

시간지연이 있는 대규모 이산시간 시스템의 상태궤환 최적제어

김 경 언 , 전 기 준
경북대학교 공과대학 전자공학과

State Feedback Optimal Control of Large-Scale Discrete-Time
Systems with Time-Delays

Kyung Youn Kim and Gi Joon Jeon

Department of Electronics, Kyung Pook National University

Abstract

A decentralised computational procedure is proposed for the optimal feedback gain matrix of large-scale discrete-time systems with time-delays. The constant feedback gain matrix is computed from the optimal state and input trajectories obtained hierarchically by the interaction prediction method. All the calculation in this approach are done off-line. The resulting gains are optimal for all the initial conditions. The interaction prediction method is applied to time-delay large-scale systems with general structures by extending the dimensions of coupling matrices. A numerical example illustrates the algorithm.

1. 서 론

실제의 많은 산업공정 시스템들은 상태변수 및 제어입력에 시간지연을 갖는다. 이러한 시스템의 차원을 증가시키지 않고 최적해를 구하기 위하여 많은 연구가 진행되어 왔다[1-3]. 특히 교통망, 제철공정 및 화학공정 등[4-8]과 같이 여러개의 부시스템들이 시간지연을 가지고 서로 유기적으로 연결되어 있는 대규모 시스템의 최적해를 구하기 위해서는 전체 시스템에 대한 Riccati 방정식의 해를 구하는 방법으로는 많은 계산 시간과 큰 기억용량이 요구된다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여 Tamura[9]는 하위계층에서 여러시간 간격으로 계산과정을 분리하고 상위계층에서 전체 시스템을 최적화하는 방향으로 수정

하는 계층적 시간지연 알고리즘을 제안하였다. 그러나 이 방법은 개루프제어이므로 시스템의 초기치가 변할 때마다 off-line 알고리즘을 반복 수행 해야하며 상위계층에서 기울기 방법을 사용하므로 step length α 값을 찾기 힘들고 수렴속도가 비교적 느리다.

이 연구에서는 상호작용 예측방법[10]에 기초하여 시스템의 초기치에 무관한 페루프 제어를 구성하였다. 제안한 알고리즘은 결합행렬을 5차원으로 확장하므로서 부시스템들의 결합구조에 제약을 받지않으며 기울기 방법을 사용하지 않으므로 상위계층의 조정법칙이 간단하다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 Tamura 알고리즘에 비해 수렴속도가 빠름을 확인하였다.

2. 문제의 설정

여러개의 부시스템들이 상태변수 및 제어입력에 시간지연을 가지고 서로 유기적으로 연결된 대규모 시스템은 전체적으로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A X(k) + A X(k-1) + \dots + A X(k-\Theta) \\ &\quad + B U(k) + B U(k-1) + \dots + B U(k-\Theta)(1-a) \\ X(0) &= X_0, \quad X(k) = U(k) = 0 \quad \text{for } k < 0 \end{aligned} \quad (1-b)$$

여기서 $X(k)$ 는 n 차원 상태변수, $U(k)$ 는 m 차원 제어입력, Θ 는 최대 시간지연 계수이며 $A_i (i=0,1,\dots,\Theta)$ 는 $n \times n$ 차원 시스템 행렬, $B_i (i=0,1,\dots,\Theta)$ 는 $n \times m$ 차원 입력행렬이다. 그리고 실제적인 대부분의 시스템은 상태변수 및 제어입력에 다음과 같은 제약조건을 갖는다.

$$\min_{i} X(k) \leq X(k) \leq \max_{i} X(k) \quad (k=0,1,\dots,kf-1) \quad (2-a)$$

$$\min_{i} U(k) \leq U(k) \leq \max_{i} U(k) \quad (k=0,1,\dots,kf-1) \quad (2-b)$$

성능지수를 다음과 같이 정의한다.

$$J = \frac{1}{2} \|X(k)\|_Q^2 + \sum_{k=0}^{kf-1} \frac{1}{2} \{ \|x(k)\|_Q^2 + \|u(k)\|_R^2 \} \quad (3)$$

여기서 Q 및 Q 는 반양한정 행렬, R 는 양한정 행렬이며 모두 불변대각행렬로 가정한다. 전체 시스템의 최적화 문제는 식(1) 및 (2)를 만족하면서 식(3)을 최소화 하는 $U(k)$ 를 구하는 것으로 규정한다.

