

슬라이딩 모드를 이용한 새로운 제어계통 설계방법

박 귀태, ° 과 근평, 김 동식, 주 영중
고려대학교 전기공학과

A New Approach to Control System Design Using Sliding Mode

Gwi-Tae Park, Chun-Ping Kuo, Dong-Sik kim, Young-Jung Ju
Korea Univ.

ABSTRACT

In this paper we present a new method to control system design using a sliding mode. The objective of this research is to develop the algorithm for the sliding mode control which is able to remove the chattering phenomina and to reduce the reaching phase.

To accomplish this approach we introduce switching dynamics instead of switching logics to obtain the sliding mode. consequently, we can obtain the new design approach which is much simpler than the VSS theory. And there do not exist chattering phenomina in this method because the obtained control input are continuous. Simultaneously we can reduce the reaching phase by a suitable choice of design factor. Numerical examples are discussed as illustration.

1. 서 론

가변구조계 이론은 스위칭 조직에 따라 계통의 구조를 변화 시킴으로서 제어계통에 슬라이딩 모드라는 독특한 동태를 도입한 다. 계통이 슬라이딩 모드내에 있을때는 계통의 응답은 계통의 파라미터 변동과 외란에 대해서 둔감하다. 이러한 가변구조계 이론은 우선 알고리즘이 간단하며, 안정도를 보장 받을수 있을뿐만 아니라 제어기의 물리적인 실현이 용이하기 때문에 실시간 제어에 유리하다는 장점을 가지고 있다. 1), 2)

가변구조계 이론이 이와같은 장점도 가지고 있으나 입력 및 상태의 심한진동(chattering)현상과 계통이 슬라이딩 모드내에 까지 들어가는데 걸리는 시간 즉 reaching phase 문제도 가지고 있어서 이를 제거하는 연구도 수행되고 있다. 3)-7)

Young은 reaching phase를 감소시키기 위해 high-gain feedback system을 제시하였으나 계통의 안정도 문제가 대두

되었다. 3) Harashima는 서번 스위칭 평면을 도입하여 reaching phase를 감소시켰으나 계통의 진동현상은 제거하지 못했다. 4)

Ambrosino, Slotine, Zinober등은 스위칭 평면의 근방에 경계층을 설정하여 이러한 경계층내에서는 불연속치 제어입력을 연속치로 바꾸어 주어 계통의 진동현상을 제거하였다. 5)-7)

따라서 본 논문에서는 이러한 단점들을 제거하기 위하여 기존의 가변구조계 이론의 스위칭 로직 대신 슬라이딩 모드를 얻기 위한 새로운 스위칭 동태방정식(switching dynamics)을 정의 하여 계통의 reaching phase를 감소시키고 진동현상을 제거하는 새로운 제어계통 설계방법을 제시한다. 제안된 알고리즘은 가변구조계 이론보다 제어기의 설계가 간단하고 스위칭 동태 방정식의 설계인자를 적절히 선정하므로서 계통의 상태가 스위칭 평면을 따라 진행되는 동안 거의 이상적인 슬라이딩 모드를 얻을 수 있다.

2. 가변구조 제어이론에 의한 제어계통 설계

다음과 같이 주어진 조정기계통 (regalator system)을 생각 하자.

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t) \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R^m$ 은 각각 상태 및 입력벡터이다. $n > m$ 이고 B 가 rank m 이면 (A, B) 쌍은 완전히 제어가능하다. 행렬

A 는 프렌트 파라미터의 변동을 나타낸다. B 는 프렌트와 제어기 사이의 파라미터 변동을 나타낸다. 가변구조 조정기의 제어설계목적은 임의의 초기 조건 $x(0) = x_0$ 로 부터 $t \rightarrow \infty$ 이면 상태가 점근적으로 원점으로 가게 해주는 것이다.

초평면 hyperplane S_j 는 식(2)와 같이 정의한다.

$$S_j = \{x: C_j x = 0\} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

여기서 $C_j \in R^{1 \times n}$ 는 행벡터 (row rector)이다.

만약 상태가 동시에 각 초평면 S_j 에 놓여진다면 이상적인 슬라이딩 모드가 일어난다. 즉 이러한 이상적인 슬라이딩 모드는 상태가 식(3)으로 표현되는 스위칭 평면 s 에 도달하여 머물게 되면 일어난다.

$$S = \{x: Cx = 0\} \quad (3)$$

슬라이딩 모드는 $t > t_s$ 에 대해 식(3)으로 부터 결정된다.

