'88 韓國自動制御學術會議論文集 1988. 10. 21~22

천천히 변하는 선형 시변 시스템의 안정도 영역

최 종 호 °장 태 정
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

Stability Regions of Linear Slowly Time-Varying Systems

Chong-Ho Choi Tae-Jeong Jang
Dept. of Control & Instrumentation Eng.,
Seoul National University

ABSTRACT

By using Lyapunov method, sufficient conditions for linear time-varying continuous-time and discrete-time systems to be stable are presented under the assumption that the systems are slowly time-varying. Though it is not simple to find the stability regions immediately, one could find practical and large stability regions by constructing an appropriate algorithm.

1. 서 론

최근에 Yedavalli[1], Zhou[2], 최[3], 그리고 그밖의 많은 사람들에 의해 $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$ 와 같이 주어지는 시변 시스템이 점근적으로 안정하게 되는 A(t)의 영역을 구하는 문제가 다루어 졌다. 이렇게 구한 안정도 영역은 일반적으로 시스템 A(t)가 시불변인 경우에 비해서는 상당히 좁은 영역이다. 이는 A(t)의 변화 형태에 대한 아무런 제약이 없기 때문인데, 만약 적당한 제약을 주게되면 더욱 넓은 A(t)의 안정도 영역을 구할 수 있을 것이다. 직관적으로, A(t)가 매우 천천히 움직인다면, 즉 $\dot{A}(t)$의 크기가 충분히 작다면 실제 안정도 영역은 더욱 넓어져 A(t)가 시불변일 때의 안정도 영역과 거의 일치할 것이라고 추측할 수 있다.

Desoer[4]는 A(t)의 한계와 A(t)의 한계를 각각

$$a_M := \sup_{t\geq 0} \|A(t)\| < \infty \tag{1}$$

$$\dot{a}_M := \sup_{t\geq 0} \|\dot{A}(t)\| \tag{2}$$

라 정의하고, 또

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i[A(t)]\} \leq -2\sigma_0 < 0,\ \forall i,\ \forall t\geq 0 \tag{3}$$

라 가정하여 시스템이 점근적으로 안정하게 되는 a_M의 한계는 a_M과 σ_0 만의 함수꼴로 표현할 수 있음을 보였다. Desoer는 또 천천히 변하는 이산시간 시스템에 대해서도 이와 유사한 결과를 얻었다[5].

본 논문에서는 A(t)의 미분치 한계가 없는 경우에 대한 최[3]의 결과를 확장하여, 미분치 한계가 있는 천천히 변하는 시스템의 안정도 영역에 대한 충분 조건을 연속시간, 이산시간 시스템 각각에 대하여 구하였다.

2. 천천히 변하는 시변 시스템의 안정도 영역

2.1 연속시간 시스템의 경우

다음과 같이 주어진 연속시간 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t)\\ &= (A_0 + \sum_{i=1}^{m}\omega_i(t)A_i)x(t).\end{aligned} \tag{4}$$

단, $x(t)\in R^n$ 이며, $\omega_i(t)\in R$, $0\leq\omega_i(t)\leq\omega_i^*$, $i=1,2,\ldots,m$, $\forall t\geq t_0$, $A_0\in R^{n\times n}$인 상수 Hurwitz 행렬, 그리고 $A_i\in R^{n\times n}$, $i=1,2,\ldots,m$, 인 임의의 상수 행렬이다. 그러면 (4)와 같이 주어지는 시변 연속시간 시스템에서 시스템의 점근적 안정도 (asymptotic stability)에 대한 충분 조건을 다음의 정리 1, 정리 2와 같이 얻을 수 있다.

정리 1: $\omega_i(t)$의 미분치 한계가

$$|\dot{\omega}_i(t)| \leq \dot{\omega}_i^*,\ i=1,2,\ldots,m \tag{5}$$

과 같이 존재한다고 하고, 대칭 행렬 P(t)와 상수 α를 다음과 같이 정의하자.

$$P(t) := P_0+\sum_{i=1}^{m}\omega_i(t)\tilde{P}_i \geq \sigma I,\ \sigma>0,\ \forall t\geq t_0, \tag{6}$$

$$\alpha := \|\sum_{i=1}^{m}\dot{\omega}_i^*\tilde{P}_i\| = \sigma_{max}[\sum_{i=1}^{m}\dot{\omega}_i^*\tilde{P}_i], \tag{7}$$

단, $P_0=P_0^T\geq\sigma I$, $\tilde{P}_i=\tilde{P}_i^T$, $P_0,\tilde{P}_i\in R^{n\times n}$, $i=1,2,\ldots,m$.

