

로봇 매니퓰레이터의 시변 지연 시간을 고려한
분산 감소 임플리시트 자기동조 알고리즘

이희진 박민용 이상배
연세대학교 전자공학과

Reduced variance implicit self tuning algorithm
with variable time-delays for robot manipulator

Hee-Jin Lee, Mignon Park and Sang-Bae Lee
Dept. of Electronics, Yonsei University

A B S T R A C T

A controller described in this paper is designed for implicit generalised minimum variance controller with variable time-delays in which the weighting polynomials are calculated to reduce the output and control signals variances.

This paper is based on the fact that the pole assignment equation may have multiple solutions if the weighting polynomials are not of minimal order.

It is shown that the larger order of the weighting polynomials increment the better is the stochastic behavior of the closed loop system with variable time delays without changes in the deterministic behavior of the system.

Based on this theory, the controller is applied to position control of a three-link manipulator with parameter uncertainty.

1. 서론

적응제어란 시스템의 동특성이 변하는 경우, 그러한 변화에 적응시키는 제어방법을 말하며 자기동조제어와 모델기준 적응제어로 나누며 자기동조제어는 최소분산 제어와 극점 배치 자기동조제어로 구분된다. 일반화된 최소분산제어는 현대제어이론, 제어 입력과 시스템 출력을 포함한 손실함수를 줄이기 위한 가중치 다항식을 사용한다. 이러한 손실함수의 가중치 다항식이 최소차가 아닌 경우엔 극점 배치 방정식은 많은 해를 갖게 된다.

본 논문에서는 시스템의 제어 입력과 출력의 분산이 큰 경우에 극점 배치 방정식의 해를 풀기 위한 새로운 기준을 설정하고 손실함수의 가중치 다항식 차수를 증가시킴으로써 제어 입력과 출력의 분산을 줄이며 최소, 최대 지연 시간을 추정하지 않고 실제 보다 적은 1-단계 예측기를 사용하여 시변 지연 시간을 유도하고 시뮬레이션을 통하여 확인한다.

2. 일반화된 최소분산제어 법칙

시불변 단일 입력, 단일 출력 시스템은 다음 식을 만족한다고 가정한다.

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-k}B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})e(t) \quad (2.1)$$

단,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m} \quad (b_0 \neq 0)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_nz^{-n}$$

여기서 $u(k), y(k)$ 는 시스템의 입력과 출력이며 $e(t)$ 는 평균이 "0" 이고 분산이 σ^2 인 백색잡음이다. 손실함수는 다음 식으로 주어진다.

$$I = E \{ (P(z^{-1})y(t+k) - R(z^{-1})w(t))^2 + (Q(z^{-1})u(t))^2 \} \quad (2.2)$$

여기서 $P(z^{-1}), Q(z^{-1})$ 와 $R(z^{-1})$ 은 z^{-1} 로 이루어진 가중치를 나타내는 다항식이고 $w(t)$ 는 기준치 신호이다.

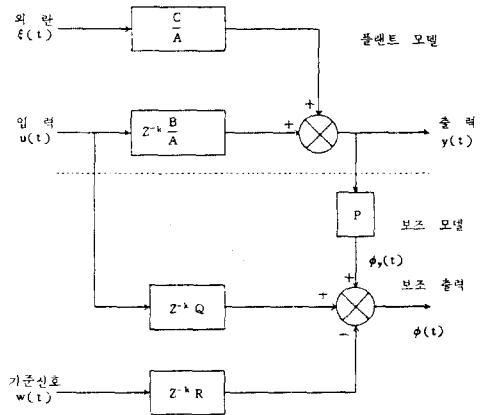
식 (2.2)를 최소화하는 것은 다음의 손실함수를 최소로 하는 경우와 같은 제어 법칙을 얻는다.

$$I = E \{ \phi^2(t+k) \} \quad (2.3)$$

여기서

$$\phi(t+k) \triangleq P(z^{-1})y(t+k) + Q(z^{-1})u(t) - R(z^{-1})w(t) \quad (2.4)$$

$$Q(z^{-1}) \triangleq \frac{q_0}{b_0} Q'(z^{-1}) \quad (2.5)$$



[그림 2-1] 플랜트와 보조함수 $\phi(t)$ 의 구조
그림 (2-1)에 식 (2.4)의 보조함수와 플랜트의 구조를 나타내었다.

