

하늘은 왜 푸르게 보이나?

- 구에 의한 소리의 산란 -

이 병 호

(한국과학기술원)

Why Is the Sky Blue ?

- Scattering of Sound at a Sphere -

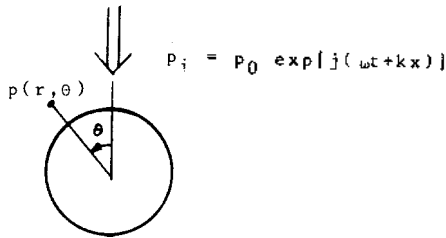
Byung Ho Lee

KAIST

오랜 옛적부터 天地玄黃이라하여, 하늘은 검고, 땅은 누렇다고, 우리 조상들은 통찰해 왔다. 최근 우주탐사선에서 찍은 우주공간의 사진은 세카당계 나타냈다. 즉, 하늘은 검은색이라는 것으로 분명하게 증명되 되었다. 그러나 우리 지구상에서 하늘을 쳐다보면, 낮에는 상쾌한 푸른 색깔로 보인다. 그래서 우리 인류는 맑은 이성과 희망을 무한한 푸른 하늘에 그리게 되었고, 거기에 우주는 창조주가 살고 있다고 믿어 왔다. 그러면 하늘은 왜 푸른가? 소리의 구에 의한 산란의 이론을 광파에 적용해서 증명할 수가 있다.

1. 입사하는 평면파의 구면파 전개

지구의 주위에는 대기층이 있어, 태양에서 오는 광선의 평면파가 그들 대기층 구성하는 산소와 질소분자들에 부딪쳐서 산란을 일으킨다. 지금만경인 상성구에 평면파가 -x 방향으로 입사하는 경우로 model을 잡아 이를 생각해 보기로 한다. 그러면 입사파의 음압은



$$P_i = P_0 \exp[j(\omega t + kx)] \quad (1)$$

으로 쓰여진다. 경계조건은 상성구의 표면에서 법선 방향의, 입사하는 입자(광자) 속도와 반사(산란)하는 입자속도가 크기는 같고, 방향이 정반대라는 것이다. 즉,

$$(q_{in} + q_{sn})|_{r=r_0} = 0 \quad (2)$$

이조건을 따지기 위하여, 입사 평면파를 구면파로 전개할 필요가 생긴다.

$$\begin{aligned} P_i &= P_0 \exp(j\omega t) \exp(jkx) \\ &= P_0 \exp(j\omega t) \exp(jkr \cos\theta) \\ &= P_0 \exp(j\omega t) \exp(jz\mu) \end{aligned}$$

그런데

$$\exp(jz\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(z) P_m(\mu) \quad (3)$$

으로 표시된다. 여기서

$$kr = z, \quad \cos\theta = \mu, \quad (4)$$

로 했으며, $P_m(\mu)$ 는 Spherical harmonics 이다. 여기 $A_m(z)$ 를 구하려면 (3)의 양변에 $P_n(\mu)$ 를 곱하고, $d\mu$ 에 관하여 -1에서 +1까지 적분을 하면

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_m(\mu) \exp(jz\mu) d\mu &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m(z) \int_{-1}^1 P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m(z) \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ 2/(2m+1) & \text{if } m=n \end{cases} \end{aligned}$$

그러므로

$$A_m(z) = \frac{2m+1}{2} P_m(\mu) \exp(jz\mu) d\mu, \quad (5)$$

그런데

$$\int_{-1}^1 P_m(\mu) \exp(jz\mu) d\mu = 2j^m \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{m+\frac{1}{2}}(z) \quad (6)$$

으로 표시된다. 여기서 Spherical Bessel function:

$$\begin{aligned} n_m(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{m+\frac{1}{2}}(z) \\ j_m(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{m+\frac{1}{2}}(z), \quad (7) \end{aligned}$$

을 이용하면,

$$A_m(z) = (2m+1) j^m j_m(z) \quad (8)$$

로 쓰여진다. 이리하여 입사하는 평면파는 다음과 같이 Spherical wave의 급수로 전개된다. (원점은 구의 중심)

$$P_i = P_0 \exp(j\omega t) \sum_{m=0}^{\infty} j^m (2m+1) P_m(\mu) j_m(z) \quad (9)$$

11. 구면에서의 산란파

다음은 구면에서의 산란파를 역사 구의 중심을 원점으로하는 구면파로 전개해야 한다.

