

단일상태 Feedback을 가지는 계의 최적 비선형제어기
설계에관한 연구

오 노 용 균 조 경 래
부산대학교 기계공학과

A study on the Design of the Optimal Nonlinear Controller
for Single State Feedback

Yong Gyun Ro and Kyeum Rae Cho
Pusan National University

Abstract

For feedback control of a linear dynamic system the optimum linear state regulator (OLSR) can be implemented only if all state are available for feedback .
This work demonstrates that when only the output state is available for feedback, a nonlinear controllers can be improved performance over that obtained by a proportional controller. This paper found the optimal control law by well-known dynamic programming and principles of optimality.
Thus ,performance of both proportional and nonlinear controllers is compared with performance of optimum linear state regulator.

1. 서 론

출력의 모든 상태를 측정할 수있으면 최적 제어 이론에서 많이 다루는 Algebraic Riccati Equation을 써서 OLSR(Optimum Linear State Regulator) 을 설계할 수있지만 대개 실제적인 경우 출력의 모든 상태가 측정되어 제어입력에 이용되기란 거의 불가능하므로 제어변수에 이용되지않는 상태변수가 생기게되어 OLSR을 구성할 수 없게된다.

이번 연구에서는 측정되어야할 많은 상태변수들 중에서 단 하나의 상태만 측정할 수있을때 어떻게 제어기를 구성하면 최적화된 제어기를 설계할 수 있을것인가를 연구한다.

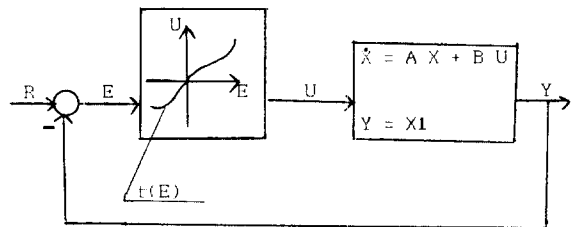
많은 상태중에서 단 하나의 상태만 측정할 수 있을때 Rekasius(1) 와 Hisa(2) 는 전 구간에 걸쳐 기울기가 일정한 비례제어를 설계했고 ,반면에 Gay (3) 는 Simple Gradient Method를 써서 비례제어기와 구간별 기울기가 다른 비선형제어기(Nonlinear Controller)를 설계했다.

그러나 본 논문은 Dynamic Programming 과 최적성의 원리(Principles of optimality) 를 이용하여 비례제어기와 비선형 제어기를 구성하여 OLSR ,비례제어기 ,비선형제어기를 사용한 계의 성능계수 값과 서로 비교하고 ,Gay 가 이용한 Simple Gradient Method의 결과와도 서로 비교한다.

연구에 이용될 계는 단일 입 ,출력을 갖는 플랜트로 n 차 미분방정식으로 모델링 될수있는 선형 정적계(Linear Sationary System) 이다. 이때 성능계수는 적분 2차형 (Integral Quadratic Performance Index)이고 초기값은 적절히 가정한다.

2. 본 론

플랜트, 제어기, Feedback 요소로 구성되는 제어기는 (그림 1) 과 같다



(그림 1) 계의 구조

여기서 오차신호 E는 원하는 출력 R 과 실제 플랜트 출력 Y 의 차이이고, X는 X1,X2,X3, - - - Xn의 선형 독립변수들로 구성된 n x 1 의 상태벡터(State Vector) 이며, X-dot는 상태를 시간에 대해 미분한 dX/dt 이고 ,Y 는 출력으로 (식 1) 과 같이 표시된다.

$$Y = X1 \text{ ----- (식 1)}$$

A 는 $n \times n$ 상수 matrix이고, B 는 $n \times 1$ 상수 제어 matrix 이고, 원하는 출력은 조절기 문제로 가정하여 U 으로한다.

제어입력 U 는 오차신호 E 의 함수로 $U = f(E)$ 로 표시된다.

이때 제어신호 U 와 오차신호 E의 Graph 가 직선이면 비례제어기이고, 그렇지않으면 비선형제어기가 된다.

(그림 1) 과 같은 게가 선정되면 설계의 목적에따라 적절한 성능계수를 선정한다.

