 적분을 취한 이차원 모형을 이용한다.

이차원적인 연속방정식, 운동량방정식 그리고 확산 이송방정식의 표

현은 다음과 같다. (6,13,19)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho h} \tau_{bx} - \epsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho h} \tau_{by} - \epsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) = b \quad (4)$$

여기서  $u, v$ 는 수심에 대해 평균을 취한  $x, y$  방향의 유속,  $g$ 는 중력가속도,  $\zeta$ 는 수표면 변위,  $\rho$ 는 물의 밀도,  $\tau_{bx}, \tau_{by}$ 는 하상마찰응력,  $\epsilon$ 는 유효전단응력 계수이며,  $C$ 는 오염물의 농도,  $D_x, D_y$ 는  $x, y$  방향의 확산계수이고  $b$ 는 오염물의 생성이나 소멸, 생화학적 작용을 나타낸다.

## 2-2. 유한요소법

식 (1) ~ (4)를 유한요소법을 이용하여 전개하는데 선형삼각형요소와 선형보간함수를 이용한 Galerkin의 가중잔차방법이 적용되었다. 이 방법을 적용하여 얻은 결과를 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$[M]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F_1\} \quad (5)$$

$$[M]\{\dot{C}\} - [P]\{C\} = \{B\} + \{F_2\} \quad (6)$$

식 (5)는 연속방정식과 Navier-Stokes의 운동방정식을 조합한 것이며,

식 (6) 은 오염물의 확산 이송방정식을 유한요소법에 의해 행렬형태로 표현한 것이다. 여기서  $q$  는  $\zeta, u, v$  를 나타내며, 행렬  $[M]$  의 임의의 요소  $M_{ij} = \iint \phi_i \phi_j dA$  이고  $\{F_1\}$  은 식 (2), (3) 의 유효전단응력항을 Green 정리로 전개하였을때 수반된 선적분을 의미하며  $[K]$  는 식 (1) ~ (3) 에서 시간미분항을 제외한 항들을 조합한 것이다. 식 (6) 에서의 행렬  $[P]$  의 임의의 한요소  $P_{ij}$  는 다음과 같으며 여기서  $n$  은 유한요소내의 절점수를 나타낸다.

$$P_{ij} = - \iint \left\{ \sum_{k=1}^n (U_k \phi_k) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i + \sum_{k=1}^n (V_k \phi_k) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \phi_i + D_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + D_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\} dA \quad (7)$$

또한 벡타  $\{B\}$  는 식 (4) 의 우변  $b$  를 조합한 것을,  $\{F_2\}$  는 식 (4) 의 확산항을 Green 정리로 전개할때 수반되는 선적분을 의미한다. 식 (7) 에서의  $\phi$  는 보간함수로 본 연구에서는 선형보간함수를 이용하였다.

식 (5) 와 (6) 은 하나의 요소에 대한 식이므로 대상수역에 대한 해석을 위해 이를 전체영역으로 조합하여 다음식을 얻을 수 있다.

$$[M_G] \dot{Q} + [K_G] Q = \{F_{G1}\} \quad (8)$$

$$[M_G] \dot{C} - [P_G] C = \{B_G\} + \{F_{G2}\} \quad (9)$$

여기에서 첨자  $G$  는 식 (5), (6) 의 행렬과 벡타를 전영역에 대해 조합한 것을 의미하며  $\dot{Q}, Q, \dot{C}, C$  는  $\{\dot{q}\}, \{q\}, \{\dot{c}\}, \{c\}$  를 전영역에 대해 조합한 것을 나타내고 여기서  $\dot{\cdot}$  은 시간미분을 의미한다.

