

유연성을 갖는 매니퓰레이터의 Quadratic-최적제어

박 화 세 배 준 경 남 호 범 박 중 국
경희대학교 전자공학과

THE QUADRATIC OPTIMAL CONTROL OF FLEXIBLE MANIPULATOR

Hee Seon Park, Jun Kyung Bae, Ho Pub Nam, Chong Kuk Park
Kyung Hee University

ABSTRACT

The analytical studies and applicability of the implementation of the controller for the simple flexible arm studied and discussed in this thesis with the goal of developing flexible manipulator arm control. Minimum-time position control and quadratic-optimal control are investigated in this thesis. Its validity has been established using numerical simulations.

1. 서 론

지난 10 여년동안 제어시스템의 이론과 실제에 있어 많은 진보는 컴퓨터 기술의 응용에 기인하였으며, 이들 이론들중의 하나가 매니퓰레이터 팔과 로봇이며, 특별하게 지난 몇년동안에 로봇의 인기는 급속도로 증가하였다.

일반적으로 로봇 분야에 대부분의 연구중의 하나가 로봇의 비용을 줄이면서 어떤 제약 조건아래 동일한 Payload의 용량과 정확성을 유지하는 것이다. 매니퓰레이터의 비용을 줄이는 방법으로는 동일한 용량과 정확성을 유지하면서 각각의 구성 요소의 비용을 줄이는 것이며, 각각의 구성 요소들은 하나의 성분의 변화가 또 다른 성분에 영향을 미치므로 개별적으로 연구되는 것은 아니다. 예를들어 링크의 비용을 줄이는 경우 드라이브, 조인트, 구동기, 팔의 비용을 줄일 수 있으며, 반면에 제어기 설계에 따른 비용은 증가하게 된다. 이것은 매니퓰레이터 또는 산업용 로봇의 Compliance 와 Flexibility의 명확한 원인이 링크의 구조에 있기 때문이다.

본 논문에서는 이러한 유연성을 갖는 팔에 대한 제어기 설계의 응용성과 분석적인 연구가 설명되어 지며, 매니퓰레이터의 제어에 있어서 가장 중요하게 고려되어야 할 점은 섬세한 운동(fine motion)과 거친 운동(gross motion)의 제어에 이며, 또한 여행시간, 여행거리, 매니퓰레이터 팔의 변수, 에러분석, 구조적인 주파수와 강성사이의 관계이다. 본 논문에서는 최소시간 위치제어와 Quadratic-최적제어에 관하여 설명하였으며, 최소시간 위치제어는 주어진 최대의 입

력에 대해 가장 빠른시스템이며, 그러나 실질적인시스템을 실행하는경우, 많은 불이익이 나타나게된다. 즉, 실질적인 시스템을 제어하는 경우, switching time의 sensitivity와 compliance가 발생하게 되며, 정확한 시스템 모델이 요구되어진다. 본 논문에서는 이러한 불이익을 제거하기 위해 실질적인 제어기로서 Quadratic 최적제어기를 사용하였으며, 유연성을 갖는 매니퓰레이터에 있어서 Quadratic 최적제어는 제어루프를 closing 하기위해 완전한 상태 궤환이 요구되며, 모든 상태변수의 측정이 용이하지 않기 때문에 상태추정기가 요구되어진다. [1][2]

본 논문의 구성은, 2 장에서는 Lagrange 방정식과 가정된 모드 방법의 응용에 의해 역학적 시스템을 모델링 하여 보겠으며, 3 장에서는 최적제어기의 설계를 상태 추정기에 따라 설명하여 보겠으며, 4장에서는 시뮬레이션 결과및 고찰에 대해 서술해 보겠으며, 5 장에서는 결론에 대해 논하여 보겠다.

2 장 역학적 모델링

본 논문에서는 유연성을 갖는 매니퓰레이터 팔에 대해 Lagrang 방정식과 가정된 모드방법을 적용하여 모델화하였으며, [3] 그림 1에서 보여주는 것과 같이 빔의 구성은 pin-end 에서 회전관성과 free-end에서 payload의 관성을 갖는 Bernoulli-Euler 빔으로 구성하였다. 본 논문에서는 이러한 방법으로 제안된 모양의 역학 방정식을 모델링하여 보겠다.