이 성능계수가 주어지면 이값을 최소화 시키는 제어입력을 설계해야한다.

성능계수중 가장 널리 이용되는 것은 (식 2) 외같이 상태변수와 제어입력으로 표시되는 적분 2차형 성능계수(Integral Quadratic Performance Index) 이다.

$$I = \int_0^{\infty} (X' Q X + W U U) dt \quad \text{----- (식 2)}$$

Q 는 $n \times n$ 의 NDM (Nonnegative Definite Matrix) 이고, W 는 양의 상수로 제어입력의 가중치이다. 이때 Q 와 W 의 값은 해석의 목적에따라 적절하게 선정하는데 OLSR ,비례제어기 , 비선형제어기의 성능계수는 모두같다고 가정한다.

성능계수가 선정되면 이 성능계수의 값을 최소화하는 제어를 설계해야하는데 만약 모든 상태를 측정하여 OLSR 을 구성할 수있으면 다행이지만 실제적으로 모든 상태를 측정하기는 어려우므로 OLSR에 가장 근접하는 다른 제어를 설계해야한다.

(그림 1) 에서처럼 한 상태만 측정 가능하고 $U = f(E)$ 의 함수가 선형이라하면 제어입력은 (식 3) 와 같다.

$$U = K_p E = -K_p Y \quad \text{----- (식 3)}$$

여기서 K_p 는 비례 제어상수로 초기값에 대해 (식 2) 과 같은 성능계수를 최소화시키는 값이다.

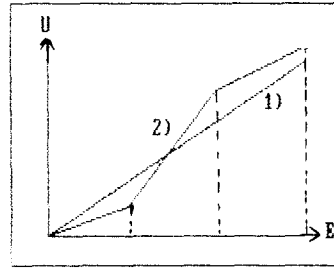
이 값을 구하기위해 Rekasius 와 Hisa는 전 구간에 걸쳐 기울기가 일정한 비례제어기를 설계했지만 Gay 는 Simple Gradient Method 를 써서 구간별 기울기가 다른 비선형제어기를 설계했다.

(그림 2) 를 보자.

경로 1) 은 기울기가 일정한 비례제어기이고 경로 2) 는 각 구간마다 기울기가 다른 비선형제어기이다.

속 임의로 나눈 각 구간에대하여 최적경로를 찾아 구간별 최적경로를 합하여 전체의 최적 경로를 구한다.

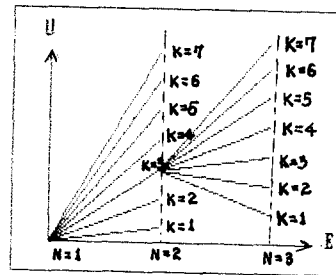
이번 연구는 Gay 가 적용한 Simple Gradient Method와 달리 Dynamic Programming 과 최적성의 원리를 이용하여 비선형제어기를 구성함으로써 Gay 논문의 값들과 서로 비교한다.



(그림 2) 비례제어기와 비선형제어기

최적 경로를 찾는 과정은 아래와 같다.

(그림 3) 를 보자 .



(그림 3) 최적경로 찾기

(그림 3) 에서 두점 $(B(N-1), A(N-1, K))$, $(B(N), A(N, K))$ 을 지나는 직선의 방정식은 (식 4) 와 같다.

$$U - A(N, K) = (A(N, K) - A(N-1, K)) / (B(N) - B(N-1)) \times (E - B(N)) \quad \text{----- (식 4)}$$

(식 4) 를 정리하면

$$U = GG E + HH \quad \text{----- (식 5)}$$

여기서 $GG = (A(N, K) - A(N-1, K)) / (B(N) - B(N-1))$

$$HH = A(N, K) - GG B(N) \text{이고,}$$

$A(N, K)$, $B(N)$ 에서 N 은나눈 구간을 의미하고 K는 그때의 제어입력을 시험하는 값이다.

$E = -X1$ 이므로 $X1$ 과의 관계식은 (식 6) 과같이 표시된다.

$$U = -GG X1 + HH \quad \text{----- (식 6)}$$

적용할 때는 조절기 문제이므로 오차신호와 제어신호의 최종 상태는 0 이어야한다.