3. 개루프 제어

식 (1)을 다음과 같이 각 부시스템별로 표시한다.

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + z_i(k) \quad (4-a)$$

$$z_i(k) = \sum_{j=1}^{N_s} \{ \sum_{s=0}^{\Theta} [L_{i,j,s} x_i(k-s) + M_{i,j,s} u_i(k-s)] \} \quad (j \neq i, \text{if } s=0) \quad (4-b)$$

$$x_i(0) = x_{i0}, x_i(k) = u_i(k) = 0 \text{ for } k < 0 \quad (4-c)$$

여기서 N_s 는 부시스템의 수이며 x_i 는 n_i 차원 상태변수, u_i 는 m_i 차원 제어입력, z_i 는 n_i 차원 상호작용변수, $L_{i,j,s}$ 는 $n_i \times n_j$ 차원 상태변수 결합행렬, $M_{i,j,s}$ 는 $n_i \times m_j$ 차원 제어입력 결합행렬이며 $n = \sum_{i=1}^{N_s} n_i$, $m = \sum_{i=1}^{N_s} m_i$ 이다. 또한 식 (2)의 상태변수 및 제어입력의 제약조건도 다음과 같이 부시스템별로 표시할 수 있다.

$$\min_{i} x_i(k) \leq x_i(k) \leq \max_{i} x_i(k) \quad (k=0,1,\dots,kf-1) \quad (5-a)$$

$$\min_{i} u_i(k) \leq u_i(k) \leq \max_{i} u_i(k) \quad (k=0,1,\dots,kf-1) \quad (5-b)$$

한편 전체 시스템의 성능지수 식 (3)도 다음과 같이 각 부시스템의 성능지수로 표시할 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} \|x_i(kf)\|_Q^2 + \sum_{k=0}^{kf-1} \frac{1}{2} \{ \|x_i(k)\|_Q^2 + \|u_i(k)\|_R^2 \} \quad (6)$$

여기서 Q_i 및 Q_i 는 반양한정행렬, R_i 는 양한정행렬로 가정하며 이들은 다음과 같다.

$$Q = \text{diag} [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_{N_s}] \quad (7-a)$$

$$Q = \text{diag} [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_{N_s}] \quad (7-b)$$

$$R = \text{diag} [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_{N_s}] \quad (7-c)$$

이때 전체시스템의 성능지수 J 는 부시스템의 성능지수 J_i 의 합이 된다. 즉,

$$J = \sum_{i=1}^{N_s} J_i \quad (8)$$

각 부시스템들의 상태변수 및 제어입력이 시간지연을 가지고 서로 유기적으로 연결된 대규모시스템을 각 부시스템별로 제어하기 위하여 다음 그림 1 과 같이 하위계층에서 N_s 개의 부시스템 식(4)를 만족하면서 식(6)을 최소화하고 상위계층에서는 하위계층에서 구한 변수들을 이용하여 전체 시스템 식(1)을 만족하면서 식(3)을 최소화하는 방향으로 수정하여 다시 하위계층으로 보내는 상호작용 예측방법을 이용한다.

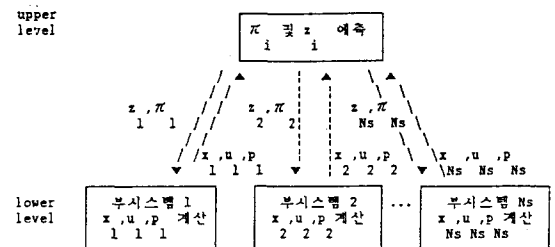


그림 1. 상호작용 예측방법에 의한 계층적 구조

Fig 1. Hierarchical structure based on interaction prediction method

하위계층에서의 최적화를 위하여 i 번째 부시스템에 대한 Hamiltonian 함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_i = \frac{1}{2} \|x_i(k)\|_Q^2 + \frac{1}{2} \|u_i(k)\|_R^2 + \pi_i(k) z_i(k) - \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{s=0}^{\Theta} \pi_j(k+s) \{ L_{i,j,s} x_i(k) + M_{i,j,s} u_i(k) \} \quad (j \neq i, \text{if } s=0)$$