### 2-3. 시간적분

식 (8), (9) 는 시간미분항을 포함하고 있어 이 항에 대한 적분이 필요하며 유한요소법에서의 시간적분으로는 통상 유한차분기법이 응용된다. <sup>(10,11)</sup>

유한차분방식의 음해법과 양해법으로 시간적분을 하는데 있어서 식 (8) 의 행렬  $[K_G]$  와 같이 비선형항을 포함하고 있을때는 양해법을 이용하는 것이 <sup>(3)</sup> 계산시간을 줄일수 있고 그 정도를 높일수 있는 반면, 식 (9) 의 경우는 음해법을 이용하는 것이 미소시간증분의 값을 크게 <sup>(6)</sup> 할 수 있는 잇점이 있으므로 본 연구에서는 식 (8) 의 경우 양해법 중 2 단계 Lax-Wendroff 방식을, 식 (9) 에는 음해법중 Crank-Nicolson 방법을 이용하였다.

### 3. 모형의 검정

전술한 흐름의 기본방식과 오염물의 확산 이송방정식을 유한요소법으로 응용하는 것과 Computer algorithm을 증명하기 위해 정확해를 구할수 있는 1차원 수로에 적용하여 수치해와 정확해를 비교하고자 한다.

흐름의 기본방정식인 연속방정식과 운동량방정식에 대한 검정은 본 논문에서는 생략하고 (참고문헌 19 참조), 확산이송방정식에 대한 검정을 오염물의 소멸을 고려하지 않은 경우와 고려한 두가지 경우로 해석한다.

### 3-1. 소멸항을 고려하지 않은 일차원 확산이송방정식

일차원 확산이송방정식은 식 (4) 에서  $v = 0$ ,  $D_y = 0$ ,  $b = 0$  로 취하므로써 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0 \quad (10)$$

일차원계에서의 농도  $C(x, t)$  가 다음의 초기조건과 경계조건을 만족한다면

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= 0, & x > 0 \\ C(0, t) &= C_{in}, & t \geq 0 \\ C(x \rightarrow \infty, t) &= 0, & t \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (10) 에 대한 정확해는 다음과 같다. (419)

$$\frac{C}{C_{in}} = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{ux}{D_x}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x+ut}{2\sqrt{D_x t}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_x t}}\right) \quad (12)$$

그림 1 과같이 폭 40 m, 길이 340 m, 수심 4 m 인 일차원 구형수로의 전영역에서 유속이 2 m/s 로 분포되어있고 상류 1-3 단면에 연속적으로  $C_{in}$  의 농도가 주입되었을때 수치해와 식 (12) 의 정확해를 비교한 것이 그림 2, 3 과 같다.

### 3-2. 소멸항을 고려한 일차원 확산이송방정식

비보존성인 물질과 같이 흐름내의 오염물이 생성 혹은 소멸하거나 생화학적 작용을 할때의 일차원 확산이송방정식은 식 (4) 에서  $v = 0$ ,  $D_y = 0$  로 취하고, 오염물이 선형소멸된다면 다음과 같이 표현할 수

있다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (Dx \frac{\partial C}{\partial x}) = -rC \quad (13)$$

상기식에 대한 정확해는 수온에 대해서 계수  $r$ 을 수표면 열교환 소멸율로 보고 초기조건과 경계조건이  $C(x, 0) = 0$ ,  $C(0, t) = C_{in}$ ,  $C(x \rightarrow \infty, t) = 0$  일때 Laplace 변환을 이용하여 구한 결과가 다음과 같다.<sup>(4)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{C}{C_{in}} = \frac{1}{2} \{ & \exp \left[ \frac{ux}{2Dx} (1 + \sqrt{1 + \alpha}) \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{x + ut \sqrt{1 + \alpha}}{2 \sqrt{Dxt}} \right) \\ & + \exp \left[ \frac{ux}{2Dx} (1 - \sqrt{1 + \alpha}) \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{x - ut \sqrt{1 + \alpha}}{2 \sqrt{Dxt}} \right) \} \quad (14) \end{aligned}$$

여기서  $\alpha = 4rDx/u^2$  이다.

앞에서 적용한 일차원 수로에서 수치해와 식(14)의 정확해를 비교한 것이 그림 4, 5에 도시되었으며, 이때 사용된 확산계수와 소멸율이 그림에 나타내져 있다.