여기서 t_s 는 상태가 스위칭 평면에 도달하는 시간이다.

먼저 파라미터 변동이 없는 경우에 대해서 생각하자. 즉 $\Delta A=0$, $\Delta B=0$. 식(3)을 시간 t 에 대해 미분하여 식(1)을 대입하면 다음과 같다.

$$C\dot{X}(t) = CAX(t) + CBU(t) = 0 \quad t > t_s \quad (4)$$

동가제어 입력 U_{eq} 는 식(5)와 같은 선형 피이드백의 형태로 나타낼 수 있다.

$$U_{eq}(t) = -KX(t) \quad (5)$$

여기서 $K \in R^{m \times n}$ 는 피이드백 행렬로서 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = (CB)^{-1}CA \quad (6)$$

이상으로 부터 슬라이딩 모드에서 페루우프 계통의 동태방정식은 식(7)로 나타낼 수 있다.

$$\dot{X}(t) = A_{eq}X(t) = [I_n - B(CB)^{-1}C]AX(t) \quad (t > t_s) \quad (7)$$

식(7)로 부터 슬라이딩 모우선은 실제 계통의 제어입력 u 와는 독립적으로 단지 스위칭 표면 행렬 C 의 선택에 달려 있다는 것을 알 수 있다. 제어입력 u 는 상태를 스위칭 평면으로 이끌어 이 평면에 머물게 한다. 상태벡터를 원점으로 수렴시키는 것은 식(6)으로 표현되는 피이드 백 행렬 K 의 적절한 선택에 달려있다.

슬라이딩 모드를 선택하는데 있어 가변구조제어 기법의 대부분은 극점배치법을 사용하여 스위칭 행렬 C 를 선택한다. 스칼라 계통에 있어서는 하나의 스위칭 평면을 결정하려면 단지 $n-1$ 개의 극점을 배치하면 된다. 다변수 계통인 경우 VSS이론에 의해 스위칭 이득을 구하려면 스위칭 표면 행렬 C 의 선택이 매우 중요하다. 다변수 계통인 경우 행렬 C 를 Zinober 방법에 의해 구하기도 하나 δ , ρ , 일반적으로 행렬 C 는 계통이 슬라이딩 모드내에 있을때 계통의 고유치가 주파수 영역에서 평면의 좌반면에 놓이도록 선택한다.

슬라이딩 모드가 일어나기 위해서는 스위칭 평면 근방에 있는 모든 상태궤적들은 모두 이 평면으로 향해야 한다. 따라서 슬라이딩 모드가 일어날 조건은 다음과 같다.

$$\lim_{s_j \rightarrow 0^+} \frac{ds_j}{dt} < 0 < \lim_{s_j \rightarrow 0^-} \frac{ds_j}{dt} \quad (8)$$

식(8)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{s_j \rightarrow 0} s_j \dot{s}_j < 0 \quad (9)$$

일반적으로 가변구조제어계는 2가지 성분으로 구성되어 있다.

즉 선형입력성분 U_L 과 chattering입력 성분 U_N 이 전체 제어입력 U 를 구성한다. 선형제어 입력은 상태의 선형 피이드백 입력 $U_L = U_{eq} = -KX$ 이고 반면에 chattering 입력 $U_N = -\Delta KX$ 는 계통의 상태를 식(9)가 만족되도록 원점으로 스위칭 해주는 제어 입력이다. 그러므로 전체 제어 입력은 식(10)으로 나타낼 수 있다.

$$U = U_L + U_N = -(K + \Delta K)X \quad (10)$$

여기서 $K \in R^{m \times n}$ 는 스위칭 이득 벡터이고 U_N 은 상태가 스위칭 평면에서 벗어나있는 경우 상태를 스위칭 평면상으로 되돌려 보내는 입력이다.