$$+ p_i^T(k+1) [A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + z_i(k)] \quad (9-a)$$

$$\pi_i(k) = 0, \quad k \geq kf \quad (9-b)$$

여기서 π_i 는 n 차원 Lagrange multiplier 벡터이고 p_i 는 n 차원의 부상태(costate) 벡터이다. 따라서 부시스템의 최적화를 위한 필요조건은 다음과 같다.

$$i) \quad \dot{x}_i(k+1) = \frac{\partial H_i}{\partial p_i(k+1)}$$

에서

$$\dot{x}_i(k+1) = \text{Sat1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + z_i(k)] \right\} \quad (10-a)$$

$$x_i(0) = x_{i0} \quad (10-b)$$

여기서

$$\text{Sat1}(J) = \begin{cases} x_{i,\max} & \text{if } J > x_{i,\max} \\ J & \text{if } x_{i,\min} \leq J \leq x_{i,\max} \\ x_{i,\min} & \text{if } J < x_{i,\min} \end{cases} \quad (11)$$

$$ii) \quad \frac{\partial H_i}{\partial u_i(k)} = 0$$

에서

$$u_i(k) = \text{Sat2} \left\{ -R_i^{-1} [B_i^T p_i(k+1) + M_i^T \pi_i(k+s)] \right\} \quad (12-a)$$

$$- \sum_{j=1}^{N_s} \left(\sum_{s=0}^{\Theta} M_{j,i,s}^T \pi_i(k+s) \right) \quad (j \neq i, \text{if } s=0)$$

$$\pi_i(k) = 0, \quad k \geq kf \quad (12-b)$$

여기서

$$\text{Sat2}(\sigma) = \begin{cases} u_{i,\max} & \text{if } \sigma > u_{i,\max} \\ \sigma & \text{if } u_{i,\min} \leq \sigma \leq u_{i,\max} \\ u_{i,\min} & \text{if } \sigma < u_{i,\min} \end{cases} \quad (13)$$

$$iii) \quad \frac{\partial H_i}{\partial x_i(k)} = p_i(k)$$

에서

$$p_i(k) = Q_i x_i(k) + A_i^T p_i(k+1)$$

$$- \sum_{j=1}^{N_s} \left\{ \sum_{s=0}^{\Theta} L_{j,i,s}^T \pi_i(k+s) \right\} \quad (j \neq i, \text{if } s=0) \quad (14-a)$$

$$p_i(kf) = Q_{fi} x_i(kf) \quad (14-b)$$

따라서 부시스템의 성능지수 식 (6)을 최소화 하는 $x_i(k)$ 및 $p_i(k)$ 를 식 (10), (12) 및 식 (14)에 의하여 구하여 상위계층으로 보낸다.

한편 상위계층에서 전체시스템의 최적화를 위하여 쌍대함수(dual function)를 다음과 같이 정의하자.

$$\phi(\pi) = \text{Min} \{ L(x, u, z, \pi) \text{ subject to (1)} \} \quad (i=1, 2, \dots, N_s) \quad (15)$$

여기서 Lagrangian L은

$$L(x, u, z, \pi) = \sum_{i=1}^{N_s} \left\{ \frac{1}{2} \|x_i(kf)\|_Q^2 + \sum_{k=0}^{kf-1} \left[\frac{1}{2} \|x_i(k)\|_i^2 + \frac{1}{2} \|u_i(k)\|_R^2 + \pi_i^T(k) \{ z_i(k) - \sum_{j=1}^{N_s} \left(\sum_{s=0}^{\Theta} L_{j,i,s} x_i(k+s) + M_{i,i,s}^T u_i(k-s) \right) + p_i(k+1) (-x_i(k+1) + A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + z_i(k)) \} \right] \right\} \quad (16)$$

이다.

Strong Lagrange duality 정리[11]에 의하면

$$\text{Max}_i \phi(\pi) = \text{Min}_i J, \quad i=1, 2, \dots, N_s \quad (17)$$

이다.