파동 방정식:

$$c^2 \nabla^2 \phi = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\phi: \text{velocity potential}) \quad (10)$$

을 극좌표에서 풀면

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(r, \theta, \phi, t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} P_m(\mu) j_m(kr) \exp(j\omega t). \quad (11) \end{aligned}$$

여기서 Spherical Hankel function of 2nd kind,

$$h_m^{(2)}:$$

$$\begin{aligned} h_m^{(2)}(z) &= j_m(z) - j_n_m(z) \\ &= G_m(z) \exp[-j\epsilon_m(z)]; \end{aligned}$$

$$G_m(z) = \sqrt{j_m^2(z) + n_m^2(z)}, \quad (12)$$

$$\sin \epsilon_m(z) = \frac{n_m(z)}{G_m(z)},$$

$$\cos \epsilon_m(z) = \frac{j_m(z)}{G_m(z)}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_m^{(2)}(z)}{dz} &= \frac{1}{2m+1} \left\{ [mj_{m-1}(z) - (m+1)j_{m+1}(z)] \right. \\ &\quad \left. - j[mj_{m-1}(z) - (m+1)n_{m+1}(z)] \right\} \\ &= b_m(z) \exp[-j(\epsilon_m(z) + \pi/2)] \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_m(z) \cos \epsilon_m(z) &= \frac{1}{2m+1} [mn_{m-1}(z) - (m+1)n_{m+1}(z)] \\ &\quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -D_m(z) \sin \epsilon_m(z) &= \frac{1}{2m+1} [mj_{m-1}(z) - (m+1)j_{m+1}(z)] \end{aligned}$$

을 이용하면 산란하는 부분의 velocity potential 은 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \phi, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m0} P_m(\mu) G_m(z) \exp[-j\epsilon_m(z)] \exp(j\omega t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m0} P_m(\mu) h_m^{(2)}(z) \exp(j\omega t). \quad (16)$$

그러므로 산란압방울

$$\begin{aligned} p_s &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= j\rho\omega \exp(j\omega t) \sum_{m=0}^{\infty} a_{m0} P_m(\mu) h_m^{(2)}(z). \quad (17) \end{aligned}$$

반경방향의 입자속도는 일반적으로 구면상에서

$$q_n|_{r=r_0} = - \frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = - \frac{k}{j\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{r=r_0}. \quad (18)$$

그런데

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [j_m(z)] &= \frac{1}{2m+1} [mj_{m-1}(z) - (m+1)j_{m+1}(z)] \\ &= -D_m(z) \sin \epsilon_m(z), \end{aligned}$$

$$\frac{dh_m^{(2)}(z)}{dz} = -jD_m(z) \exp[-j\epsilon_m(z)]$$

만을 이용하여, 경계조건 (2) 에 적용하면,

$$\begin{aligned} p_0 \sum_{m=0}^{\infty} j^{m(2m+1)} P_m(\mu) D_m(z_0) \sin \epsilon_m(z_0) \\ + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m0} P_m(\mu) (-j) D_m(z_0) \exp[-j\epsilon_m(z_0)] = 0 \end{aligned}$$

이것이 성립하려면 제 m 항이 다른 항에 상관없이 0이어야 하므로

$$a_{m0} = j p_0 j^{m(2m+1)} \sin \epsilon_m(z_0) \exp[j\epsilon_m(z_0)] \quad (19)$$