이제 식(10)과 같은 제어입력 U 에 대해 고정이득 k 와 스위칭 이득 Δk 를 구해보자. 식(3), (4), (9)로 부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$\dot{S} = C\dot{X} = (CA - CBK)X - CB\Delta kX \quad (11)$$

식(11)에서 이득 k 와 k 는 스위칭 함수 s 와 그의 1차 미분치 \dot{s} 의 값이 항상 식(9)를 만족하도록 선정된다. 만약 $(CB)^{-1}$ 가 존재하고 $CB > 0$ 이면 k 와 Δk 는 다음과 같이 정할 수 있다.

$$K = (CB)^{-1}CA \quad (12)$$

$$\Delta k = \begin{cases} \alpha_i & x_i s > 0 \\ \beta_i & x_i s < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13a)$$

$$\quad (13b)$$

여기서 $\alpha_i \in R^{n \times 1}$ 은 양수이고 $\beta_i \in R^{n \times 1}$ 는 음수이다. 만약

행렬 A 와 B 에 파라미터 변동이 있으면 앞에서와 같은 방법으로 k 와 k 를 구할 수 있다. 즉 $(CB)^{-1}$ 가 존재하고 $CB > 0$ 인 경우

$$K = (CB)^{-1}CA \quad (14)$$

$$\Delta k = \begin{cases} \delta_i & x_i s > 0 \\ \rho_i & x_i s < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (15a)$$

$$\quad (15b)$$

여기서

$$\delta_i > \max_{\Delta A, \Delta B} \frac{C[A\Delta A(t) - \Delta B(t)(CB)^{-1}CA]}{[C(B + \Delta B(t))^{-1}]} \quad (16a)$$

$$\rho_i < \min_{\Delta A, \Delta B} \frac{C[A\Delta A(t) - \Delta B(t)(CB)^{-1}CA]}{[C(B + \Delta B(t))^{-1}]} \quad (16b)$$

식(13), (15)는 스위칭 이득 k 가 항상 슬라이딩 모드를 갖는 스위칭 로직 (switching logic)을 정해준다. 하지만 이러한 스위칭 이득에 의해 계통에는 바람직하지 못한 진동 (chattering) 현상이 일어난다. 즉 계통에 슬라이딩 모드가 일어나는 동안 입력 및 상태 궤적의 심한 진동현상이 나타난다. 이것은 가변 구조계 이론이 안고 있는 근본적인 문제이다. 식(10)의 제어입력은 식(13), (15)의 스위칭으로 인해 근본적으로 불연속이며 이러한 불연속인 입력으로 인해 상태 및 입력의 고주파 진동 현상이 모델 과정에서 무시된 고주파 동특성을 여기 하므로서 전체 계통을 불안정하게 만든다. 가변구조계의 또하나의 단점은 상태공간에서 계통의 초기치가 선정되면 그 위치로 부터 스위칭 평면까지 오는 기간 즉 reaching phase 기간동안은 계통이 파라미터 변동과 외란에 민감하여 자칫 계통이 불안정해질 우려가 있다. 따라서 본 논문에서는 이러한 단점들을 제거하기 위한 새로운 제어 알고리즘을 다음장에서 제시하고자 한다.

3. 슬라이딩 모드를 이용한 새로운 제어계통 설계방법

제어입력이 불연속적인 것은 슬라이딩 모드를 얻기 위해 식(9)를 만족하도록 식(13), (15)에서 처럼 스위칭 이득을 스위칭 로직에 따라 바꾸어 주기 때문이다. 따라서 본 논문에서는 이러한 불연속치 제어입력에 의한 계통의 진동현상을 제거하기 위해 식(13), (15)와 같은 스위칭 로직 대신 식(9)의 조건을

만족하도록 다음과 같은 스위칭 동태 방정식을 정의한다.

$$\dot{S} = -\Gamma S \quad (17)$$

식(17)은 Γ 가 양인 경우 항상 식(9)의 조건을 만족하게 될 수 있다.

식(17)은 스위칭 함수의 **필차** 미분방정식으로 그해는 다음과 같다.

$$S(t) = S(0)e^{-\Gamma t} \quad (18a)$$

$$S(0) = CX(0) \quad (18b)$$

식(18)에 의해 스위칭 함수값은 Γ 에 따라 지수함수적으로 0으로 접근하게 되며 그 속도는 Γ 에 따라 다음을 알 수 있다. 여기서 Γ 는 설계인자로서 양의 실수를 갖도록 선정하며 Γ 값이 클수록 **reaching phase**를 감소시킬 수 있다.