식 (2.1)과 식 (2.4)로 부터

$$\phi(t+k) = \frac{1}{C} \{ Hu(t) + Gy(t) + Ew(t) \} + Fec(t) \quad (2.6)$$

를 얻을 수 있으며 손실함수가 최소가 되기 위해서는 다음 식을 만족해야 한다.

$$Hu(t) + Gy(t) + Ew(t) = 0 \quad (2.7)$$

윗 식으로부터 제어 입력 $u(t)$ 를 얻는다.

$$u(t) = -\frac{G}{H}y(t) - \frac{E}{H}w(t) \quad (2.8)$$

여기서

$$H \triangleq BF + QC \quad (2.9)$$

$$E \triangleq -CR \quad (2.10)$$

다항식 F, G 는

$$PC = FA + z^k G \quad (2.11)$$

로부터 얻을 수 있으며 F, G 의 차수는 $\max(k-1, n_p - n_c - d)$, $\max(n_a - 1, n_p - n_c - d)$ 이다.

여기서 n_a, n_c, n_p 는 $A(z^{-1}), C(z^{-1}), P(z^{-1})$ 의 차수이다.

가중치 다항식 P, Q, R 을 다음과 같이 정의 함으로써 시스템 변수를 P, Q, R 과 무관하게 얻을 수 있으며 이러한 변수들이 수렴하게 된다.

$$P(z^{-1}) = 1 + z^{-k} p^*(z^{-1}) \quad (2.12)$$

$$Q(z^{-1}) = (1 - z^{-1}) q^*(z^{-1}) \quad (2.13)$$

$$R(z^{-1}) = p(z^{-1}) \quad (2.14)$$

여기서 $p^*(z^{-1}), q^*(z^{-1})$ 의 차수는 각각 n_{pa}, n_{qa} 이다. 식(2.1), 식(2.9), 식(2.10), 식(2.11), 식(2.12), 식(2.13)을 이용하여 폐 회로 방정식을 얻을 수 있다.

$$y(t) = \frac{z^{-k} BR^* W(t)}{B(1+z^{-k}P^*) + A(1-z^{-1})Q^*} + \frac{H}{B(Hz^{-k}P^*) + A(1-z^{-1})Q^*} e(t) \quad (2.15)$$

$$u(t) = \frac{AR W(t)}{B(1+z^{-k}P^*) + A(1-z^{-1})Q^*} - \frac{G}{B(Hz^{-k}P^*) + A(1-z^{-1})Q^*} e(t) \quad (2.16)$$

이다.

3. 시변 지연시간을 갖는 시스템의 제어

시스템 지연시간을 정확히 모르거나, 시간에 따라 가변적일 경우, 일반적으로 지연시간을 실제시간보다 약간 큰 값(K)으로 두어, K 단계 이후 예측기를 사용하게 되는데 이것은 K_p 가 실제 지연시간 K_p 보다 약간 큰 경우는 안정되나 올바른 개계변수 추정이 어렵고, 차이가 큰 경우는 추정된 파라미터 값이 원래의 값에서 벗어나게 되어 안정되지 못하게 된다. 이와 같은 지연시간 K_p 가 크게 변하는 시스템에 대해서 K_p 를 별도로 추정하거나 익스포지티브한 알고리즘을 사용하는 방법이 있는데 이것은 계산 시간을 요하는 단점이 있다.

지연시간이 변화하는 경우의 일반화된 해결책은 모든 채널 중 최소 지연시간 ($1 \leq K_{pmin}$) 보다 적은 l 에 대하여 예측기를 구성함으로써 가능하다. 보조 시스템 출력 벡터 함수 (1) 는 다음과 같이 정의 한다.

$$\Phi(t) = P(z^{-1})y(t) + Q(z^{-1})u(t-l) - R(z^{-1})w(t-l) \quad (3.1)$$

여기서, $1 \leq l \leq K_{pmin}$ 지연시간을 갖는 자기동조 알고리즘은 다음과 같이 구성된다.