일반적인 좌표계

$$[\vec{U}] = \begin{bmatrix} \vec{U}_x \\ \vec{U}_y \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{기준 좌표계[OXY]의} \\ \text{단위 벡터} \end{array} \quad \text{----(2.1)}$$

$$[\vec{U}] = \begin{bmatrix} \vec{U}_x \\ \vec{U}_y \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{기준 좌표계[OX1Y1]} \\ \text{의 단위 벡터} \end{array} \quad \text{----(2.2)}$$

단위벡터 $[\vec{U}]$ 는 다음과 같이 좌표계 OX1Y1에 따라 표현된다.

$$[\vec{U}] = [C][\vec{U}_1] \quad \text{----(2.3)}$$

여기서 $[C]$ 는 회전(roational) 천이 행렬이며,

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{----(2.4)}$$

기존 좌표계 [OX1Y1]에 따른, 점 P의 벡터의 위치는

$$\vec{R}_d = [\vec{U}_1] \begin{bmatrix} X1 \\ Y1 \end{bmatrix} = X1\vec{U}_{x1} + Y1\vec{U}_{y1} \quad \text{----(2.5)}$$

점 P의 벡터의 위치를 기존 좌표계[OXY]에 따라 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{R}_d = & [-\dot{\theta}X1\sin(\theta) - \dot{\theta}U1\cos(\theta) - \dot{U}1\sin(\theta)] \vec{U}_x \\ & + [\dot{\theta}X1\cos(\theta) - \dot{\theta}U1\sin(\theta) + \dot{U}1\cos(\theta)] \vec{U}_y \end{aligned} \quad \text{----(2.6)}$$

유연성 운동의 해는 시간에 종속적인 일반화된 좌표계와 급해진 허용가능한(admissible)함수의 선형결합이며, 다음과 같다.

$$U1(X1, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(X1) q1(t) \quad \text{----(2.7)}$$

여기서 ϕ_i 는 기하학적 경계조건을 만족하는 허용가능한 함수이며, $q_i(t)$ 는 일반화된 좌표계이다. 또한 유연성을 갖는 링크의 고차모드의 크기는 첫번째 모드에 비해 매우 작으며, [4] 그러므로 n 이 2를 갖는 경우 충분하고 정확하게 시스템을 표현할 수 있다.

$$U1(X1, t) = \phi_1(x1)q1(t) + \phi_2(x1)q2(t) \quad \text{----(2.8)}$$

여기서 ϕ_1 과 ϕ_2 는 직교하게 된다.

단순한 형태의 유연성을 갖는 팔의 운동에너지는 다음과 같이 쓸 수 있으며,

$$T = (1/2) \int_m \dot{\vec{R}}_d \cdot \dot{\vec{R}}_d \, dm + (1/2) \left[\dot{\vec{R}}_d \cdot \dot{\vec{R}}_d \right]_M + (1/2) I_o \dot{\theta}^2 + (1/2) J_p \left[\frac{\partial \dot{U}}{\partial X} \right]_{X=1}^2 \quad \text{----(2.9)}$$

여기서 첫번째항은 원점(O)에 따른 회전 빔의 운동에너지, 두번째항은 Payload 질량의 운동에너지, 세번째항은 회전 관성의 운동에너지, 네번째항은 빔이 유연성을 가질 때 Payload 질량의 운동에너지이다. 이러한 시스템의 위치 에너지는 중력의 효과와 빔의 강성으로 구성되어 있다. 위치 에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V = (1/2)mg1\sin(\theta) + Mgl\sin(\theta) + (1/2) \int_0^l EI (\partial^2 U / \partial X^2) dx \quad \text{----(2.10)}$$

여기서 첫번째항과 두번째항은 만약에 운동 평면이 수평이라면 무시되어진다. 마지막항은 빔이 구부러질 때 빔내에 저장된다.

역학 방정식은 다음과 같은 Lagrange 방정식에

대입 하므로써 구할 수 있으며,

$$d(\partial T / \partial \dot{q}_r) / dt - \partial T / \partial q_r + \partial V / \partial q_r = Q_r \quad r = 1, 2, \dots \quad \text{----(2.11)}$$

여기서 q_r 은 일반화된 좌표계, Q_r 은 일반화된 힘, T 는 운동에너지, V 는 위치에너지이다.

여기서는 수평운동만을 고려하며, 운동 에너지와 위치 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{R}_d \cdot \dot{\vec{R}}_d = & \dot{\theta}^2 X1^2 + \dot{\theta}^2 U1^2 + \dot{U}1^2 + 2\dot{\theta}U1X1 \\ T = & (1/2) \dot{\theta}^2 \int_m X1^2 \, dm + (1/2) \dot{\theta}^2 \int_m U1^2 \, dm \\ & + (1/2) \int_m \dot{U}1^2 \, dm + \dot{\theta} \int_m \dot{U}1 X1 \, dm \\ & + (1/2) M \dot{\theta}^2 l^2 + (1/2) \dot{\theta}^2 M U1^2 \\ & + (1/2) \dot{U}1^2 M + \dot{\theta} U1 l M + (1/2) I_o \dot{\theta}^2 \\ & + (1/2) J_p \phi_{1E}^2 q1^2 + \phi_{1E}' \phi_{2E}' q1 q2 J_p \\ & + (1/2) J_p \phi_{2E}^2 q2^2 \end{aligned} \quad \text{----(2.12)}$$