임의의 $\epsilon>0$ 에 대하여 A(t)가

$$A^T(t)P(t)+P(t)A(t)+\alpha I \leq -\epsilon I,\ \forall t\geq t_0 \tag{8}$$

을 만족하는 영역에서 움직이면 시스템 (4)는 점근적으로 안정하다.

증명: Lyapunov 함수를 $V(t)=x^TP(t)x$ 라 정의하고 시간에 대해 미분하면

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= x^T\{A^T(t)P(t)+P(t)A(t)+\dot{P}(t)\}x\\ &= x^T\{A^T(t)P(t)+P(t)A(t)+\sum_{i=1}^{m}\dot{\omega}_i(t)\tilde{P}_i\}x\end{aligned}$$

$$\le x^T\{A^T(t)P(t)+P(t)A(t)+\|\sum_{i=1}^{m}\dot{\omega}_i{}^*\tilde{P}_i\|I\}x$$
$$= x^T\{A^T(t)P(t)+P(t)A(t)+\alpha I)\}x$$
$$\le -\epsilon x^T x. \tag{9}$$

(6)과 (9)로 부터 $\dot{V}(t)/V(t)$ 는

$$\frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \le \frac{-\epsilon x^T x}{x^T P(t) x} \le -\frac{\epsilon}{\sigma} < 0 \tag{10}$$

그러므로 시스템 (4)는 점근적으로 안정하다. ∇∇∇

그런데 $A(t)$가 시변이므로 (8)을 만족하는 $A(t)$의 영역은 그 영역 내의 모든 점들이 각각 (8)을 만족한다는 것을 보여야 하므로 정확히 구하는 것이 불가능하다. 따라서 다음의 정리 2에서는 유한 개의 점들이 어떤 조건을 만족하면 그 점들을 잇는 convex한 영역 내에 있는 모든 점들이 (8)을 만족한다는 것을 보임으로써 (8)을 만족하는 $A(t)$의 영역을 구할 수 있는 방법을 제시한다.

정리 2: 다음을 정의하자.

$$\hat{A}_0=A_0+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i A_i, \qquad \hat{P}_0=P_0+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\tilde{P}_i, \tag{11}$$

$$\hat{A}_i=\hat{A}_0+\delta_i A_i, \qquad \hat{P}_i=\hat{P}_0+\delta_i\tilde{P}_i, \tag{12}$$

$$\hat{A}(t)=\hat{A}_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)\delta_i A_i, \quad \hat{P}(t)=\hat{P}_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)\delta_i\tilde{P}_i, \tag{13}$$

단,

$$0 \le \lambda_i(t) \le 1, \ i=1,2,\dots,m \tag{14}$$

이다. 여기서 $\lambda_0(t)$를

$$\lambda_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t) \tag{15}$$

라 정의했을 때, $\hat{A}_i$, $\hat{P}_i$, $i=0,1,\dots,m$, 가

$$\hat{A}_i{}^T\hat{P}_j+\hat{P}_j\hat{A}_i+\alpha I \le -\epsilon I, \ \epsilon>0, \ \forall i,j=1,2,\dots,m \tag{16}$$

을 만족하면

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t) \le 1 \tag{17}$$

을 만족하는 모든 $A(t)$의 영역에서도

$$\hat{A}^T(t)\hat{P}(t)+\hat{P}(t)\hat{A}(t)+\alpha I \le -\epsilon I \tag{18}$$

가 성립한다.