즉 $A(1, 1), B(1)$ 은 0이다.

첫구간의 최적경로는 $B(1)$, $A(1, 1)$ 을 고정점으로하여 $N=2$ 이고, $K=1$ 일때 $B(N), A(N, K)$ 까지

이르는 제어입력 U와 상태변수 X1과의 관계식을 구하고 미분방정식을 풀어 성능계수 값을 구한후 K=2 일때도 위와 같은 과정을 반복하여 K=1 에서 K=k까지 중에서 가장 최적의 성능계수 값을 가지는 관계식이 우리가 찾는 제어입력이다.

두번째 구간은 앞에서 구한 최적점을 고정점으로하여 위와 같은 방법으로 구간의 제어입력을 찾는다.

마찬가지로 세구간, 네구간--- 으로 나누었을 때의 구간별 제어입력을 구한후 전체구간의 제어입력을 구하면된다.

< 표 1 > 은 예제의 구간을 두번 나누었을때의 결과를 나타내준다

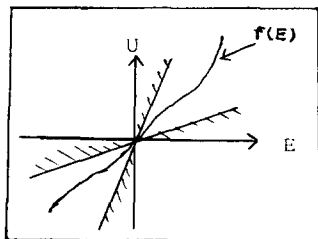
< 표 1 >

B=0.5		B=1.0	
A	PI	A	PI
0.39	1.33569	2.18	8.03893
0.40	1.34988	2.19	8.04397
0.41	1.34089	2.20	8.04907
0.42	1.33585	2.21	8.05420
0.43	1.33449	2.22	8.03266
0.44	1.33653	2.23	8.03809
0.45	1.34189	2.24	8.04356
0.46	1.35027	2.25	8.04908
0.47	1.36141	2.26	8.05463
0.48	1.37524	2.27	8.06355

< 표 1 >에서 보듯이 (B(1),A(1,1)) 에서 (B(2),A(2,k))까지 경로에서는 (0 , 0) 에서 (0.5 , 0.43) 로 갈때가 성능계수의 값이 1.33449 로 최소로 우리가 찾는 최적경로이고 (0.5 , 0.43) 에서 (B(3) , A(3,k)) 까지는 (1.0 , 2.22) 일때 성능계수 값이 8.03266으로 최소가 되므로 최적경로이다.

따라서 전체 성능계수 값은 각 구간별 성능계수를 합하면 9.36715이다.

실제된 특정한 초기치에 대하여 성능계수를 최적화시키도록 제어기를 구성하면 성능은 최소가 되지만 안정성의 문제는 아직 해결되지 않은채 남아있다.



(그림 4) Popov Criterion

이 논문에서는 안정성 문제를 Popov Criterion 과 극점천이 기술을써서 판별한다.

Popov Criterion 은 (그림 4)와 같이 비선형 함수 f(E)가 Popov-Sector안에 들면 안정하다.

3. 예제

다음과 같은 2 차계를 선정하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

계의 출력은 $Y = X_1$ 이고 이때의 초기조건은 $X_1(0) = -1.0, X_2(0) = 0$ 이다.

성능 계수는 $J = \int_0^{\infty} 10 X_1^2 + U^2 dt$

또한 적분의 무한시간은 10 초정도면 충분하므로 m 의 값은 $m = 5/T$ 에서 0.5로하고 Popov Criterion 과 극점천이 기술을써서 Popov-Sector 을 구해보면 $0.25 < U/E < \infty$ 이다.

따라서 상한기울기 S_u 는 무한대이고 하한기울기 S_n 는 0.25 이다.

미분 방정식을 푸는 Routine 은 정확도와 시간을위해 Runge-Kutta 4th 적분을 사용했고, 시간 승분은 0.01 초, 오차한계는 1 % 이다.

OLSR의 제어입력은 $U = -3.162 X_1 - 1.7062 X_2$ 이고 최적 성능계수 값은 8.588이다.

N=1 에서 5까지 나누었을때의 결과가 < 표 2 >에 있다.