여기서 $\int X1^2 \, dm = J_o$
 $\int_m U1^2 \, dm$ 는 무시되어진다.
 $\int_m \dot{U}1 \, dm = (\dot{q}1^2 + \dot{q}2^2) m$
 $\int_m \dot{U}1 X1 \, dm = w1 q1 + w2 q2$

모드 형태(mode shape)은 다음과 같이 정상화 되어진다.

$$\begin{aligned} m &= \int_m \phi_i^2 \, dm = \int \phi_2^2 \, dm \\ w1 &= \int \phi_1 X1 \, dm \\ w2 &= \int \phi_2 X1 \, dm \end{aligned}$$

각각의 항들을 대입하여 운동 에너지를 다시 서보면, 다음과 같으며

$$\begin{aligned} T = & (1/2) \dot{\theta}^2 J_o + (1/2) m [\dot{q}1^2 + \dot{q}2^2] \\ & + \dot{\theta} [w1 \dot{q}1 + w2 \dot{q}2] + (1/2) M l^2 \dot{\theta}^2 \\ & + (1/2) M U1^2 \dot{\theta}^2 + (1/2) M \dot{U}1^2 + M \dot{\theta} U1 l \\ & + (1/2) I_o \dot{\theta}^2 + (1/2) J_p q1^2 \phi_{1E}'^2 + q1 q2 J_p \phi_{1E}' \phi_{2E}' \\ & + (1/2) J_p q2^2 \phi_{2E}'^2 \end{aligned} \quad \text{----(2.13)}$$

위치 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V = & (1/2) \int_0^l EI (\partial^2 U / \partial X^2)^2 \, dx \\ = & (1/2) K1 q1^2 + (1/2) K2 q2^2 \end{aligned} \quad \text{----(2.14)}$$

여기서 $K1 = EI \int_0^l (\phi_{1E}''')^2 \, dx = (EI/l^3) \int_0^l (\phi_{1E}''(x))^2 \, dx$
 $K2 = EI \int_0^l (\phi_{2E}''')^2 \, dx = (EI/l^3) \int_0^l (\phi_{2E}''(x))^2 \, dx$

운동 에너지와 위치 에너지를 Lagrange 방정식에 대입하면, 역학 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} [& J_o + M l^2 + M (\phi_{1E}^2 q1^2 + \phi_{2E}^2 q2^2 + 2 \phi_{1E} \phi_{2E} q1 q2)] \ddot{\theta} \\ & + 2 M \phi_{1E}^2 q1 \dot{q}2 \dot{\theta} + 2 M \phi_{2E}^2 q2 \dot{q}2 \dot{\theta} + 2 \phi_{1E} \phi_{2E} q1 q2 M \dot{\theta} \\ & + 2 M \phi_{1E} \phi_{2E} q1 \dot{q}2 \dot{\theta} + w1 \dot{q}1 + w2 \dot{q}2 + M l \phi_{1E}' \dot{q}1 + M l \phi_{2E}' \dot{q}2 \\ = & T \end{aligned} \quad \text{----(2.15)}$$

$$\begin{aligned}
 m\ddot{q}_1 + w_1\ddot{\theta} + M\phi_{1E}^2\ddot{q}_1 + M\phi_{1E}\phi_{2E}\ddot{q}_2 + M\phi_{1E}\ddot{\theta} \\
 + J_p\phi_{1E}^2\ddot{q}_1 + J_p\phi_{1E}\phi_{2E}\ddot{q}_2 - M\dot{\theta}^2\phi_{1E}^2q_1 \\
 - M\dot{\theta}^2\phi_{1E}\phi_{2E}q_2 + K_1q_1 = 0 \quad \text{----(2.16)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\ddot{q}_2 + w_2\ddot{\theta} + M\phi_{2E}^2\ddot{q}_2 + M\phi_{1E}\phi_{2E}\ddot{q}_1 + M\phi_{2E}\ddot{\theta} \\
 + J_p\phi_{2E}\phi_{1E}\ddot{q}_1 + J_p\phi_{2E}^2\ddot{q}_2 - M\dot{\theta}^2\phi_{2E}^2q_2 \\
 - M\dot{\theta}^2\phi_{1E}\phi_{2E}q_1 + K_2q_2 = 0 \quad \text{----(2.17)}
 \end{aligned}$$

