

이산시간 선형 시스템의 출력 시간지연을 이용한  
최적 출력제어

정철환, 함창식  
한국에너지연구소

Optimal Output-feedback Control for Discrete-time  
Linear System with Time-delayed Output

Jung Chul Hwan, Ham Chang Shik  
KAERI

(Abstract)

This paper proposed the new control law which is defined by instantaneous output and time delayed output. To analyze the system with time delayed output, the way which transforms output time delayed systems into instantaneous output systems is presented. The output responses were more improved by the new control law than that of the instantaneous output control law. The algorithm for simulation and a numerical example are presented.

서론

일반적으로 공정제어에서 입출력간의 시간지연이 있는 시스템은 그 해석이 복잡하고 제어가 어렵다. 그러나 시간지연을 역으로 이용하여 시스템의 응답특성을 개선시키는 연구 결과가 발표되고 있다. 1-4)

Jonson 등은 초기상태를 임의벡터(random vector)로 모델화 시키고 그외에는 시스템이 결정적인(deterministic) 이라는 고정형태 제어기(optimal fixed configuration controller)를 제한한후 최적출력 제한 제어기 이론은 1982년 Kabamba, 1985년 Cheok 및 1986년 Kaczorek 등에 의하여 계속발전 되어왔다. 5-7) 그러나 지금까지 이론은 순간출력제한에 대한 것이 대부분이다 본 논문에서는 순간출력에 시간지연이 있는 출력을 첨가시킨 새로운 제어법칙과 제안된 시스템을 해석하기 위하여 시간지연이 없는 시스템으로 변환하는 방법도 제시하였다. 이 제어법칙은 순간제한 제어법칙보다 시스템의 응답특성을 개선시킬수 있었음을 컴퓨터 시뮬레이션으로써 그 일례를 들어 확인하였다.

본문

이산시간이면서 시불변 선형시스템은 다음과 같이 표시된다.

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \text{ -----(1)}$$

$$Y(k) = CX(k) \text{ -----(2)}$$

여기서 X(k)는 (n\*1) 상태벡터이고, U(k)는 (r\*1) 제어 벡터이며, Y(k)는 (m\*1) 출력벡터이다. A는 (n\*n) 행렬, B는 (n\*r) 행렬, 그리고 C는 계수(rank) m을 갖는 (m\*n) 행렬이다. 순간 출력 제어 입력은 다음과 같다.

$$U(k) = F_0 Y(k) \text{ -----(3)}$$

시간지연 출력과 제어입력을 다음과 같이 정의할수 있다

$$Y(k) = C X(k) + V_1 Y(k-1) + \dots + V_n Y(k-n) \text{ --(4)}$$

$$U(k) = F_0 Y(k) + F_1 Y(k-1) + \dots + F_n Y(k-n) \text{ --(5)}$$

( n > 0, 정수 )

시간지연 요소를 지연이 없는 형태로 변환하기 위하여 상태벡터를

$$\hat{X}(k) \triangleq \begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k-1) \\ - \\ - \\ Y(k-n) \end{bmatrix} \text{ -----(6)}$$

와 같이 정의하면, 식(1)은 다음과 같이 변경된다.

$$\hat{X}(k+1) = \begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k) \\ - \\ - \\ Y(k-n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ C & V & \dots & V \\ 0 & I & 0 & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & - & - & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k-1) \\ - \\ - \\ Y(k-n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ - \\ - \\ 0 \end{bmatrix} U(k) \text{ --(7)}$$

여기서  $\hat{A}$  및  $\hat{B}$ 를 각각

$$\hat{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ C & V & \dots & V \\ 0 & I & 0 & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & - & - & 0 & I \end{bmatrix} \quad \hat{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ - \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ----- (8)}$$

로 두면 식(7)은

$$\hat{X}(k+1) = \hat{A}\hat{X}(k) + \hat{B}U(k) \text{ -----(9)}$$

로 된다. 또한  $\hat{Y}(k), \hat{C}$  및  $\hat{F}$ 를 각각

$$\hat{Y}(k) \triangleq \begin{bmatrix} Y(k) \\ Y(k-1) \\ - \\ - \\ Y(k-n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & V & \dots & V \\ 0 & I & 0 & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & - & - & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k-1) \\ - \\ - \\ Y(k-n) \end{bmatrix} \text{ ----(10)}$$

$$U(k) = [ F_0 F_1 \dots F_n ] \begin{bmatrix} Y(k) \\ Y(k-1) \\ - \\ - \\ Y(k-n) \end{bmatrix} \text{ -----(11)}$$

$$\hat{C} \triangleq \begin{pmatrix} C & V & \dots & V \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I \end{pmatrix}, F \triangleq [F_0, F_1, \dots, F_n] \quad (12)$$