(1) $\Phi(t) = P(z^{-1})y(t) + Q(z^{-1})u(t-l) - R(z^{-1})w(t-l)$ 의 구성

(2) 파라미터의 추정 $\hat{\Phi}(t) = p(z^{-1})y(t) = c(z^{-1})[G(z^{-1})y(t-l)$

$$+ z^{-(k-l)}F(z^{-1})B(z^{-1})u(t-l)] + F(z^{-1})e(t) \quad (3.2)$$

(3) 제어입력 $u(t)$ 의 계산

$$H(z^{-1})u(t) + G(z^{-1})y(t) + E(z^{-1})w(t) = 0 \quad (3.3)$$

여기서, 제이기 다항식 행렬은

$$H(z^{-1}) = z^{-(k-l)}F(z^{-1})B(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1}) \quad (3.4)$$

$$E(z^{-1}) = -C(z^{-1})R(z^{-1}) \quad (3.5)$$

$$P(z^{-1})C(z^{-1}) = F(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-l}G(z^{-1}) \quad (3.6)$$

이다.

식(3.3), 식(3.4), 식(3.6)을 이용하여 폐회로 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$Y(t) = \frac{BR}{AQ + z^{-(k-l)}B_p} W(t - k_p) + \frac{H}{AQ + z^{-(k-l)}B_p} e(t) \quad (3.7)$$

$$u(t) = \frac{AR}{AQ + z^{-(k-l)}B_p} W(t) + \frac{G}{AQ + z^{-(k-l)}B_p} e(t) \quad (3.8)$$

4. 시변 지연시간을 고려한 가중치 다항식 결정에 관한 알고리즘

식(2.12), 식(2.13), 식(3.7)을 이용하여 폐회로 극점들을 다음의 대수 방정 식으로 부터 얻을 수 있다.

$$z^{-(k-l)}B(1+z^{-k}P^*) + A(1-z^{-1})Q^* = 0 \quad (4.1)$$

윗 식은 폐회로 극점들이 P^*, Q^* 의 선택에 달려있음을 보여주며 바람직한 폐회로 극점을 설정함으로써 P^*, Q^* 을 구할 수 있다.

즉, 설정된 극점들이 $T(z^{-1}) = 0 \quad (4.2)$

에 의해 주어진다면 다항식 P^*, Q^* 는 다음식을 통하여 구할 수 있다. [4]

$$z^{-(k-l)}B(1+z^{-k}P^*) + A(1-z^{-1})Q^* = h_0 T \quad (4.3)$$

또는, $z^{-k}BP^* + A(1-z^{-1})Q^* = h_0 T - z^{-(k-l)}B \quad (4.4)$

식(4.4)의 양변에 F 를 곱하면, $z^{-k}BF P^* + AF(1-z^{-1})Q^* = h_0 T F - z^{-(k-l)}BF \quad (4.5)$

이것은 다음과 같이 표현된다. $z^{-k}BF P^* + DQ^* = h_0 T F - z^{-(k-l)}BF \quad (4.6)$

여기서 $AF = C - z^{-l}G^* \quad (4.7)$

$$D = (C - z^{-l}G^*)(1 - z^{-1}) \quad (4.8)$$

$$G^* = G - P^*C \quad (4.9)$$

이다. P^*, Q^* 의 차수를 다음과 같이 정의함으로써 식(4.4)를 구할 수 있다. $n_{pa} \geq n_a, n_{qa} \geq n_b + d - 1$. 단일 해를 구하기 위해