여기서 m = 빔의 질량, M = Payload의 질량,
 J_p = Payload의 중력 중심에 따른 Payload 질
 량의 관성, I_0 = 조인트에서의 회전관성, J_0 =
 조인트에 따른 빔의 관성을 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 U_{1E} &= U_1(x) \Big|_{x=1} = U_1(\xi) \Big|_{\xi=1} \\
 U_{2E} &= U_2(x) \Big|_{x=2} = U_2(\xi) \Big|_{\xi=1} \\
 \phi_{1E} &= \phi_1(x) \Big|_{x=1} = \phi_1(\xi) \Big|_{\xi=1} \\
 w_1 &= \int_m \phi_1(x) X_1 dx = \rho A l^2 \int_0^1 \phi_1(\xi) \xi d\xi \\
 w_2 &= \int_m \phi_2(x) X_2 dx = \rho A l^2 \int_0^1 \phi_2(\xi) \xi d\xi \\
 K_1 &= EI \int_0^1 \phi_1^2(x) dx = (EI/l^3) \int_0^1 \phi_1^2(\xi) d\xi \\
 K_2 &= EI \int_0^1 \phi_2^2(x) dx = (EI/l^3) \int_0^1 \phi_2^2(\xi) d\xi \\
 \phi'' &= d^2\phi(x)/dx^2 \text{ or } d^2\phi(\xi)/d\xi^2 \\
 \xi &= X/l
 \end{aligned}$$

역학 방정식(2.15-2.17)의 상태 방정식을 구
 하여보면 다음과 같다. 상태 변수들을 다음과
 같이 정의된다.

$$X_i = [\theta, q_1, q_2, \dot{\theta}, \dot{q}_1, \dot{q}_2] \quad \text{----(2.18)}$$

$i = 1, 2, \dots, 6$

2.1 운동의 선형 방정식

제안된 시스템의 운동을 시뮬레이션하는 경우
 비선형 방정식(2.15-2.17)이 사용되어진다. 최적
 제어기의 설계목적은 위해 식(2.15-2.17)의 선
 형화된 형태가 필요하게 된다. 따라서 θ, q_1, q_2
 내에 모든 고차항은 방정식으로 부터 생략되어
 지며, 식(2.15-2.17)의 결과적인 선형화된 형태
 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 (J_0 + M l^2 + I_0)\ddot{\theta} + (M l \phi_{1E} + w_1)\ddot{q}_1 \\
 + (M l \phi_{2E} + w_2)\ddot{q}_2 = T \quad \text{----(2.19)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (w_1 + M l \phi_{1E})\ddot{\theta} + (m + M \phi_{1E}^2 + J_p \phi_{1E}^2)\ddot{q}_1 \\
 + (M \phi_{1E}\phi_{2E} + J_p \phi_{1E}\phi_{2E})\ddot{q}_2 = -K_1 q_1 \quad \text{----(2.20)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (w_2 + M l \phi_{2E})\ddot{\theta} + (M \phi_{2E}\phi_{1E} + J_p \phi_{2E}\phi_{1E})\ddot{q}_1 \\
 + (M \phi_{2E}^2 + J_p \phi_{2E}^2 + m)\ddot{q}_2 = -K_2 q_2 \quad \text{----(2.21)}
 \end{aligned}$$

위의 방정식을 상태 방정식의 형태로 표현해
 보면 다음과 같다.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad \text{----(2.22)}$$

그림 2. 는 본 논문에서 사용된 2개의 유연성을
 갖는 시스템을 보여주고 있다.

3. 제어기의 설계

이전장에서는, 하나의 링크를 갖는 유연성
 매니퓰레이터의 역학적 모델링에 대해 설명하
 였으며, 이번장에서는 몇가지 최적제어 방법

을 기초로하여 제어기의 설계에 관해 설명하
 어 보겠다. Quadratic 최적제어기와 최소시간
 위치제어는 단순한 유연성을 갖는 팔의 제어
 기로서 사용되어지며, Quadratic 최적제어 방
 법에 대해 완전한 상태 궤환은 페루우프 제
 어에 의해 얻어진다. 유연성을 갖는 시스템에
 서 몇몇 상태는 직접적으로 측정할 수 없기
 때문에, 관측기 또는 상태 추정기가 최적제어
 기의 실질적인 실행을 상회하는 경우에 사용
 되어지며, 상태 추정기로서 deterministic 과
 stochastic 상태 추정기가 연구 비교된다.

최소시간 위치제어 문제의 해는 다른 제어
 기 기술에 대해 기초가 되는 시스템으로서
 사용되나, 시스템 제어기에서 switching-time의
 sensitivity 와 풀이 방법의 어려움 때문에
 최소시간 제어는 유연성을 갖는 매니퓰레이터
 에 대한 실질적인 제어기로서 사용하지 않는
 다. 이 논문에서는 이러한 불이익을 없애기
 위해 Quadratic 최적제어에 관해 토론해 보겠
 다. [7]

3.1 Quadratic 최적제어와 regulator 문제

역학 방정식은 다음과 같으며,

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad \text{----(3.1)}$$

여기서 $X(t)$ 는 상태벡터, A 는 $n \times n$ 시스템
 행렬, B 는 $n \times r$ 이득행렬, $U(t)$ 는 제어벡터,
 n 은 상태변수의 수 또는 시스템의 차수,
 r 은 제어입력의 수이다.