로 두면

$$\hat{Y}(k) = \hat{C}\hat{X}(k) \quad (13)$$

$$U(k) = \hat{F}\hat{Y}(k) \quad (14)$$

이 된다. 식 (9), (13) 및 (14)는 시간지연이 없는 형태로 변환된 시스템방정식이다. 시스템이 페루프 시스템인 경우

$$\hat{X}(k+1) = (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})\hat{X}(k) \quad (15)$$

가 된다. 이산시간 시스템의 성능지수(performance index) J는

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{X}(k)' Q \hat{X}(k) + U(k)' R U(k) \quad (16)$$

단, Q: Symmetric positive semi-definite matrix  
R: Positive definite matrix

로 표시된다. 8) 따라서 식 (15)에 대한 성능지수는

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{X}(k)' (Q + \hat{C}' \hat{F}' R \hat{F} \hat{C}) \hat{X}(k) \quad (17)$$

로 된다. 페루프에서 응답특성이 최적의 의미를 갖기 위해서 식 (15)는 점근적으로 안정하다고 가정한다. 그리고 식 (17)을 임의의 초기상태  $x_0$ 로 표시하면

$$J = x_0' L x_0 \quad (18)$$

$$L = (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})' L (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C}) + Q + \hat{C}' \hat{F}' R \hat{F} \hat{C} \quad (19)$$

로 표시된다. 9)

여기서 J는  $x_0$ 에 비독립적이므로, 독립적으로 만들기 위하여  $x_0$ 를  $x_0$ 의 초기치  $E(x_0)$ 의 확률벡터로 가정하면

$$E(x_0 x_0') = X_0$$

가 되고, J는  $x_0$ 와 독립적인 J의 기대치  $J_0$ 로 대치할 수 있다.

$$E(J) \triangleq J_0 = E(x_0' L x_0) = \text{trace}(L X_0) \quad (20)$$

최적 응답특성을 얻기 위한 성능지수  $J_0$ 는 페루프 변환이득행렬  $\hat{F}$ 의 함수이며 따라서  $J_0$ 를 최소화 하는  $\hat{F}^*$ 을 구하여야 한다.  $\hat{F}$ 는 임의의 행렬  $\hat{F}$ 에 대하여

$$J_0(\hat{F}^*) \leq J_0(\hat{F}) \quad (21)$$

를 만족시킨다.  $\hat{F}$ 가 식 (19)와 (20)을 동시에 만족시키면서  $J_0$ 를 최소화 하기 위하여는 식 (19)와 (20)을 하나의 식으로 만들어야 한다. 이를 위해 Lagrange multiplier를 이용하면, Langrangian  $\phi$ 는

$$\phi = \text{tr} L X_0 + \text{tr} \{ (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})' L (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C}) + Q + \hat{C}' \hat{F}' R \hat{F} \hat{C} - L \} \Lambda^{-1} \quad (22)$$

단,  $\Lambda^{-1}$ 은 Langrange multiplier로  $(n \times n)$ 행렬이다.

로 표시된다. 10)

따라서  $J_0$ 를 최소화하기 위해서는  $\phi$ 가 최소로 되어야 한다. 이의 필요조건은

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{F}} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} = 0 \quad (23)$$

로 주어지며, 이들은 식 (22)로 부터

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{F}} = 2[B'L(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})\Lambda^{-1}\hat{C}' + R\hat{F}\hat{C}\Lambda^{-1}\hat{C}'] = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial L} = X_0 + (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})\Lambda(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})' - \Lambda = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} = (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})' L (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C}) + Q + \hat{C}' \hat{F}' R \hat{F} \hat{C} - L = 0 \quad (26)$$

로 된다.