으로 결정된다. 따라서, p_s 와 q_{sn} 은 다음과 같이 쓰여진다:

$$\begin{aligned} p_s &= p_0 \exp(j\omega t) \sum_{m=0}^{\infty} j^{m+1} (2m+1) P_m(\mu) \\ &\quad \sin \epsilon_m(z_0) \exp[j\epsilon_m(z_0)] h_m^{(2)}(z), \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{sn} &= \frac{p_0}{\rho c} \exp(j\omega t) \sum_{m=0}^{\infty} j^{m+1} (2m+1) P_m(\mu) \\ &\quad \sin \epsilon_m(z_0) \exp[j\epsilon_m(z_0)] D_m(z) \exp[-j\epsilon_m(z)]. \quad (21) \end{aligned}$$

III. 산란파의 강도와 푸른색 보이는 이유

대기층을 구성하는 산소와 질소의 분자들에 의한 공파의 산란파의 강도의 반경방향의 성분은 일반적으로

$$J_{sn} = \frac{1}{2} \text{Re}(p_s q_{sn}^*) \quad (22)$$

로 주어진다. $z \ll 1$ 인 경우에는

$$D_m(z) \cong \frac{1}{z}; \quad \delta_m(z) \cong z - \frac{m+1}{2} \pi; \quad (23)$$

$$h_m^{(2)}(z) \cong \frac{\exp[-j(z - \frac{m+1}{2} \pi)]}{z}$$

그러므로 (22)는

$$J_{sn} = \frac{1}{2} \text{Re}(p_s q_{sn}^*) \Big|_{z \ll 1} = \text{Re} \left\{ \frac{p_0^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \exp(j \frac{m+1}{2} \pi) \exp(-j \frac{n+1}{2} \pi) P_m(u) P_n(u) \cdot (2m+1)(2n+1) \exp[j\delta_m(z_0) - j\delta_n(z_0)] \sin \delta_m(z_0) \frac{\exp[-j(z - \frac{m+1}{2} \pi)] \exp[j(z - \frac{n+1}{2} \pi)]}{z} \right\}$$

$$= \frac{p_0^2}{2\alpha c} \frac{1}{z^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} (2m+1)(2n+1) P_m(u) P_n(u) \sin \delta_m(z_0) \sin \delta_n(z_0) \cos[\delta_m(z_0) - \delta_n(z_0) + (m-n)\pi]. \quad (24)$$

그런데 여기서 산소, 질소 분자의 반경은 $r = 5\text{\AA}$, 가시광선의 파장은 $\lambda \sim 5000\text{\AA}$ 이므로,

$$z_0 = kr_0 = \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \sim \frac{2\pi}{5000} (5) \sim 10^{-2} \ll 1. \quad (25)$$

따라서 long wave limit 의 경우이다. 이 경우

$$\delta_0(z_0) \cong \frac{z_0^3}{3}, \quad \delta_1(z_0) \cong -\frac{z_0^3}{6},$$

$$\delta_2(z_0) \cong -\frac{2z_0^5}{135}, \quad (26)$$

그러므로 Spherical harmonics:

$$P_0(u) = 1, \quad P_1(u) = u = \cos \theta,$$

$$P_2(u) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1), \quad (27)$$

이다. 이를 이용하여 산란파의 강도의 반경방향의 성분은

$$J_{sn} = \frac{p_0^2}{2\alpha c z^2} \left\{ \left(-\frac{z_0^3}{3} \right) \left(-\frac{z_0^3}{3} \right) + 1 \cdot 3 \left(\frac{z_0^3}{3} \right) \left(-\frac{z_0^3}{6} \right) \cos \left(\frac{z_0^3}{3} + \frac{z_0^3}{6} - \pi \right) \cos \theta + 3 \cdot 1 \left(-\frac{z_0^3}{6} \right) \left(\frac{z_0^3}{3} \right) \cos \left(-\frac{z_0^3}{3} - \frac{z_0^3}{6} + \pi \right) \cos \theta + 3 \cdot 3 \left(\frac{z_0^5}{6} \right) \left(\frac{z_0^5}{6} \right) \cos^2 \theta \right\}$$

$$= J_0 \frac{z_0^6}{9z_0^2} \left[1 + 3\cos \theta + \frac{9}{4} \cos^2 \theta \right]$$

$$= J_0 \frac{(\pi r_0^2)^2 z_0^4}{9\pi} \frac{3}{z^2} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right)^2$$