제어시스템의 설계에서 가장 낮은 2 차 평
 균 추적(mean square tracking)에러는 2 차
 평균(mean square)입력이 그것이 최대 허용가
 능한 값을 넘지 않는 범위내에서 얻어져야
 하며, 최종제어(terminal control)에 있어서 과
 도의 제어 에너지의 소비없이 거의 0상태를
 유지하거나 최종 상태 $X(tf)$ 에서 힘이 근사적
 으로 0을 유지하는 것이다.

평가함수(cost function)를 고려해 보면,
 다음과 같으며

$$\int_{t_0}^{t_f} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad \text{----(3.2)}$$

따라서, 평가함수를 최소화 하는 입력 $U(t)$ 를
 결정하는 것이다. $t_0 \leq t \leq t_f$

제어 입력 $U(t)$ 는 상태의 선형 함수를 만
 족하며, $U(t) = K(t)X(t)$, 평가함수를 최소화
 하는 것이다. 여기서 $K(t)$ 는 다음과 같이 얻
 을 수 있다.

$$K(t) = -R^{-1} B^T G F \quad \text{----(3.3)}$$

여기서 $G F$ 는 Riccati 방정식의 정상상태의해
 이다. 즉,

$$\underline{G}fA + A^T \underline{G}f - \underline{G}fBR^{-1}B^T \underline{G}f + Q = 0 \quad \text{----(3.4)}$$

3.2 안정도에 따른 Quadratic-최적제어

이번절에서는 수정된 Regulator 문제에 대해 토론해 보겠다. 이러한 수정의 목적은 모든 페루우프의 고유치(eigenvalue)의 실수 부분이 안정도 값(-a)보다 작게 가지는 최적제어기를 설계하는 것이다. 이러한 기술은 Anderson과 More[1] 에 의해 먼저 연구되었다. 또한 이것은 원래의 최적제어 기술보다 유연성을 갖는 시스템에 있어서 더욱더 적절한 것이다.

수정은 다음과 같은 정의에 따른다.

$$\hat{X}(t) = e^{at} X(t) \quad \text{----(3.5)}$$

$$\hat{U}(t) = e^{at} U(t) \quad \text{----(3.6)}$$

이들 정의로 $\hat{X}(t)$ 와 $\hat{U}(t)$ 는 단지 $X(t)$ 와 $U(t)$ 가 e^{-at} 보다 더욱더 빠르게 되는 경우에 안정하게 되는 것이다. ($t \rightarrow \infty$ 일때 $\hat{X}(t)$ 또는 $\hat{U}(t) \rightarrow 0$)

이것은 적어도 a의 안정도를 가지는 페루우프 시스템을 요구하는 경우에 증가적인 것이다. 식(3.5)를 미분하면, 다음과 같다.

$$\dot{\hat{X}}(t) = ae^{at} X(t) + e^{at} \dot{X}(t) \quad \text{----(3.7)}$$

식(3.7)을 $X(t)$ 에 대한 식(3.1)에 대입하면, 수정된 시스템 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A + aI)\hat{X} + \hat{B}U(t) \quad \text{----(3.8)}$$

평가함수 식(3.6)의 적분내의 함수는 다음과 같이 수정될 수 있다.

$$\hat{U}^T R + \hat{X}^T Q \hat{X} = e^{2at} (U^T R + X^T Q X) \quad \text{----(3.9)}$$

시스템 식(3.1)을 대신 다음과 같은 수정된 시스템을 풀이 해보자.

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A + aI)\hat{X}(t) + \hat{B}U(t) \quad \text{----(3.10)}$$

여기서 $\hat{X}(t_0) = X(t_0)$

수정된 평가함수는

$$\int_{t_0}^{t_f} (\hat{X}^T Q \hat{X} + \hat{U}^T R) dt \quad \text{----(3.11)}$$

여기서

$$Q \geq 0, R \geq 0$$

제어 입력 $U(t)$ 는 다음과 같으며,

$$\hat{U}(t) = \underline{K}(t)\hat{X}(t) \quad \text{----(3.12)}$$

그리고 행렬 값으로된 함수, $\underline{K}(t)$ 는 다음과 같은 식으로 부터 계산된다.

$$\underline{K}(t) = -R^{-1}B^T \hat{G}(t)$$

여기서 $G(t)$ 는 Riccati 방정식의 해이다.