지금까지의 결과로써 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다

<정리 1>  $(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})$ 가 점근적으로 안정한 행렬이라면,  $\hat{F}^*$ 가 식 (21)의 개념에서 최적이 되기 위한 필요조건은 다음 식을 만족하는 해이다.

$$\hat{F}^* = -(R + \hat{B}' L \hat{B})^{-1} \hat{B}' L \hat{A} \hat{C}' (\hat{C} \hat{A} \hat{C}')^{-1} \quad (27)$$

$$L^* = (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})' L^* (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C}) + Q + \hat{C}' \hat{F}' R \hat{F} \hat{C} \quad (28)$$

$$\Lambda^* = (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C}) \Lambda^* (\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})' + X_0 \quad (29)$$

<정리 2>  $(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C})$ 가 점근적으로 안정한 행렬이 되게 하는  $\hat{F}$ 가 존재하면  $J_0(\hat{F})$ 를 최소화시키는  $\hat{F}^*$ 가 존재한다

컴퓨터 시뮬레이션 및 결과

궤환이득  $\hat{F}^*$ 행렬과  $J_0(\hat{F}^*)$ 를 구하는 컴퓨터 시뮬레이션 알고리즘은 다음과 같다.

- 1) A, B, C 및  $X_0, Q, R$ 을 정한다.
- 2)  $P = (A + BF, C)$ 가 점근적으로 안정한  $F_0$ 를 구한다.
- 3)  $i=1$ 로 두고 다음 방정식을 푼다.  

$$L(i) = (A + BF(i-1))' L(i) (A + BF(i-1)C) + Q + C' F' * (i-1) R F(i-1) C$$

$$\Lambda(i) = (A + BF(i-1)C) \Lambda(i) (A + BF(i-1)C)' + X_0$$
- 4)  $J_0 = \text{tr} L(i) X_0$ 를 계산하고  $J_0$ 값이 최적이면 그만 두고 그렇지 않으면
- 5)  $F(i) = -(R + B' L(i) B)^{-1} B' L(i) A (i) C' (C A(i) C')^{-1}$ 를 계산한다.
- 6)  $(A + BF(i)C)$ 가 점근적으로 안정하다면  $i=i+1$ 로 두고 3)의 계산과정을 반복하고 그렇지 않으면 그만둔다.

위와 같은 알고리즘을 적용하기 위하여 먼저 다음과 같은 시간지연이 없는 시스템을 생각한다. 즉,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-2, -1]$$

이고, 이 시스템의 해석에 필요한 임의값  $X_0, Q, R$  및  $F_0$ 를

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad F_0 = 0.2$$

로 각각 주었을 경우 최적 성능지수  $J_0(\hat{F}^*)$ , 최적화된 궤환행렬  $\hat{F}^*$  및 안정시간  $T_s$ 는 각각

$$J_0(\hat{F}^*) = 1.6335, \quad \hat{F}^* = -0.138, \quad T_s = 4.7 \text{sec}$$

였다.

다음으로 시간지연이 있는 시스템을 생각한다. 지연 시스템의 출력과 제어입력을 각각

$$y(k) = CX(k) + VY(k-1) \\ u(k) = EY(k) + FV(k-1)$$

로 두면 지연시스템의 A, B 및 C는 아래와 같이 표시된다. 즉,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -2 & -1 & V_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & V_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그리고  $Q = \text{diag}[1 \ 1 \ 1]$ ,  $X_0 = \text{diag}[5 \ 1 \ 1]$   
 $R = 1, \quad F_0 = 0.2, \quad F_1 = 0.0$

로 각각 두었을 때, 지연시스템의  $J_s(F^*)$ ,  $T_s$  및  $F_s^*$ 은 Table 1. 과 같았다. 본시스템의 자수가 증가된 시스템이므로  $J_s(F^*)$ 는 원래시스템보다 약 5배로 증가되었으나, 안정시간은 원래시스템의 것 대비해 약 10배 이상 개선되었음을 알 수 있다. 또한 변환되는 정보량이 많을 수록 시스템의 성능지수가 작아짐으로 시스템의 성능이 향상됨을 알 수 있으나, 실제 시스템에서는 최대값이 제한 받는다.

Table 1. Satling time( $T_s$ ), performance index & feedback gain  $F_s^*$  of the time delayed system

$-V_1$	$T_s$ (sec)	$J_s(F^*)$	$F_s^*$	$F_s^*$
2	4.2	21.0569	-0.108	-0.144
4	2.8	8.8758	-0.044	-0.121
6	2.2	6.7889	-0.07	-0.149
8	1.7	5.6120	-0.034	-0.218
10	1.35	5.0711	-0.034	-0.290
12	1.15	5.5525	-0.034	-0.363
14	0.95	5.5391	-0.034	-0.437
16	0.84	5.5330	-0.035	-0.510
18	0.75	5.5298	-0.035	-0.556
20	0.67	5.5243	-0.035	-0.730
22	0.62	5.5216	-0.035	-0.803
24	0.56	5.5193	-0.035	-0.876
26	0.52	5.5180	-0.035	-0.949
28	0.49	5.5170	-0.036	-1.023
30	0.45	5.5161	-0.036	-1.096
32	0.42	5.5153	-0.036	-1.174
34	0.39	5.5147	-0.036	-1.242
36	0.37	5.5142	-0.036	-1.315
38	0.34	5.5138	-0.036	-1.388
40	0.32	5.5134	-0.036	-1.461

Fig.1 및 2는 각각 Table의 변환량에 따른 성능지수 및 안정시간의 개선정도를 나타낸다.