### 3-3. 확산계수

개수로의 종확산계수에 대해 많은 사람들이 연구한 바에 따르면 다음의 두가지로 구분할 수 있다. 첫째는 수심과 전단유속과의 관계로 표현하였고, 둘째는 수심과 수체의 단위질량의 에너지 감소로 표현하였다.<sup>(17, 14)</sup> 즉,

$$D_L = \beta u_* h \quad (15)$$

$$D_L = \delta E^{1/3} h^{4/3} \quad (16)$$

여기서  $\beta$  와  $\delta$  는 계수이며,  $E = u \cdot S_e \cdot g$ ,  $u_* = \sqrt{gRS}$  이고  $S_e$ ,  $S$  는 각각 에너지경사와 하상경사를 의미한다.

본 모형실험의 경우 하상경사를 1/1,000 로 했을때 Elder, Thackston, Krenkel 에 의한 종확산계수는 각각  $4.3 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $10.42 \text{ m}^2/\text{s}$  그리고  $8.54 \text{ m}^2/\text{s}$  이다. 모형실험에서는  $8.54 \text{ m}^2/\text{s}$  와  $15 \text{ m}^2/\text{s}$  를 취하였다.

#### 4. 모형의 적용

개발된 모형의 적용대상수역은 하폭이 크고 비교적 높은 오염도의 지천인 탄천과 중량천이 유입되는 한강본류부 9 km 구간으로 하였다. 하상단면은 개발사업후의 단면자료를<sup>(16)</sup> 이용하였고, 그림 6 과 같이 수역을 총 247 개의 요소와 161 개의 절점으로 분할하였다. 유량과 농도의 자료는 한강유역환경 종합계획보고서<sup>(15)</sup> 에서 인용한 것으로 팔당에서의 방류량이  $360 \text{ m}^3/\text{s}$  왕숙천, 탄천, 중량천의 유입량이 각각  $1.4 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $3.0 \text{ m}^3/\text{s}$  그리고  $17.5 \text{ m}^3/\text{s}$  일때 이를 이외의 유출입의 변화가 없다고 간주하였다. 농도자료는 수질지표의 하나로 표현되는 BOD 실측치가 상류에서는 0.3 ppm, 탄천의 유입농도가 27 ppm, 중량천의 유입농도가 50 ppm이다. 이때 사용된 BOD 감소율은 0.1/day 로 하였으며, 종·횡방향의 확산계수는  $8.0 \text{ m}^2/\text{s}$  와  $0.08 \text{ m}^2/\text{s}$  를 취하였다.

상기의 기본자료를 적용하여 흐름이 정상상태에 도달하였을때의 유속분포가 그림 7 에 도시되었고 그림 8, 9 에는 5 시간 경과후와 정상상태에 도달한 농도분포가 이차원적으로 도시되었다. 또한 여기서는 모형의 적용성 및 활용성을 도모하고자 계산이 PC 에서 수행되었으며, 계산결과 또한 PC 를 이용하여 쉽게 출력할 수 있고 판독이 용이



하도록 Spline 보간개념을 도입하여 도식화 하였다.

## 5. 결 론

이차원 흐름의 기본방정식과 확산이송방정식에 유한요소법을 도입하여 해석한 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 모형검정결과 수치해의 농도곡선 중간점은 수로의 평균유속으로 하류로 이동되며 이는 이론적인 결과와 잘 부합되고, 수치해와 정확해가 거의 일치하는 만족할만한 결과가 도출되어 모형의 타당성이 입증되고 실제 적용성이 시사되므로써 하천뿐만 아닌 하구나 저수지에서의 활용이 도모될 수 있을 것이다.

둘째, 본 모형을 적용하므로써 BOD 이외의 일반적인 비존성물질과 보존성물질의 이차원 확산이송해석도 용이하게 이루어질것으로 사료된다.