정상상태의 해와 시불변 시스템의 경우에 대해 이득 K는 다음과 같이 계산된다.

$$\underline{K} = -R^{-1}B^T \underline{G}f \quad \text{----(3.13)}$$

그리고 $\underline{G}f$ 는 Riccati 방정식의 정상상태의 해이다. 즉,

$$\underline{G}f(A + aI) + (A + aI)^T \underline{G}f - \underline{G}fBR^{-1}B^T \underline{G}f + Q = 0 \quad \text{----(3.14)}$$

수정된 Regulator 의 최적 피드백 이득은 원래 문제의 제어법칙으로 부터 형성되며, 원래 문제의 페루우프 시스템은 적어도 a의 안정도를 갖는다. 대각(diagonal) 행렬 Q 와 R 은 페루우프 Quadratic-최적제어설계를 위해 주어진다. Cost는 부합되는 제어변수와 필요로 하는 증가적인 점으로 부터 2차 평가치표를 최소화하는 상태의 부합되는 변화가 더욱더 작을때 더욱더 높다.

3.3 상태 추정기(estimator)

Quadratic 최적제어 기술에 대해 전에 언급한 것과 같이 완전한 상태 궤환은 페루우프 제어에 대해 얻을 수 있다.

제안된 시스템의 모양에 대해, 단지 조인트의 위치(O)와 조인트의 속도(O)와 모드 모양의 시간 증속변수($q1(t), q2(t)$)를 직접적으로 측정할 수 있으나, 시간증속 함수의 변화의 비는($q1(t), q2(t)$)는 직접적으로 측정될 수 없다. 따라서, Deterministic(Luenberger 관측기)와 Stochastic(kalman filter)가 상태 추정기로서 설계하는데 사용된다.

3.3.1 Deterministic 상태 추정기

단지 여기서 reduced-order Luenberger관측기가 토론되어 지며, 상태 벡터에서 근사치를 얻는 시스템을 설계하는 것이다. 이런 시스템은 deterministic 경우에서, Luenberger관측기라 부른다. 상태 단일 선형함수를 추정하는 경우 이러한 생각은 모든 시스템에서 요구된다. 그리고, 주어진 선형함수는 $j - 1$ 임의의 고유치를 가지는 관측기에 따라 추정된다. 여기서, j 는 observability index 이고 행렬에 대해 양수로서 정의된다.

$$[\underline{C}^T \quad \underline{A}^T \underline{C}^T \quad (\underline{A}^T)^2 \underline{C}^T \quad \dots \quad (\underline{A}^T)^{j-1} \underline{C}^T] \quad \text{----(3.15)}$$

시스템은

$$\dot{X}(t) = \underline{A}X(t) + \underline{B}U(t) \quad \text{----(3.16)}$$

$$Y(t) = \underline{C}X(t)$$

관측기는

$$\dot{\underline{Z}}(t) = \underline{F}\underline{Z}(t) + \underline{G}1Y + \underline{G}2U(t) \quad \text{----(3.17)}$$

제어법칙은

$$U(t) = [U_c - \underline{H}^T \underline{Z}(t) - \underline{G}^T Y(t)] \quad \text{----(3.18)}$$

여기서 U_c 은 reference 입력 신호이다.

주어진 A,B,C,K 에 의해 F,T,G1,G2,H 가 풀이 된다. 관측기의 고유치의 선택에 의해 행렬 F, H를 얻을 수 있다. [5]

3.3.2 Stochastic 상태 추정기

이번장에서, 관측기 문제에서 Stochastic방법에 대해 토론해 보자. 완전한 상태 관측기의 경우에서와 같이, 관측기의 이득을 임의로 선택한다. 만약에 시스템에 나타나는 왜란과 관측 에러가 관측된다면, 관측기가 최적하다는 의미에서 정의되어지며, 이번절에서는 단지 연속적인 상태 추정기가 연구되어 지며, 실질적인 시스템 방정식이 다음과 같다. [6]

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= \underline{A}\hat{X}(t) + \underline{B}\hat{U}(t) + \underline{W1}(t) \\ \underline{Y}(t) &= \underline{C}\hat{X}(t) + \underline{W2}(t) \end{aligned} \quad \text{----(3.19)}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \underline{W1}(t) &= \text{상태 추정의 잡음} \\ \underline{W2}(t) &= \text{관측 또는 측정 잡음} \end{aligned}$$

여기서, $\hat{X}(t)$ 를 상태 $X(t)$ 의 추정이라 하자. 시불변 관측기를 고려해보자.

$$\hat{X}(t) = \underline{A}\hat{X}(t) + \underline{B}\hat{U}(t) + \underline{L}(t)[\underline{Y}(t) - \underline{C}\hat{X}(t)] \quad \text{----(3.20)}$$