$$n_{pa} \geq n_a, n_{qa} \geq n_b + k_p - 1$$

로 정의한다.
또한,

$$m_{pa} = m_a + m_1, \quad m_{pb} = m_b + k_p - 1 + m_2$$

로 됨으로써 다른 해를 얻을 수 있다.
 $m_1 = m_2$ 이면 P, Q 의 가장 큰 차수의 계수 즉, $|m_1 - m_2|$ 의 계수는 0 이다. 그러므로 $m_1 = m_2 = m$ 으로 설정 한다. 여기서 m 은 다항식 P, Q^* 차수의 증가를 나타내며 식(4.4)의 해를 구할 때 방정식 자유도의 수이다. $m > 0$ 일 때 많은 해 중에서 제어 입력과 출력의 분산의 선형결합을 최소화 하는 해가 존재하게 된다.

$$\min_{P, Q} \Delta = \alpha_1 \sigma_{y^*}^2 + \alpha_2 \sigma_{x^*}^2 \quad (4.10)$$

여기서 α_1, α_2 는 $[0, 1]$ 사이의 양실수 이다. 식(4.10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다. [5]

$$\min_x x^T V x + 2W^T x + E \quad (4.11)$$

$$\text{s. t. } Mx = l \quad (4.12)$$

식(4.11)의 최소값을 얻기위해 Lagrange Multiplier 을 이용한다.

$$L(x, \lambda) = x^T V x + 2W^T x + E + 2\lambda^T (Mx - l) \quad (4.13)$$

여기서 최적화 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2Vx + 2W + 2M^T \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Mx - l = 0$$

또는,

$$\begin{bmatrix} V & M^T \\ M & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W \\ -l \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

제안된 알고리즘의 절차는 다음과 같다.

- (1) 초기화 : n_a, n_b, n_c, k_p, l
RLS 알고리즘의 초기치
 m, α_1, α_2, T
- (2) 출력 y 의 계산
- (3) 식(3.2)로 부터 $\hat{G}, \hat{B}, \hat{C}$ 를 RLS 알고리즘으로 부터 계산
- (4) 식(4.14)를 다소 수정하여 P, Q^* 을 계산
- (5) 식(3.4), 식(3.5), 식(3.6)으로 부터 G, H, E 를 계산
- (6) 식(3.3)으로 부터 제어입력 u 의 계산
- (7) (2) ~ (6) 단계를 반복

5. 시뮬레이션 및 결과고찰

제안된 알고리즘의 타당성을 보이기 위하여 다음과 같은 시스템을 모델로 사용하였다. [5]

$$y(t) = A1 * y(t-1) - Z^{-k_p} * B0 * u(t) + e(t) + C1 * e(t-1)$$

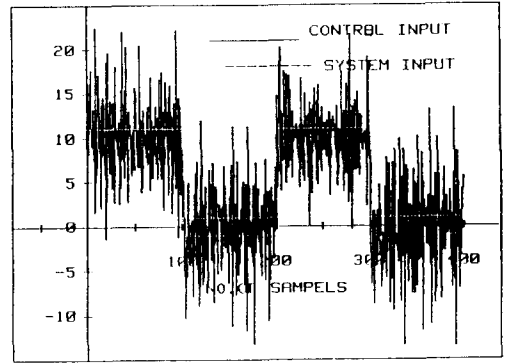
$A1 = -0.93, \quad B0 = 0.072, \quad C1 = -0.92$

원하는 특성 다항식은

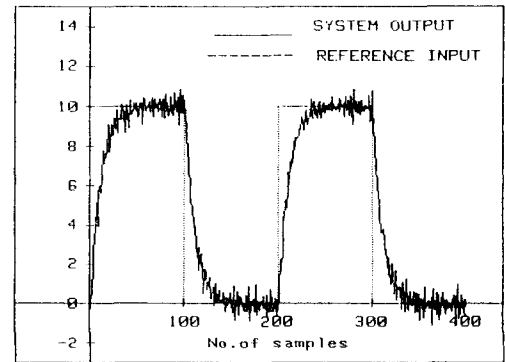
$$T(Z^{-1}) = 1 - 0.91 * Z^{-1}$$

이 고 지연시간은 $K_p = 5$ 에서 $K_p = 2$ 로 (200번째 샘플에서) 변화시켰으며 $l = 1$ 로 가정하였다.
제안된 제어 알고리즘을 사용한 결과를 일반적인 최소 분산 제어기와 비교하여 그림 (5-1) ~ 그림 (5-4)에 나타내었다.