증명: (12), (13), 그리고 (15)에 의해

$$\hat{A}(t) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(t)\hat{A}_i, \quad \hat{P}(t) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(t)\hat{P}_i \tag{19}$$

가 된다. 그리고 (17)을 만족하면

$$\lambda_0(t) = 1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t) \ge 0 \tag{20}$$

이다. 그러므로 (14), (15), (16), 그리고 (20)에 의해

$$\hat{A}^T(t)\hat{P}(t)+\hat{P}(t)\hat{A}(t)+\alpha I$$
$$= (\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(t)\hat{A}_i)^T(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(t)\hat{P}_i)$$
$$+ (\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(t)\hat{P}_i)(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(t)\hat{A}_i)+\alpha I$$
$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\lambda_i(t)\lambda_j(t)(\hat{A}_i{}^T\hat{P}_j+\hat{P}_j\hat{A}_i+\alpha I)$$
$$\le \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\lambda_i(t)\lambda_j(t)(-\epsilon I)$$
$$= -\epsilon I. \tag{21}$$

따라서 (16)을 만족하면 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)\le 1$ 을 만족하는 모든 $\hat{A}(t)$의 영역에서도 (18)이 성립한다. ∇∇∇

정리 1과 정리 2로 부터, 적당히 세분한 $A(t)$의 영역들이 (16)의 조건을 만족하는지를 검사해서 이를 만족하는 모든 영역들을 합치면 그 시스템의 안정도 영역이 된다는 것을 알 수 있다.

그런데 여기서 문제가 되는 것은 어떻게 P_0, $\tilde{P}_i$, 그리고 α 등을 설정해 주느냐는 것이다. α는 (7)과 같이 $\tilde{P}_i$만 주어지면 구해지므로, P_0와 $\tilde{P}_i$를 결정해 주는 것이 문제로 남는다. 가능한 방법의 하나로 미분치 한계가 없는 경우에 대한 최[3]의 방법을 들 수 있다. 먼저 P_0는 A_0 점에서 최[3]의 방법으로 가장 넓은 안정도 영역을 보장하는 P_i를 구한다. 이때 P_0와 P_i는 normalize된 형태로 구하는 것이 좋다. 이때 $\tilde{P}_i$은

$$\tilde{P}_i = (P_i-P_0)/\omega_i{}^*, \tag{22}$$

$\omega_i{}^*$: A_0에서 각 축에 대한 끝점까지의 거리,

로 표현할 수 있다. 그러면 $\omega_i(t)$가 $0\to\omega_i{}^*$ 로 변할 때 $P(t)$는 $P_0\to P_i$ 로 변한다. 이때 α는 (7)과 같이 계산할 수 있다.

2.2 이산시간 시스템의 경우

다음과 같이 주어진 시변 이산시간 시스템을 생각하자.

$$x(k+1) = A(k)x(k)$$
$$= (A_0 + \sum_{i=1}^{m}\omega_i(k)A_i)x(k). \tag{23}$$

단, $x(k)\in R^n$ 이며, $\omega_i(k)\in R$, $0\le\omega_i(k)\le\omega_i{}^*$, $i=1,2,\dots,m$, $\forall k\ge k_0$, $A_0\in R^{n\times n}$(고유치가 모두 단위원 내에 존재), 그리고 $A_i\in R^{n\times n}$, $i=1,2,\dots,m$, 인 임의의 상수 행렬이다. 그러면 (23)과 같이 주어지는 시변 이산시간 시스템의 점근적 안정도에 대한 충분 조건을 다음의 정리 3, 정리 4와 같이 얻을 수 있다.

정리 3: $\omega_i(k+1)=\omega_i(k)+\Delta\omega_i(k)$ 라 할 때, $\omega_i(k)$의 변화량 $\Delta\omega_i(k)$의 한계가

$$|\Delta\omega_i(k)| < \Delta\omega_i{}^*, \ i=1,2,\dots,m \tag{24}$$

과 같다고 하고, 대칭 행렬 $P(k)$와 상수 α를 다음과 같이 정의하자.

$$P(k) = P_0+\sum_{i=1}^{m}\omega_i(k)\tilde{P}_i \ge \sigma I, \ \sigma>0, \ \forall k\ge k_0 \tag{25}$$

$$\alpha = \|\sum_{i=1}^{m}\Delta\omega_i{}^*\tilde{P}_i\| = \sigma_{max}[\sum_{i=1}^{m}\Delta\omega_i{}^*\tilde{P}_i] \tag{26}$$

단, $P_0=P_0{}^T\ge\sigma I$, $\tilde{P}_i=\tilde{P}_i{}^T$, $P_0,\tilde{P}_i\in R^{n\times n}$, $i=1,2,\dots,m$.

임의의 $\epsilon>0$ 에 대하여 $A(k)$가

$$A^T(k)P(k)A(k)-P(k)+\alpha I \le -\epsilon I, \ \forall k\ge k_0 \tag{27}$$

을 만족하는 영역에서 움직이면 시스템 (23)은 점근적으로 안정하다.