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \quad (18-a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_i} = 0 \quad (18-b)$$

가 되며 이들로 부터 아래와 같은 상위계층에서의 조정법칙을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \pi_i(k) \\ z_i(k) \end{bmatrix}^{L+1} = \begin{bmatrix} -p_i(k+1) \\ Ns_i \Theta \\ \sum_{j=1}^L \sum_{s=0}^{k-j} \{ x_{i,j,s}(k-s) + M_{i,j,s} u_{i,j,s}(k-s) \} \\ (j \neq i, \text{ if } s=0) \end{bmatrix}^L \quad (19)$$

여기서 L은 반복지수이다.

4. 개루프 알고리즘

알장의 개루프 제어법칙을 알고리즘으로 나타내면 다음과 같다.

i) 처음 조정순간 상위계층에서 $z_i(k)$ 및 $\pi_i(k)$ ($i=1,2,\dots,Ns, k=0,1,\dots,kf-1$)로 초기치를 설정하여 하위계층으로 보낸다.

ii) 하위계층에서 식(10)-(14)를 이용하여 $u_i(k)$, $x_i(k)$ 및 $p_i(k)$ ($i=1,2,\dots,Ns, k=0,1,\dots,kf-1$)를 계산하여 상위계층으로 보낸다.

iii) 상위계층에서 식 (19)를 이용하여 $\pi_i(k)$ 및 $z_i(k)$ 를 수정하여 하위계층으로 보낸다.

iv) 상위계층에서 두 변수의 변화가 충분히 작을 때 까지 ii) - iii) 의 과정을 반복한다.

v) 최종적으로 제어입력 $u_i(k)$ 및 상태변수 $x_i(k)$ ($i=1,2,\dots,Ns, k=0,1,\dots,kf-1$)를 구한다.

5. 페루프 귀환이득의 계산

일반적인 최적제어 이론으로 부터 무한조정기(infinite stage regulator)에 대한 제어법칙은 다음과 같다.

$$U^*(k) = G^* X^*(k) \quad (20)$$

여기서 *는 개루프 알고리즘을 반복 수행하여 수렴한 최적값을 의미한다. 식 (20)을 전체 시스템에 대한 상태방정식, 식 (1)에 대입하면

$$X(k+1) = \sum_{s=0}^{\Theta} \{ A_s + B_s G \} X(k-s) \quad (21)$$

이다. 따라서 페루프 귀환이득 G를 off-line 으로 구하여 on-line 으로 상태변수 궤적을 구하는 과정을 요약하면 다음과 같다.

i) n개의 0이 아닌 임의의 초기치 $X^*(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ X^*(0) \end{bmatrix}$ $X^*(0) \dots X^*(0)$ 으로부터 개루프 알고리즘을 n번 반복 수행하여 $U^*(0) = \begin{bmatrix} U^*(0) & U^*(0) & \dots & U^*(0) \end{bmatrix}$ 를 구한다.

ii) $G^* = U^*(0) X^*(0)^{-1}$ 를 구한다. 이때 i) 에서 $X^*(0) = I$ 으로 초기치를 설정하면 $X^*(0)$ 의 역행렬을 계산할 필요없이 $G^* = U^*(0)$ 가 된다.

iii) ii)에서 구한 G^* 를 식 (20) 및 (21)에 대입하여 $U^*(k)$ 및 $X^*(k)$ 를 구한다.

6. 시뮬레이션 결과 및 고찰

세개의 부시스템들이 상태변수 및 제어입력에 시간지연을 갖고 서로 유기적으로 연결된 다음과 같은 대규모 시스템을 예제로서 선택하였다.