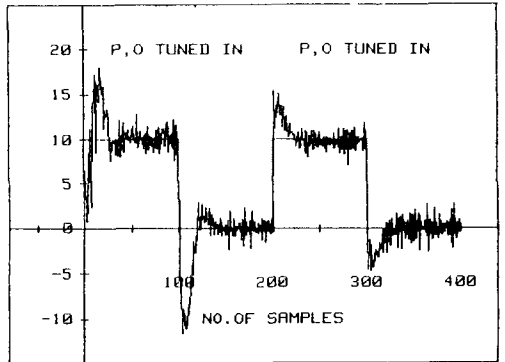
시뮬레이션 결과는 일반적인 최소 분산 제어기에 비하여 제안된 알고리즘이 제어 입력과 출력 분산을 줄이면서 지연 시간에 잘 적응함을 알 수 있다.



[그림5 1] 일반적인 최소분산 제어기를 사용한 경우 기준신호와 입력신호



[그림5 2] 일반적인 최소분산 제어기를 사용한 경우 기준신호와 출력신호

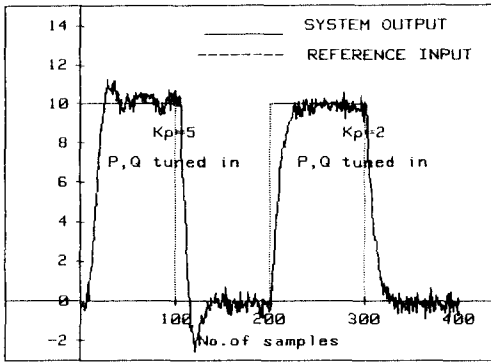


[그림5-3] 제안된 알고리즘을 사용한 경우 기준신호와 입력신호

6. 결론

시스템의 실제 지연 시간보다 작은 $l - 1$ 단계 이후 예측기를 사용하여 시변 지연 시간을 갖는 시스템에 대한 제안된 적응 제어 알고리즘을 제시하여 시스템의 변화없이 제어입력과 출력의 분산이 감소함을 보였다.

본 논문은 가중치 다항식 P^*, Q^* 의 차수를 증가 시킴으로써 제어입력과 출력의 분산을 줄이기 위한 것으로 P^*, Q^* 의 차수를 증가시키면 분산이 작아짐을 알 수 있으며 시스템이 불안정한 경우에도 제어가 가능하다.



[그림5-4] 제안된 알고리즘을 사용한 경우 기준신호와 출력신호

제안된 알고리즘을 로봇 매니플레이터에 적용함으로써 위치 제어가 가능하리라 본다.

REFERENCE

1. K.J. ASTROM, and B. WITTENMARK, " On self tuning regulators," Automatica, 1973, 9, (2), pp.185-199
2. A.Y. CLARKE, and P. GAWTHROP, "A self-tuning controller," Proc. IEEE, 1975, 122, (9), pp.929-934
3. M.B. ZARROP, and M. FISHER, "Reduced variance pole-assignment self-tuning regulation," Int. J. Control, 1985, 42, pp.1013-1033
4. A.Y. ALLIDINA, and F.M. HUCHES, "Generalized self-tuning controller with pole assignment," IEEE Proc. D, Control Theory & Appl., 1980, 127, (1), pp.13-18
5. R.S. MENDES, L.G. LATRE, and W.C. AMARAI, "Determination of weighting polynomials in generalised minimum variance controllers," IEE Proc., Vol. 135, No. 1, 1988, pp.21-27
6. A.Y. ALLIDINA, F.M. HUCHES, and T. TAHMASSEBI, "An implicit self-tuning technique for processes with variable time delay," Int. J. Control, Vol. 44, No. 5, 1986, pp.1437-1457