증명: Lyapunov 함수를 $V=x^T(k)P(k)x(k)$ 라 정의하고, $\Delta V=V(k+1)-V(k)$ 를 구하면

$$\begin{aligned}
&\Delta V \\
&= x^T(k+1)P(k+1)x(k+1)-x^T(k)P(k)x(k) \\
&= x^T(k)\{A^T(k)P(k+1)A(k)-P(k)\}x(k) \\
&= x^T(k)\{A^T(k)P(k)A(k)-P(k) \\
&\quad +A^T(k)[P(k+1)-P(k)]A(k)\}x(k) \\
&= x^T(k)\{A^T(k)P(k)A(k)-P(k) \\
&\quad +A^T(k)(\sum_{i=1}^{m}\Delta\omega_i(k)P_i)A(k)\}x(k) \\
&\le x^T(k)\{A^T(k)P(k)A(k)-P(k) \\
&\quad +\|A^T(k)\|\cdot\|\sum_{i=1}^{m}\Delta\omega_i(k)P_i\|\cdot\|A(k)\|I\}x(k) \\
&\le x^T(k)\{A^T(k)P(k)A(k)-P(k)+\|\sum_{i=1}^{m}\Delta\omega_i{}^*P_i\|I\}x(k) \\
&= x^T(k)\{A^T(k)P(k)A(k)-P(k)+\alpha I\}x(k) \\
&\le -\epsilon x^T(k)x(k).
\end{aligned} \tag{28}$$

(25)와 (28)로 부터 $\Delta V/V$ 는

$$\frac{\Delta V}{V} \le \frac{-\epsilon x^Tx}{x^TP(k)x} \le -\frac{\epsilon}{\sigma} < 0. \tag{29}$$

그러므로 시스템 (23)은 점근적으로 안정하다. ∇∇∇

보조정리 임의의 행렬 $A,B\in R^{n\times n}$ 와 positive definite 행렬 $P=P^T\in R^{n\times n}$ 에 대하여

$$A^TPB + B^TPA \le A^TPA + B^TPB \tag{30}$$

이 성립한다.

증명: [3]의 보조 정리 참조.

정리 4: 다음을 정의하자.

$$\hat{A}_0=A_0+\sum_{i=1}^{m}\gamma_iA_i, \qquad \hat{P}_0=P_0+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\tilde{P}_i, \tag{31}$$

$$\hat{A}_i=\hat{A}_0+\delta_iA_i, \qquad \hat{P}_i=\hat{P}_0+\delta_i\tilde{P}_i, \tag{32}$$

$$\hat{A}(k)=\hat{A}_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(k)\delta_iA_i, \quad \hat{P}(k)=\hat{P}_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(k)\delta_i\tilde{P}_i, \tag{33}$$

단,

$$0 \le \lambda_i(k) \le 1, \quad i=1,2,\ldots,m \tag{34}$$

이다. 여기서 $\lambda_0(k)$를

$$\lambda_0(k) = 1 - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(k) \tag{35}$$

라 정의했을 때, $\hat{A}_i$, $\hat{P}_i$, $i=0,1,\ldots,m$, 가

$$\hat{A}_i^T\hat{P}_j\hat{A}_i-\hat{P}_j+\alpha I \le -\epsilon I, \ \epsilon>0, \ \forall i,j=1,2,\ldots,m \tag{36}$$

을 만족하면

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(k) \le 1 \tag{37}$$

을 만족하는 모든 $\hat{A}(k)$의 영역에서도

$$\hat{A}^T(k)\hat{P}(k)\hat{A}(k)-\hat{P}(k)+\alpha I \le -\epsilon I \tag{38}$$

가 성립한다.