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \begin{bmatrix} .670 & .000 \\ .319 & .607 \end{bmatrix} x_1(k) + \begin{bmatrix} .025 & .000 \\ .000 & .025 \end{bmatrix} x_3(k) \\ &+ \begin{bmatrix} .025 & .000 \\ .000 & .025 \end{bmatrix} x_1(k-1) + \begin{bmatrix} .329 & .000 \\ .075 & .787 \end{bmatrix} u_1(k) \\ &+ \begin{bmatrix} .025 & .000 \\ .000 & .025 \end{bmatrix} u_1(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= \begin{bmatrix} .670 & .000 \\ .329 & .607 \end{bmatrix} x_2(k) + \begin{bmatrix} .329 & .000 \\ .000 & .075 \end{bmatrix} x_1(k-1) \\ &+ \begin{bmatrix} .000 & .000 \\ .000 & .787 \end{bmatrix} u_2(k) + \begin{bmatrix} .025 & .000 \\ .000 & .025 \end{bmatrix} u_3(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(k+1) &= \begin{bmatrix} .025 & .000 \\ .000 & .025 \end{bmatrix} x_3(k) + \begin{bmatrix} .670 & .000 \\ .319 & .607 \end{bmatrix} x_3(k) \\ &+ \begin{bmatrix} .329 & .000 \\ .000 & .075 \end{bmatrix} x_2(k-1) + \begin{bmatrix} .025 & .000 \\ .000 & .025 \end{bmatrix} x_3(k-1) \\ &+ \begin{bmatrix} .025 & .000 \\ .000 & .025 \end{bmatrix} u_2(k) + \begin{bmatrix} .000 & .000 \\ .000 & .787 \end{bmatrix} u_3(k) \end{aligned}$$

여기서 $Ns=3, \Theta=1, n=2, m=2$ 이며, $-5 \leq x_i(k) \leq 10$,

$-5 \leq u_i(k) \leq 5$ ($i=1,2,3, k=0,1,\dots,kf-1$), $x_i(0) =$
 $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 10 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $x_i(0) = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $Q = Q = I$, $R = R = I$,
 $R = 100I$, $kf=25$ 및 $\delta=10$ 으로 정하였다.

이 예제를 개루프 알고리즘에 적용한 결과 각 초기치에 대하여 20번 반복후에 수렴하였으며 그 결과를 이용하여 구한 페루프 게환이득 G 는 다음과 같다.

$$G = \begin{bmatrix} -0.0208 & -0.0024 & -0.0075 & -0.0005 & -0.0028 & -0.0004 \\ -0.0085 & -0.0082 & -0.0013 & -0.0004 & -0.0006 & -0.0006 \\ -0.0023 & -0.0010 & -0.0081 & -0.0079 & -0.0017 & -0.0009 \\ -0.0024 & -0.0002 & -0.0013 & -0.0001 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0014 & -0.0006 & -0.0027 & -0.0016 & -0.0072 & -0.0079 \end{bmatrix}$$

이 값을 이용하여 구한 상태변수 및 제어입력의 최적 궤적은 다음 그림 2 및 그림 3과 같다.

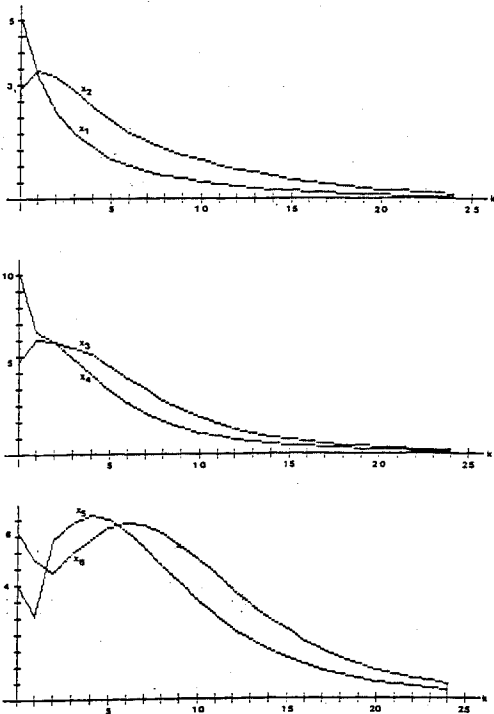


그림 2. 제안한 알고리즘에 의한 상태변수 최적궤적
 Fig 2. Optimal trajectories of state variables by the proposed algorithm