이제 식(1)의 제어계통을 설계한다. 제어계통의 구성은 2장과 같다.

식(4)를 U 에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$U(t) = -(CB)^{-1}(CAX - C\dot{X}) \quad (19)$$

한편 식(3), (17)로부터

$$\dot{S} = C\dot{X} = -\Gamma S \quad (20a)$$

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m), \gamma_i > 0 \quad (20b)$$

이므로 식(19)은 다음과 같이 정리된다.

$$U = U_{eq} + \Delta U \quad (21)$$

$$U_{eq} = -GX = -(CB)^{-1}CAX \quad (22a)$$

$$\Delta U = -FX = -(CB)^{-1}\Gamma CX \quad (22b)$$

계통에 파라미터 변동이 있어도 식(21)의 제어입력에 의해 계통을 제어 할 수 있다.

식(21)의 두번째 항 ΔU 는 상태궤적이 스위칭 평면에서 벗어나 있는 경우 스위칭 평면으로 향하게 하는 제어 입력이며 식(18)에 의하여 S 가 0에 접근하므로 이 제어 입력은 곧 0이 되고 계통은 슬라이딩 모드내에 들어가게 된다. 식(21)의 나머지항은 계통이 슬라이딩 모드내에 있을때의 등가 제어입력이다.

이 설계방법에서는 결정해야 할 이득이 Γ 로서 m 개 밖에 없다. 식(22)의 G, F ,는 Γ 가 결정되면 곧바로 계산된다. 따라서 2장의 $2mn$ 개의 이득에 비하면 결정해야 할 이득이 아주 적고 그러므로 좋은 응답을 얻기 위한 이득 동조가 훨씬 쉽다 또한 본 방법에서는 스위칭 로직 대신 스위칭 동태방정식을 정의 했기 때문에 복잡한 스위칭 로직이 없어 물리적인 실현이 간편하다.

본 제어입력에는 진동현상이 없다. 왜냐하면 식(21)의 두번째 항의 입력 ΔU 에 의해 슬라이딩 모드에 들어가면 이상적인 슬라이딩 모드가 일어나며 스위칭 평면 근처에서 S 는 0에 가까운 값이 되므로 식(21)의 제어입력은 연속적인 입력이 되기 때문이다. 따라서 이 새로운 제어방법은 2장에서 언급한 가변구조계 이론의 단점을 모두 해결하고 있다.

4. 수치 예

본 장에서는 컴퓨터 모의실험을 통해서 2가지 방법으로 설계한 제어계통을 비교 검토하고자 한다. 식(24)와 같은 2차 계통의 제어계통을 설계한다.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad (23)$$

4.1. 가변구조계 이론에 의한 제어계통 설계

기존의 가변구조계 이론에 의한 설계 방법을 편의상 Algorithm I이라고 한다. 계통이 슬라이딩 모드내에 있을때 계통의 고유치들이 -1를 갖도록 C 를 선정하면 식(24)와 같으며 이때 스위칭 평면 S 는 식(25)과 같다.

$$C = [1 \quad 1] \quad (24)$$

$$S = CX = X_1 + X_2 = 0 \quad (25)$$

또 필요한 스위칭 이득 값들과 스위칭 로직들을 식(12), (13)에 의해서 구했으며 그 결과를 표1에 나타냈다.

표1. 가변구조제어시에 필요한 스위칭 이득값과 스위칭 로직
Table 1. Values of switching gains and switching logics, required in the variable structure control (Algorithm I)

fixed gains	values	switching gains	values	switching logics	gain limits
K_{11}	-6	ΔK_{11}	10	$x_1 S > 0$	0
			-8	$x_1 S < 0$	
K_{12}	-5	ΔK_{12}	10	$x_2 S > 0$	0
			-10	$x_2 S < 0$	

4.2. 새로운 설계방법에 의한 제어계통 설계

스위칭 평면 행렬 c 는 특성을 서로 비교하기 위해 식(24)와 같이 선정했다. 식(17)의 스위칭 동태방정식에 필요한 계수 r 는 알고리즘 I과의 비교를 위해서 각각 2, 5, 10으로 잡았으며 그결과를 정리하면 표2와 같다.