증명: (32), (33), 그리고 (35)에 의해

$$\hat{A}(k) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(k)\hat{A}_i, \quad \hat{P}(k) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(k)\hat{P}_i \tag{39}$$

가 된다. 그리고 (37)을 만족하면

$$\lambda_0(k) = 1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(k) \ge 0 \tag{40}$$

이다. 그러므로 (34), (35), (36), (40), 그리고 보조 정리에 의해

$$\begin{aligned}
&\hat{A}^T(k)\hat{P}(k)\hat{A}(k)-\hat{P}(k)+\alpha I \\
&= (\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(k)\hat{A}_i)^T P(k)(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(k)\hat{A}_i)-\hat{P}(k)+\alpha I \\
&= \sum_{i=0}^{m}\lambda_i^2(k)\hat{A}_i^T\hat{P}(k)\hat{A}_i \\
&\quad +\sum_{\substack{i,j=0\\ i>j}}^{m}\lambda_i(k)\lambda_j(k)(\hat{A}_i^T\hat{P}(k)\hat{A}_j+\hat{A}_j^T\hat{P}(k)\hat{A}_i)-\hat{P}(k)+\alpha I \\
&\le \sum_{i=0}^{m}\lambda_i^2(k)\hat{A}_i^T\hat{P}(k)\hat{A}_i \\
&\quad +\sum_{\substack{i,j=0\\ i>j}}^{m}\lambda_i(k)\lambda_j(k)(\hat{A}_i^T\hat{P}(k)\hat{A}_i+\hat{A}_j^T\hat{P}(k)\hat{A}_j)-\hat{P}(k)+\alpha I \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\lambda_i(k)\lambda_j(k)\hat{A}_i^T\hat{P}(k)\hat{A}_i-\hat{P}(k)+\alpha I \\
&= \sum_{j=0}^{m}\lambda_j(k)\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(k)(\hat{A}_i^T\hat{P}(k)\hat{A}_i-\hat{P}(k)+\alpha I) \\
&= \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(k)(\hat{A}_i^T\hat{P}(k)\hat{A}_i-\hat{P}(k)+\alpha I) \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\lambda_i(k)\lambda_j(k)(\hat{A}_i^T\hat{P}_j\hat{A}_i-\hat{P}_j+\alpha I) \\
&\le \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\lambda_i(k)\lambda_j(k)(-\epsilon I) \\
&= -\epsilon I.
\end{aligned} \tag{41}$$

따라서 (36)을 만족하면 $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(k)\le 1$ 을 만족하는 모든 $\hat{A}(k)$의 영역에서도 (38)이 성립한다. ∇∇∇

이산시간 시스템의 경우에도 연속시간 시스템의 경우와 비슷한 방법으로 P_0, P_i, α 등을 결정할 수 있다.

3. 토 의

본 논문에서 제시한 천천히 변하는 시스템의 안정도 영역에 관한 정리들은 실제로 안정도 영역을 구하는데 있어서 Desoer [4,5]가 제시한 방법보다 훨씬 복잡하다. 그러나 Desoer의 방법에서는 (2)로 주어진 A(t)의 미분치 $\dot{a}_M$이 (1), (3)으로 주어진 a_M, σ_0에 대해 $\dot{a}_M=f(a_M,\sigma_0)$ 형태로 고정되어 있고, 미분치 한계가 커질 때, 즉 $\dot{a}_M\to\infty$ 이면 $\sigma_0\to\infty$ 이므로 안정도 영역이 없어지게 된다. 그러나 미분치 한계가 매우 작을 경우, 즉 $\dot{a}_M\to 0$ 이면 $\sigma_0\to 0$ 이 되어 안정도 영역이 매우 넓어진다. 본 논문의 방법은 $\dot{a}_M\to\infty$, 또는 $\dot{a}_M\to 0$, 어느 경우에나 안정도 영역을 구할 수 있으므로 $\dot{a}_M$이 비교적 클 때는 Desoer의 방법보다 더 넓은 안정도 영역을 구할 수 있을 것으로 보인다.

본 논문의 방법은 $\tilde{P}_i=0$ 으로 놓으면 $\alpha=0$ 이 되어 미분치 한계가 없는 경우에 대한 최[3]의 결과와 같다.

참 고 문 헌

[1] R.K. Yedavalli, "Improved measures of stability robustness for linear state space models," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, pp. 577-579, June, 1985.

[2] K. Zhou and P.P. Khargonekar, "Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, pp. 621-623, July, 1987.

[3] 최종호, 장태정, "선형 시변 시스템의 안정도 영역에 관하여," 전기학회 논문지, 37권 7호, pp. 484-489, July, 1988.

[4] C.A. Desoer, "Slowly varying system x=A(t)x," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-14, pp. 780-781, Dec., 1969.

[5] C.A. Desoer, "Slowly varying discrete system $x_{i+1} = A_i x_i$," Electronics Letters, vol. 6, May, 1970.