세째, 소형컴퓨터에서의 활용이 가능하며, 이차원적인 해석을 통하여 국부적인 중·형확산의 영향이 고려되므로써 적정방류점과 취수점의 결정에 유용한 정보를 제공할 수 있어 수자원의 효율적인 관리와 대책의 도구로 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 6. 참고문헌

1. Bansal, M.K., "Dispersion in Natural Streams," J. of Hyd. Div., ASCE, Vol. 97, No. HY 11, Nov., 1971, pp 1867-1886
2. Bauer, D.P., Jennings, M.E., One-Dimensional Steady-State Stream Water Quality Model, USGS, Water Resources Investigations, St. Louis, Miss., 1971
3. Cochet, J.F., Dhatt, G., and Hubert, G., "Thermal Discharge Analysis in St-Lawrence

- River by Finite Elements: A Case Study," in Finite Elements in Water Resources, Proceedings of the 4th International Conference, Hannover, Germany, 1982
4. Daily, J.W., and Harleman, D.R.F., Fluid Dynamics, Addison-Wesley Co., 1966
  5. Leimkuhler, W.F. et al., "Two-Dimensional Finite Element Dispersion Model," 2nd Annual Symposium of the Waterways, Harbours and Coastal Engineering Division of ASCE, San Francisco, California, 1975, pp 1467-1486
  6. Loziuk, L.A., Anderson, J.C., and Belytscho, T., "Hydrothermal Analysis by Finite Element Method," J. of Hyd. Div., ASCE, Vol. 98, No. HY11, Nov., 1972, pp 1983-1998
  7. Morris, J.S., Krenkel, P.A., and Thackston, E.L., "Investigation on Turbulent Diffusion in Inland Waterways," Technical Report No.14, Dept of Sanitary and Water Resources Engineering, Vanderbilt University, 1967
  8. Niemeyer, G.C., "Solution of Coupled Nonlinear Ecosystem Equations," J. of Env. Div., ASCE, Vol. 104, No. EE5, Oct., 1978, pp 849-861
  9. Paily, P.P., Macagno, E.O., and Kennedy, J.F., "Winter Regime Thermal Response of Heated Streams," J. of Hyd. Div., ASCE, Vol. 100, No. HY4, Apr., 1974, pp531-551
  10. Pinder, G.F., and Gray, W.G., Finite Element Simulation in Surface And Subsurface Hydrology, Academic Press, 1977
  11. Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, 1972
  12. Roesner, L.A., Giguere, P.R., and Evenson, D.E., Computer program Documentation for the Stream Quality Model Qual-II, Water Resources Engineers, Inc, 1977
  13. Smith, D.J., Water Quality for River-Reservoir Systems, U.S. Army Corps of Engineers, The Hydrologic Engineering Center, 1978
  14. U.S. EPA, Rates, Constants and Kinetics Formulations in Surface Water Quality Modeling(2nd ed), 1985
  15. Engineering Science, Inc., Hyundai Engineering Co., Ltd., and Hyosung Engineering Construction Co., Ltd., "Draft Report on Water Quality Sector - Han River Basin Environmental Master Plan," Vol. 1, 1983
  16. 서울특별시, 한강종합개발기본계획설계도, 1983
  17. 신용배 외, " 대기 수질 환경관리 전산모델연구(1차)," 한국과학기술원, HS E586(2)-1870-6, Dec., 1982
  18. 신용배 외, " 대기 수질 환경관리 전산모델연구(2차) ," 한국과학기술원, HS E615(2)-2134-6, Feb., 1984
  19. 신용배 외, " 수계별 수질예측 수치모델의 개발( I )," 한국과학기술원, HS K-68-2210-6, 1985