표2. 새로운 제어계통 설계방법에 필요한 이득값
Table 2. Values of gains required in the new design approach to control system (Algorithm II)

gains	G	F	γ
values	[-6 -5]	[2 2]	2
	[-6 -5]	[5 5]	5
	[-6 -5]	[10 10]	10

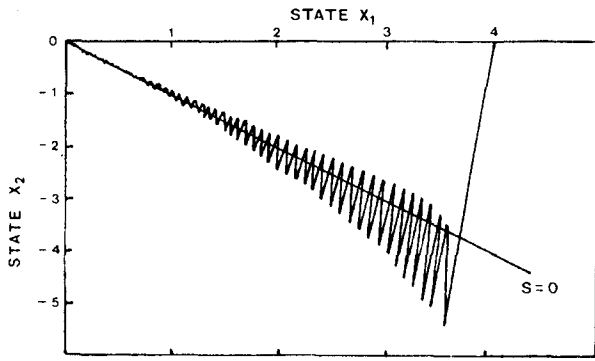


그림 1. 위상평면에서 가변구조제어 이론에 의한 상태 궤적
Fig 1. The state trajectory by variable structure control theory in phase plane (Algorithm I)

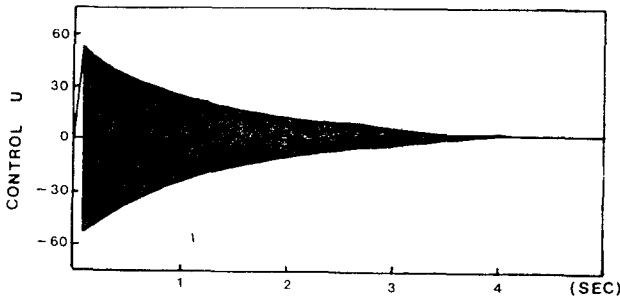


그림 2. 가변구조제어 이론에서의 불연속치 제어입력 U
Fig 2. Discontinuous control input U in the variable structure control theory (Algorithm I)

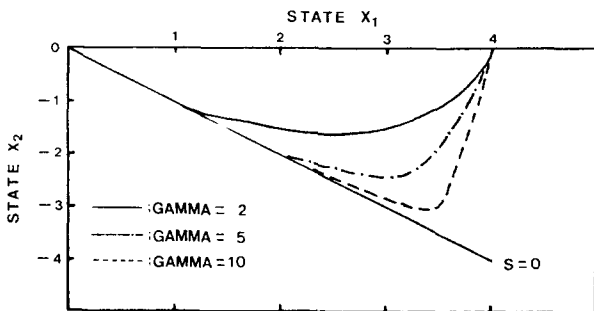


그림 3. 위상평면에서 새로운 제어계통 설계 방법에 의한 상태 궤적

Fig 3. The state trajectories by new design approach to control system in phase plane

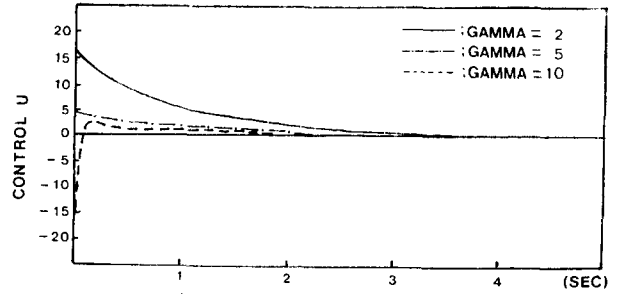


그림 4. 새로운 제어계통 설계방법에 의한 연속치 제어입력 U
Fig 4. Continuous control input U in the new design approach to control system (Algorithm II)