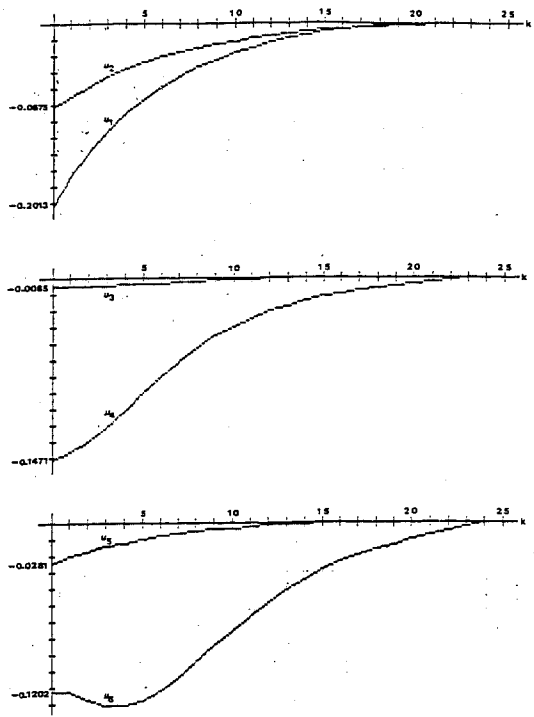


그림 3. 제안한 알고리즘에 의한 제어입력 최적궤적
 Fig 3. Optimal trajectories of the control inputs by the proposed algorithm

한편 step length $\alpha=0.75$ 로 하여 Tamura가 제안한 계층적 시간지연 알고리즘을 적용하여 83번 반복후에 수렴하였으며 제안한 알고리즘과 거의 유사한 조정기 성능을 가짐을 확인하였다.

7. 결론

상호작용 예측방법에 기초하여 상태변수 및 제어입력에 시간지연을 가지고 서로 유기적으로 연결된 대규모 시스템의 효과적인 계층적 최적제어 개루프 알고리즘 및 페루프 알고리즘을 제안하였다. 제안한 개루프 알고리즘은 부시스템들의 결합구조에 제약을 받지 않으며 step length α 를 선정할 필요가 없기 때문에 상위 계층의 알고리즘이 간단하며 비교적 수렴속도가 빠르다. 개루프 알고리즘을 반복 수행하여 상수게환이득행렬을 구하여 페루프 제어기를 구성하였으며 이는 Riccati 방정식을 풀어야 하는 일반적인 최적제어 방법보다 계산시간 및 기억용량을 현저히 줄일 수 있다.

참 고 문 헌

1. Jamshidi, M. and M. Malek-Zavarei, "Suboptimal Design of Linear Control System with Time-Delay," Proc. of the IEE, Vol.119,257-261,1973
2. Malek-Zavarei, M., "Suboptimal Control of Systems with Multiple Delays," J. of Optimization Theory and Applications, Vol.30,621-633,1980
3. Malek-Zavarei, M. and M. Jamshidi, Time-Delay Systems Analysis, Optimization and Applications, North-Holland Publish Company, Amsterdam, 1987
4. Tamura, H., "Decentralized Optimization for Distributed-Lag Models of Discrete Systems," Automatica, Vol.11,593-602,1975
5. Singh, M. G. and H. Tamura, "Modelling and Hierarchical Optimization for Oversaturated Urban Road Traffic Networks," Int. J. Control, Vol.20, No.6, 913-934, 1974
6. Lim, J. H., Hwang, S. H., Suh, I. H. and Z. Bien, "Hierarchical Optimal Control of Oversaturated Urban Traffic Networks," Int. J. Control, Vol. 34, No.4, 727-737, 1981
7. Park, E. S., Lim, J. H., Suh, I. H. and Z. Bien, "Hierarchical Optimal Control of Urban Traffic Networks," Int. J. Control, Vol.40, No.4, 813-829, 1984
8. Sing, M. G., Dynamical Hierarchical Control, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980
9. Tamura, H., "A Discrete Dynamical Model with Distributed Transport Delays and Its Hierarchical Optimization for Preserving Stream Quality," IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol.SMC-4, No.5, 1974
10. Jamshidi, M., Large-Scale Systems Modelling and Control, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1983
11. Singh, M. G. and A. Tilti, Systems Decomposition, Optimization and Control, Pergamon Press, Oxford, 1978