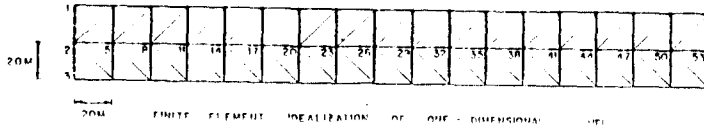


그림 1. 1차원 수로의 유한요소화

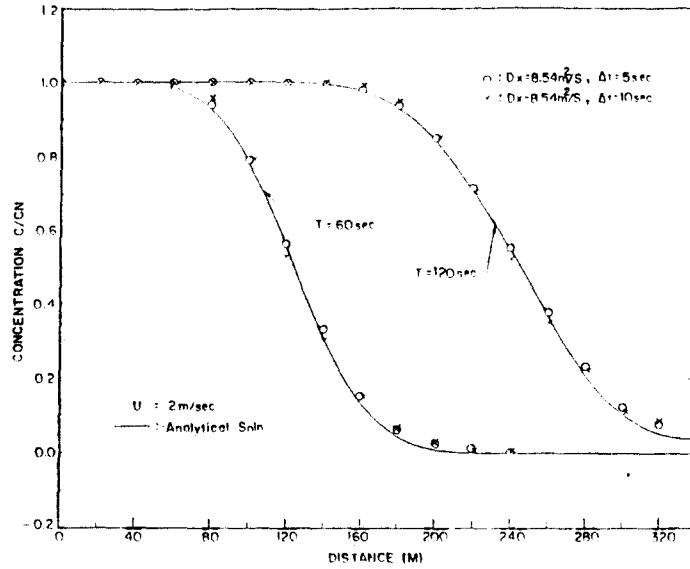


그림 2. 소멸항을 고려하지 않은 경우의 모형검정 (I)

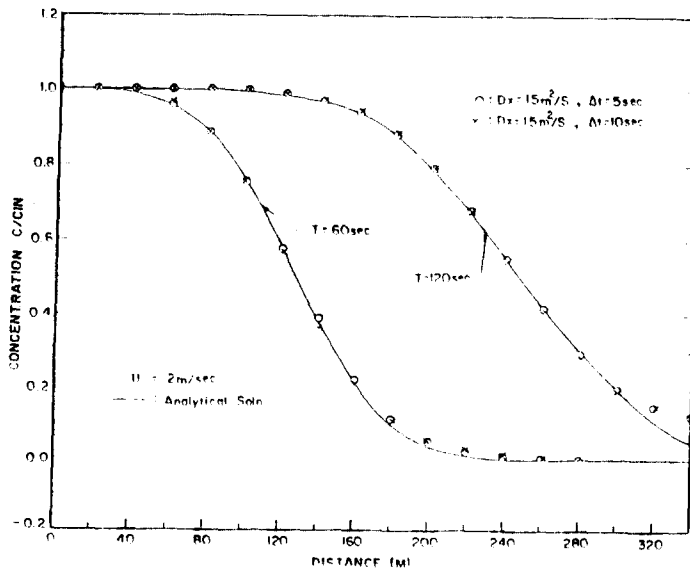


그림 3. 소멸항을 고려하지 않은 경우의 모형검정 (II)

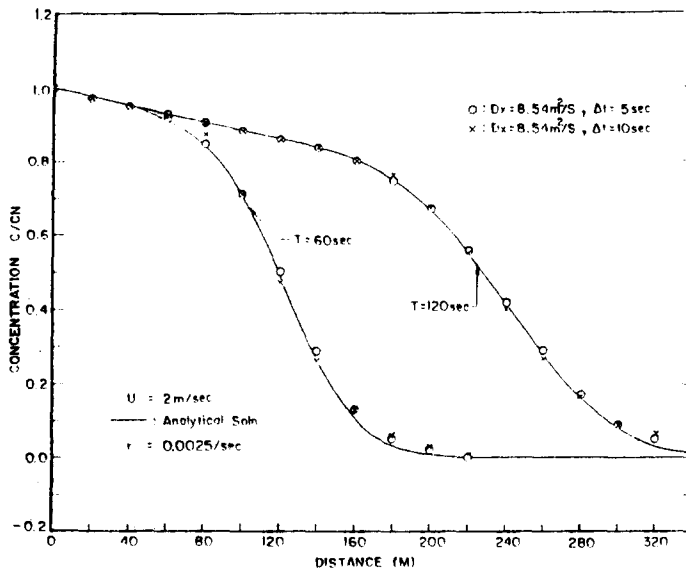


그림 4. 소멸항을 고려한 경우의 모형검정 (I)