4.3. 검토

앞절에서 설계한 두 제어계통의 특성을 비교하기 위해서 디지털 컴퓨터로 모의 실험을 수행한 결과를 나타내면 그림 1-4와 같다. 이 그림들은 초기치가 $x(0)=[4 \ 0]^T$ 인 경우 조절기 제어문제시의 결과들이다. 계통이 슬라이딩 모드 내에 있을때 계통의 고유치가 -1이 되도록 식(25)의 스위칭 평면을 도입한 결과 상태변수들이 안정하게 0으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 표1에서 보면 그림1과 같은 응답을 얻기 위해 4개의 스위칭 이득을 동조해야 했으나 알고리즘 II에서는 단지 입력 수 만큼만 이득을 결정 해주면 되기 때문에 제어기의 설계가 간단하다. 본 논문에서는 r 를 조정해 주므로서 응답을 쉽게 조정할 수 있다. 그림2는 가변구조 이론에 의한 제어입력 신호를 나타낸 것이다. 제어입력은 불연속이며 심한진동 현상을 갖고 있다. 이러한 진동현상은 무시된 고주파 동특성을 여기하여 계통의 안정도에 나쁜 영향을 준다. 또 그림2에서 보면 제어입력이 시간이 약간 지난 후에 진동이 일어나는데 진동하기 직전까지 걸리는 시간을 reaching phase라고 한다. 이러한 reaching phase를 줄이기 위한 한가지 방법은 스위칭 이득 값을 증가 시키면 되나 반면에 진동현상은 더욱 더 고주파 특성을 갖게 된다. 그림4는 Algorithm II로 부터 얻은 제어입력을 나타낸다. 앞에서 언급했던 것처럼 제어입력은 연속이며 이러한 입력으로 인해 그림3에서 보듯이 상태궤적에는 진동현상이 전혀없다. r 값을 더욱 크게 하면 식(18a)에 의해 스위칭 함수 s 가 더욱 빨리 0으로 접근하므로 reaching phase를 줄일 수 있으나 반면에 입력 값이 커지며 상태궤적들의 오버 슈루트가 증가하는 경향이 있으므로 이점을 고려해서 r 값을 선정해야

한다.

본 논문에서는 슬라이딩 모드를 갖는 새로운 제어계통 설계 방법을 제시하였다. 계통의 치수가 커질수록 VSS이론을 적용 하기 위해서는 이득의 선정 및 동조에 많은 어려움이 있으며 또한 reaching phase 그리고 입력 신호와 상태변수계적 에 고주파 진동현상이 나타나는 단점들을 갖고 있다.

따라서 이러한 단점을 제거하기 위해 슬라이딩 모드를 얻기 위한 기존의 VSS이론에서의 스위칭 로직 대신 스위칭 동태방정식을 사용하는 새로운 설계방법을 제안하여 선형 시불변 및 시변계통에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- i) 본 논문의 제어 알고리즘에는 스위칭 로직이 없기 때문에 제어계통의 물리적 실현이 간단하다.
- ii) 본 방법에는 결정해야 할 계수가 입력 수 만큼만 필요하며 기존의 VSS이론에서의 스위칭 이득에 비하면 그수가 훨씬 적어 이득 동조가 쉽다.
- iii) reaching phase 기간을 단지 설계인자 Γ 에 의해 감소시킬 수 있었으며 VSS이론의 불연속 제어입력에 비해서 본 알고리즘의 제어입력은 연속이기 때문에 고주파 진동 현상이 없다.

6. 참 고 문 헌

- 1) A.J. Calise, K.V. Roman, "A servo compensator design approach for variable structure systems" IEEE American Control Conference, pp.1014-1019, 1982
- 2) N.N. Bengiamin B. Kauffmann, "variable structure position control", IEEE Contr, systems magazine, pp. 3-9, 1984.8
- 3) K.K.D. Young, P.V. Kokobovic, and V.I. Utkin, "A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems", IEEE Trans Automat. Contr., Vol.AC-22, pp. 931-938, 1977
- 4) F. Harashima, H. Hashimoto, and K. Maruyama, "Sliding mode control of manipulation with time-varying switching surfaces", Trans, of SICE, vol.22, No.3, pp.335-341, 1985
- 5) G. Ambrosino, G. Celentano, and F. Garofala, "Variable structure model reference adaptive control systems", Int.J. Contr., vol. 39 pp.1339-1349, 1984
- 6) J.J.E. Slotine and J.A. Coetsee, "Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems", Int.J.contr., vol.43, pp.1631-1651 1986
- 7) J.A. Burton and A.S.I. Zinober, "Continuous approximation of variable structure control",

Int.J.systems Sci, vol.17, No.6, pp.875-885, 1986

8) A.S.I. Zinober, C.M. Dorling, and Yang Xin Hua, "Design techniques for multivariable variable structure control systems", Proceedings of 25th conference on Decision and contr., Athens, pp.306-311, 1986.12

9) O.M.E. El-Ghezawi, A.S.I. Zinober, and S.A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach", INT, J.Contr., vol, 38, pp.657-671. 1983