< 표 2 >

N	B	Day		논 문	
		A	PI	A	PI
1	1.00	1.55	10.202	1.55	10.26379
2	0.50	0.187		0.43	
	1.00	1.781	9.612	2.22	9.36715
3	0.333	0.195		0.20	
	0.667	0.167	9.143	1.05	9.12327
4	1.000	2.526		2.48	
	0.25	0.221		0.13	
5	0.50	0.126		0.59	
	0.75	0.545	9.070	1.39	8.99753
5	1.00	2.706		2.39	
	0.20	0.230		0.10	
5	0.40	0.101		0.43	
	0.60	0.204	9.001	0.96	8.95829
5	0.80	0.965		2.07	
	1.00	2.727		2.46	

< 표 2 >에서보듯이 구간을 한번 나눈 비례제어기는 성능계수의 값이 10.2679인데 반하여 구간을 많이 나눌수록 성능이 개선되어 구간을

다섯번 나누었을때는 성능계수의 값이 8.95829 까지 감소하여 구간을 적절하게 나누어 구간별 기울기가 다른 비선형 제어기를 설계하면 성능이 훨씬개선됨을 알수있다.

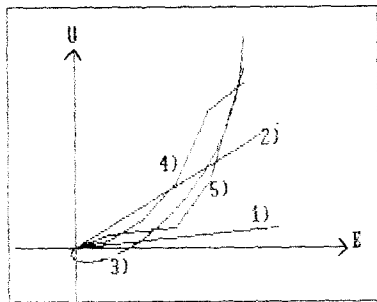
그러나 구간을 많이 나눌수록 성능이 개선되지만 그렇다고 너무 많이 나누면 계산이 복잡하고 시간이 오래 걸리므로 구간을 나누다가 성능의 개선이 거의 변하지않는 때가되면 작업을 마치는게 좋다.

이번 예제의 경우 비례제어기보다는 구간을 네번까지 나눈 비선형제어기가 성능을 훨씬 개선시키지만 그 이상 구간을 많이 나누어도 큰 변화가 없으므로 네번 정도만 나누고 아주 정확성을 요구할때는 다섯번 정도까지 나눈 비선형제어기를 설계한다.

또 하나 주목할만한 것은 Gay 의 결과와 비교해보면 Dynamic Programming 에 의한 결과들이 개선된다.

(그림 5) 는 비례제어기(2) , OLSR(3) 구간을 다섯번 나눌때의 본 논문에서 구한 비선형제어기(4) , 구간을 같이 나누었을때 Gay 의 논문에서 구한 비선형 제어기(5) 에 의한 제어신호 U 와 오차신호 E 의 궤적이다.

(그림 5) 에서 보듯이 설계한 비례제어기와 N=5 일경우 비선형 제어입력들은 각각 Popov Sector 안에들므로 안정하다.



(그림 5) 예제의 U-E 궤적

4. 결 론

모든 상태를 측정하여 OLSR 을 구성할 수없을 때 비례제어기 보다는 비선형 제어기를 설계하는 것이 성능을 훨씬 개선시킬수 있음을 알았다.

또한 Gay 가 적용한 Simple Gradient Method 보다는 Dynamic Programming 에 의한 비선형제어기 구성이 더 유용한 방법임을 알았다. 구간의 크기를 나누는 문제, 초기조건문제, 비대칭형 비선형제어기 설계문제등은 생략했다.

다른 하나의 문제는 Popov Criterion 이 게가 선형일때만 안정성을 보장하므로 게 자체가 비선형이면 안정성을 판별하지 못하므로 비선형에 대해서도 안정성을 보장해주는 다른 방법을 찾아 비선형의 비선형제어기를 설계하는 것은 계속 연구해볼 가치가 있을것이다.

5. 참고문헌

- (1) Rekasius, Z. V. , "Optimal Linear Regulators with Incomplete State Feedback " , IEEE Transactions on Automatic Control, June 1966 pp 296-299
- (2) Hsia, T. C., "An Approach for Incomplete State Feedback Control System Design " , IEEE Transactions on Automatic Control, June 1972 pp 383-389
- (3) Gay, T.A. "Constrained Optimal Nonlinear Regulators for Single State Feedback " , ASME Transactions on Dynamic Systems, Measurement and control , September 1974 , pp 283-286