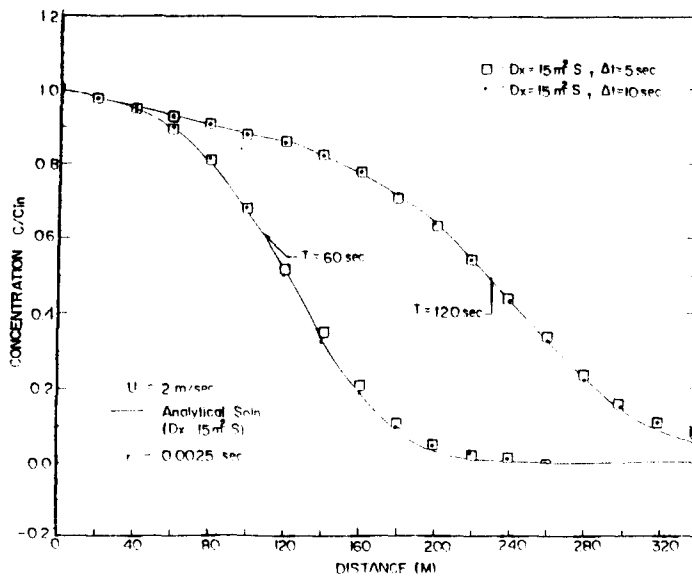


그림 5. 소멸항을 고려한 경우의 모형검정 (II)