Reconstruction 에러는 다음과 같으며,

$$\underline{e}(t) = \underline{X}(t) - \hat{X}(t) \quad \text{----(3.21)}$$

$t_0 < \tau < t$ 와 초기조건 $X(t_0)$ 에 대해 다음과 같은식을 최소화하는 행렬함수 $L(\tau)$ 을 얻는 것이며,

$$E[\underline{e}^T(t)\underline{W}(t)\underline{e}(t)] \quad \text{----(3.22)}$$

여기서 $\underline{W}(t)$ 는 양수 대칭 부가 행렬이다. 시불변 시스템의 정상상태 최적 관측기 t 가 $\rightarrow \infty$ 로 갈때 관측기의 Riccati 방정식의 해 $Q(t)$ 는 정상상태의 해에 접근하며, Q_f 는 Q_0 에 독립이다. 정상상태 Riccati 방정식의 해는 다음과 같으며,

$$0 = \underline{A}Q_f + Q_f\underline{A}^T + \underline{V1} - Q_f\underline{C}^T \underline{V2}^{-1} \underline{C}Q_f$$

그리고 정상상태 최적 관측기 이득 행렬은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\underline{L} = Q_f\underline{C}^T \underline{V2}^{-1} \quad \text{----(3.23)}$$

여기서, Riccati 방정식의 해는 Schur 방법에 의해서 얻을 수 있다. [7]

4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

본 논문에서는 두개의 large scale 시스템과 small scale 시스템이 서로 다른 페루우프의

고유치에 따라 시뮬레이션 하였으며, 그림 3는 제어기와 상태 추정기로부터 시스템의 플럭 다이어그램이다. 그림 4은 모 상태 추정기를 사용하지 않고 모든 상태가 측정되어 질 수 있다는 가정아래 large scale 시스템의 궤적의 위치, 조인트의 속도와 조인트의 각의 결과적인 그림이며, 그림 5은 small scale 시스템의 first-order luenberger관측기에 따른 유연성을 갖는 시스템의 시뮬레이션이며, 그림에서 α 의 값은 수정된 Quadratic 최적제어에 대한 설계의 안정도를 나타낸다. 그림 6은 연속적인 Kalman filter 에 따른 유연성을 갖는 매니퓰레이터의 시뮬레이션이다.

5. 결 론

본 논문에서 다룬 것은 Lagrange's 방정식과 가정된 모드 방법에 따른 하나의 flexible 링크를 갖는 매니퓰레이터의 모델링과 최적제어기의 설계이다. 본 논문에서 고려한 최적제어기술은 최소시간 위치제어와 Quadratic 최적제어이며, 여기서 최소시간 위치제어는 시스템제어에 있어 switching-time의 sensitivity 때문에 실질적인 제어기로서는 사용되지 않는다. 또한 정확한 시스템 모델이 요구된다. 이러한 불이익을 해소하기 위해 Quadratic 최적제어를 사용하였으며, 이것은 어떤 제한조건 아래 동일한 정확성과 용량을 유지하며, 최소시간 위치제어의 불이익을 해소할 수 있었으며, 임의의 잡음이 나타날때에도 상태 추정기를 사용함으로써 만족할만한 결과를 얻을 수 있었다. 앞으로의 연구과제는 불연속적인 경우의 유연성을 갖는 매니퓰레이터의 최적제어에 관한 연구이다.

* 참고 문헌 *

1. Anderson, B. O., Moore, J. B., "Linear Optimal control", Edited by Robert W. Newcomb, Prentice-Hall, 1971
2. Anderson, B. O., Moore, J. B., "Linear System Optimization With Prescribed Degree of Stability", Proc. IEE, Vol. 116, No. 12, December 1969.
3. Book, W. J. Maizza-Neto, O., and Whitney, D., "Feedback Control of Twobeam, Twojoint System with Distributed Flexibility" Journal of Dynamic System, Measurement and control, Vol. 97, No. 4, December 1975.
4. Melsa, James L., Jones, Stephen L., "Computer Programs For Computational Assistance in the Study of Linear Control Theory", second edition, McGraw Hill, 1973

5. KwakerNaak, H., Sivan, R., "Linear Optoimal Control System", Wiley-Interscience, 1972.
6. Laub, A. J., "A Schur Method for Solving Algebraic Riccati", Transaction on Automatic Control, Vol. AC-24, No.6, December 1979.
7. Rabiner, Lawrence R., and Bernard, Gold., "Theory and Application of Digital Singnal Processing", Prentice-Hall, 1975.