즉,

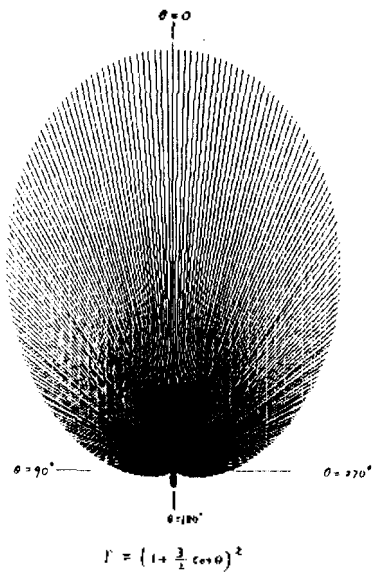
$$J_{sn} \cong J_0 \frac{(\pi r_0^2)^2 (2\pi)^2}{9\pi} \frac{r_0^4}{\lambda^2} \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)^4 \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right)^2 \quad (28)$$

여기서 $J_0 = p_0^2/2\alpha c$ 는 입사공파의 강도이다. (28)로부터 알 수 있는 것은 산란파의 강도는 단파상의 빛 즉, 푸른 색깔의 광선이 지배적으로 기여함을 알 수 있다. (28)에서 r 는 지상에서 산란을 일으키는 분자까지의 먼거리이며, r_0 는 산란을 일으키는 대기의 산소나 질소의 분자의 크기(반경)이며, λ 는 광선의 파장이다. 태양광선의 가시광선의 파장과 그 색깔과 산란파의 강도비율 아래에 표시한다.

| 파장 (Å) | 평균 (Å) | 색깔 | 산란파의 강도비 |
|-----------|--------|--------------|------------------------|
| 3800-4200 | 4000 | violet | $(4000/4000)^4 = 1.00$ |
| 4200-4500 | 4350 | blue violet | $(4000/4350)^4 = 0.71$ |
| 4500-4800 | 4650 | blue | $(4000/4650)^4 = 0.55$ |
| 4800-5100 | 4950 | blue green | $(4000/4950)^4 = 0.43$ |
| 5100-5500 | 5300 | green | $(4000/5300)^4 = 0.32$ |
| 5500-5700 | 5600 | yellow green | $(4000/5600)^4 = 0.26$ |
| 5700-5900 | 5800 | yellow | $(4000/5800)^4 = 0.23$ |
| 5900-6000 | 5950 | orange | $(4000/5950)^4 = 0.20$ |
| 6000-6300 | 6150 | red orange | $(4000/6150)^4 = 0.18$ |
| 6300-7500 | 6900 | red | $(4000/6900)^4 = 0.11$ |
| | | | sum = 3.99 |

그러므로 푸른색으로 보이는 범위는 violet 에서 green 까지 강도의 비의 합이 3.01 ; 전체의 합은 3.99 ; 따라서 푸른색 보이는 부분이 전체의

$$\frac{3.01}{3.99} = 0.75 = 75 \%$$



즉 대기를 구성하는 산소나 질소분자에 산란되는 전가시광선중 75% 가 푸른색으로 보인다. 다시 말해서 하늘은 푸르게 보일 수 밖에 없다! 다음은 한 분자(강성구)에 광파가 산란되어, 그 강도는 왼쪽 그림과 같이 된다. 여기서 상방은 전상의 방향이고, 하방은 지구 쪽을 가리킨다. 대부분의 광파가 전상으로 산란해서 (Scattering Back), 아주 적은 양만 지구 쪽으로 푸른색의 광이 내려올 따름이다. 이것이, 더욱, 여러 산란층을 통과하여 오기 때문에 자상에서 보는 하늘은 더욱 푸르게 보이게 된다.