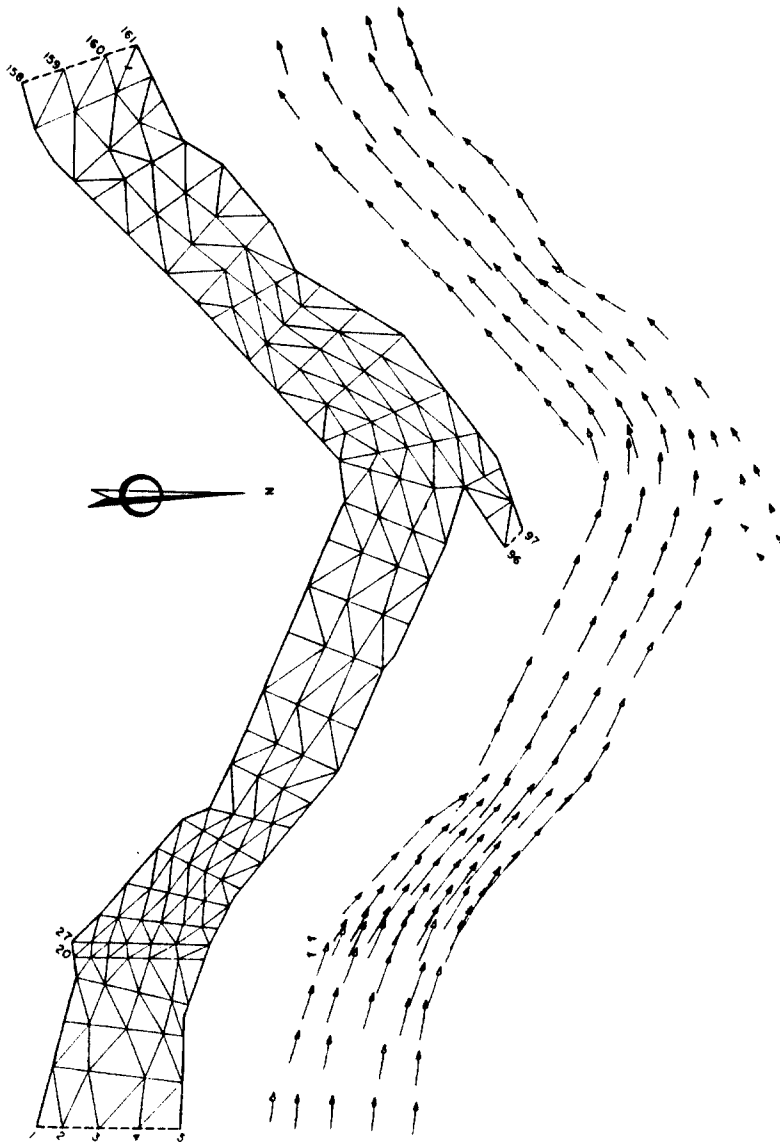


그림 6. 한강수역의 유한요소화

그림 7. 한강수역의 정상상태 유속분포

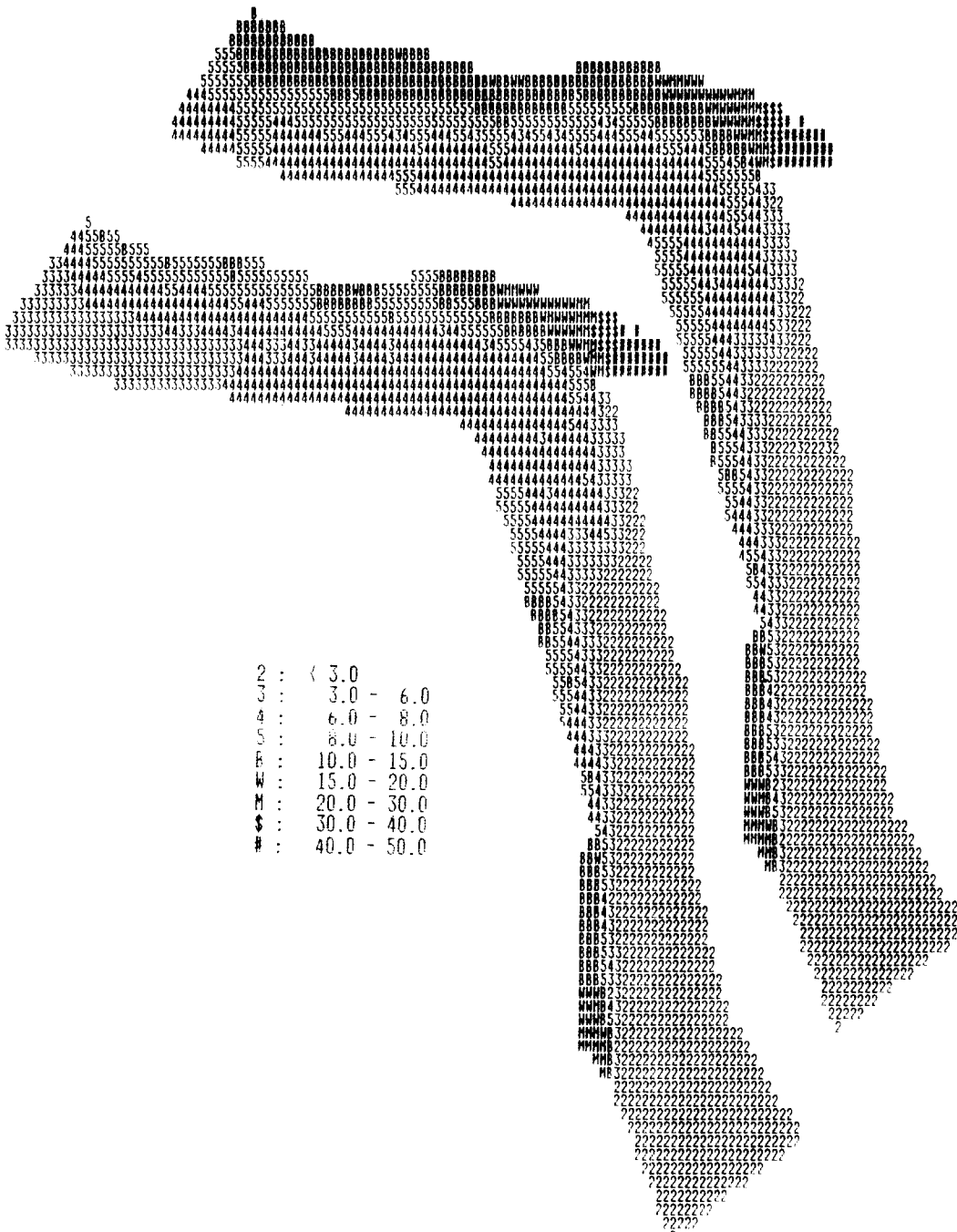


그림 8. 한강수역의 계산된 BOD 농도분포 ( 5 시간경 과후 )

그림 9. 한강수역의 계산된 BOD 농도분포 ( 정상상태 )