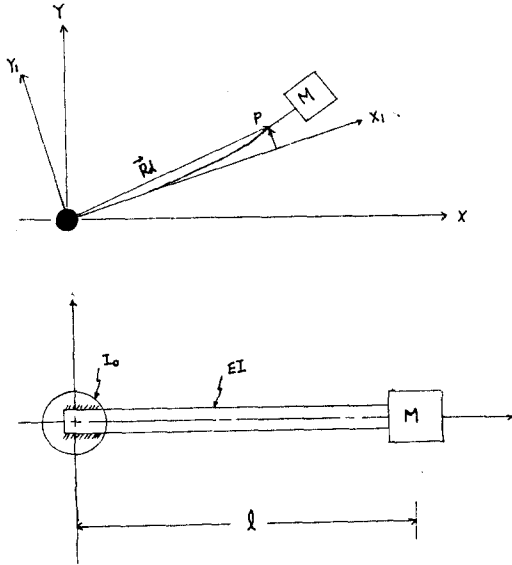


그림 1. 유연성을 갖는 매니퓰레이터의 좌표계

Fig 1. Coordinates and Nomenclature for the Interesting Configuration

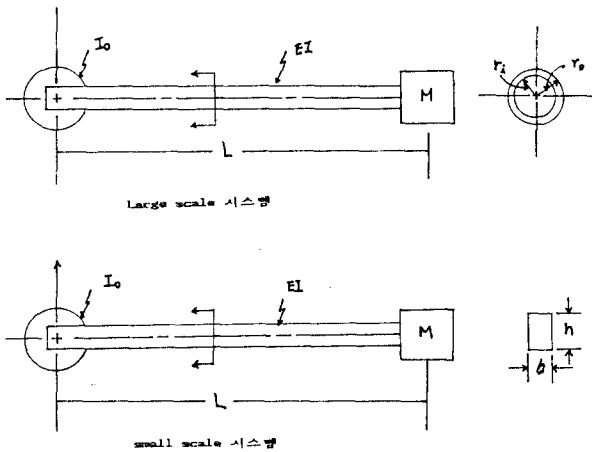


그림 2. 유연성을 갖는 시스템의 2 가지 예

Fig 2. Two Examples of the Flexible System

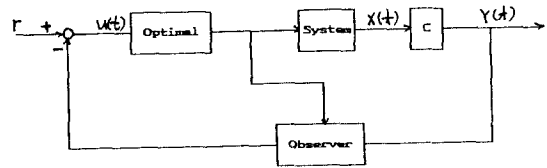


그림 3. 제어기

Fig 3. Controller

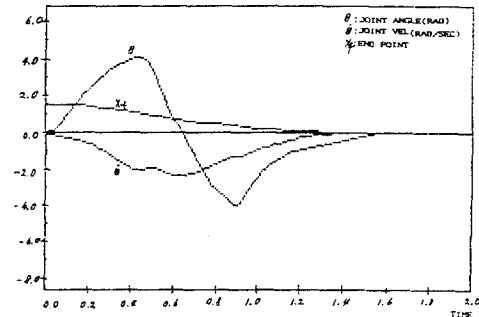


그림 4. 모든 상태가 측정될 수 있다는 가정하에 Large scale 시스템의 시뮬레이션 (a=5)

Fig 4. Simulation of the Large Scale System

(a=5) Assume that the States can be Measured

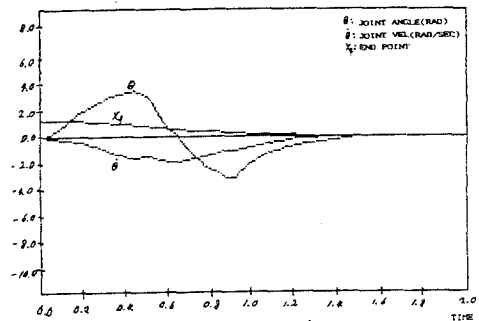


그림 5. Luenberger 관측기에 의한 small scale 시스템의 시뮬레이션 (a=10)

Fig 5. The Simulation of The Small Scale System

(a=10) With the Luenberger Observer

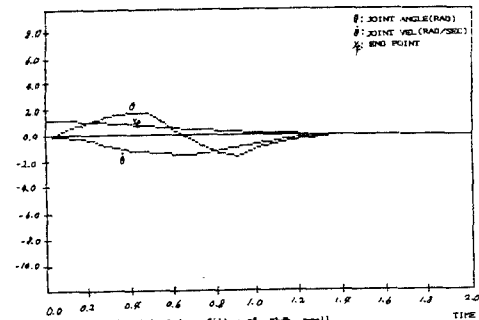


그림 6. 연속적인 Kalman filter 에 의한 small scale 시스템의 시뮬레이션 (a=5)

Fig 6. The Simulation of The Small Scale System

(a=5) With the Continous Kalman Filter.