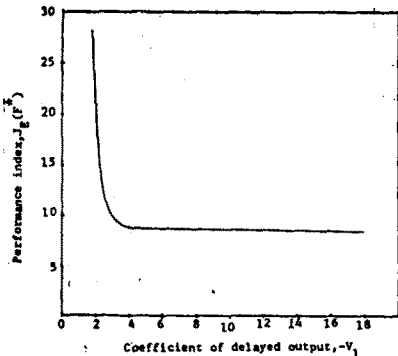


Fig.1 Performance index versus coefficient of delayed output

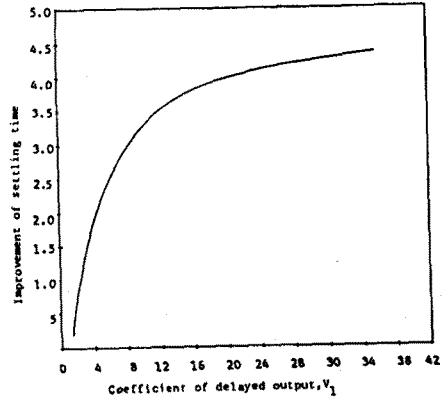


Fig.2 Improvement of settling time versus coefficient of delayed output

본 논문에서 제안한 시간지연이 있는 시스템을 시간지연이 없는 시스템으로 변환하는 방법을 이용하면 시스템 자체에 시간지연이 있는 경우에도 시간지연이 없는 시스템으로 변환가능 하리라 생각되며, 출력 시간지연을 참가 시켜서 응답특성을 개선시킬 수 있으리라 생각한다.

결론

본 논문에는 순간출력에 시간지연이 있는 출력을 참가시킨 새로운 제어법칙을 제안하였다. 제안된 시스템을 해석하기 위하여 시간지연이 없는 시스템으로 변환하는 방법도 제시하였다. 여기서 이 제어법칙은 순간제한 제어법칙보다 시스템의 응답특성을 개선시킬 수 있었음을 컴퓨터시뮬레이션으로써 그 일 예를 들어 확인하였다. 본 논문에는 제안된 시간지연이 있는 시스템을 시간지연이 없는 시스템으로 변환하는 방법을 이용하면, 시스템자체에 시간지연이 있는 경우에도 시간지연이 없는 시스템으로 변환가능하리라 생각되며, 다시 출력시간지연을 참가시켜서 응답특성을 개선시킬 수 있으리라 생각한다.

참고문헌

1. J.E. Marshall, and S.V. Salahi, Improvement of system performance by the of time-delay elements, IEEE proc. Vol. 129 pt. D., No. 5:177-180, September, 1982
2. A.T. Bahill, A simple adaptive Smith-predictor for controlling time delay system, IEEE contr. syst. Mag.: 16-22, 1983
3. D. Salaman, On controllability and observability of time delay system, IEEE Trans Automat Contr., AC-29, No. 5:432-439, 1984
4. E.W. Kamen, Khargonekar & A. Tannenbaum, Stgbilization of time delay system using finite dimensional compasator, IEEE Trans. Automat Contr., AC-30, No. 1:75-78, 1985

5. P.T. Kabamba, Exact pole assignment using direct or dynamic output feedback, IEEE Trans. Auto. Control, AC-27, No. 6:1244-1246, 1982
6. K.C. Cheok, N.K. Loh, and M.A. Zohdy, Discrete time optimal feedback controllers with time-multiplied performance indexes, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-30, No. 5:494-496, 1985
7. T. Kaczorek, Deadbeat control of linear discrete-time systems by periodic output feedback, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-31, No. 12:1153-1156, 1986
8. Kirk, D.E., Optimal control theory, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.
9. J. O'Reilly, On the design of discrete optimal dynamical controllers using a minimal order observer, Int. J. Control. Vol. 23, No. 2:257-275, 1976.
10. Kirk, D.E., Optimal control theory, Prentice-Hall, Inc., 1970.