

견고한 이산치 적응제어 알고리즘에 관한 연구

천 회영, 박 귀태, 박 승규, 이 중 럽

고려 대학교 전기공학과

A STUDY ON THE ROBUST DISCRETE ADAPTIVE CONTROL ALGORITHM

Hee Young Chun, Gwi Tae Park, Seung Kyu Park, Jong Yul Lee

Dept. of Electrical Eng. Korea University

Abstract

This paper presents a robust discrete MRAC with the discrete e_1 -modification. Discrete e_1 -modification is proposed by extending the Narendra's e_1 -modification to the discrete version. In this case the adaptive controller was reformed by Lyapunov's direct method. And the improved robustness by using this algorithm was showed by sector theory.

1. 서 론

외란과 비모형화 특성이 존재하는 경우 이에 대해 견고한 적응제어기를 구성하고자 하는 많은 연구가 행해졌는데 적응칙 (Adaptive law)에 변형을 가하므로써 이러한 결과를 크게 다음과 같이 나누어 볼 수 있다.

- 파라미터 제한 방식¹
- 사구간 (DEAD ZONE) 설치 방식²
- σ -변형 (MODIFICATION) 방법³

위 방법중 파라미터 제한 방식과, 사구간 설치 방식은 기준모델 적응제어 극배치 적응제어 등에 사용되고 있으며 연속치 계통과 이산치 계통 모두에 이용되고 있다. 그러나 이들 방법들에 있어서의 큰 제한 요소는 외란의 크기나 파라미터의 변동 범위를 알아야만 한다는 데 있다.

적응제어 계통의 견고성을 향상시켜 주는 방법에 있어서 위의 방법들이 엄격한 적응칙 제한 방법인데 반하여 σ -변형 방법은 부드러운 적응칙 제한 방법으로 오차나 파라미터의 변동 범위를 모르기도 사용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 σ -변형 방법은 외란이나 비모형화 특성이 존재하지 않는 경우에 정상 오차가 남으며, 폭발 (BURSTING) 현상이 발생한다.⁴

이에 대한 개선으로 Narendra는 오차에 따라서 파라미터의 적응속도를 제한 시켜 줄 수 있는 e_1 -변형방법을 제안하여 σ -변형 방법들의 단점을 보완할 수 있었다.⁵ 이제까지 이 방법은 연속치 계통에 한한 것이었는데 본 연구에서는 이산치 적응 제어계통의 견고성을 향상시켜 주는데 있어 연속치 계통에서의 e_1 -변형 적응 알고리즘 개념을 도입한 이산치 적응 알고리즘을 제안하며 그에 따른 적응 제어기를 LYAPUNOV 안정도 해석방법에 의해 구하였고 이에 따르는 견고성 향상을 보이는데 있어서 섹터 이론을 사용하였으며 아울러 컴퓨터 시뮬레이션으로 입증하였다.

2. 문 제 설 정

본 연구에서는 기준모델 적응제어기를 구성하고자

하며 본 절에서는 플랜트 모델과 기준모델에 대해서 이야기하고 제어목적을 설명한다.

단일 입출력 이산치 시불변 계통 P의 전달함수가 다음과 같다고 하자.

$$W_p(z) = k_p \frac{Z_p(z)}{R_p(z)} \quad (1)$$

$R_p(z)$: 최고차항의 계수가 1인 n 차 다항식
 $Z_p(z)$: 최고차항의 계수가 1인 $m \leq n$ 차 방정식
 k_p : 이득 상수

위의 계통에 대한 기준모델 M의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$W_m(z) = k_m \frac{Z_m(z)}{R_m(z)} \quad (2)$$

R_m, Z_m : 차수가 각각 $n, r \leq m$ 인 최고차항의 계수가 1인 안정한 다항식
 k_m : 이득 상수

기준모델 적응제어에서의 제어목적은 플랜트 출력 y 와 모델출력 y 를 같게 하는 것이다.

$$\text{즉 } e_1 = y_p - y_m \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty$$

3. 적응 제어기의 구성

전 절에서 기준모델 적응제어에서의 제어목적이 실제 계통의 출력과 기준모델 출력을 일치시키는 것이므로 본 절에서는 그러한 제어목적 수행하기 위한 기존의 방법을 설명한다.

계통의 제어 입력을 구하는데 있어 우선 파라미터 벡터와 회귀벡터가 정의된 후 파라미터를 구할수 있는 적응 알고리즘이 소개되며 오차 방정식으로 부터 제어 입력이 구성됨을 보인다.

회귀벡터는 입력을 각각 $u(k), y_0(k)$ 로 하고 n 차의 상태변수 $v^1(k), v^2(k)$ 를 갖는 보조신호 발생기로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\phi(k) = [r(k), v^1(k), v^2(k)] \quad (3)$$

여기서 $r(k)$ 는 기준 입력이며 보조신호 발생기는 안정한 필터이다.

파라미터 벡터는 회귀벡터에 각각 대응되는 파라미터 들로서 다음과 같이 구성된다.

$$\theta(k) = [k_0(k), c_1(k), \dots, c_n(k), d_1(k), d_2(k), \dots, d_n(k)] \quad (4)$$

위의 파라미터 벡터는 다음의 적응칙에 의해서 구해진다.

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \Gamma e_1(k) \phi(k) \quad (5)$$

여기서 Γ 는 적당한 상수 행렬

위와같은 적응 알고리즘을 사용하는 경우 안정도에 근거한 제어입력은 다음과 같은 오차 방정식으로부터 구성될 수 있다.

$$e(k+1) = A e(k) + b v(k)$$

$$e_1(k) = c^1 e(k) + d v(k) \quad (6)$$

이 오차방정식은 플랜트와 기준모델, v^1 , v^2 와 v^1 , v^2 의 기준값과의 차이로서 구성된 $3n$ 차 방정식으로서 v 는 플랜트 입력과 모델 입력의 차이를 의미하게 된다.

본 연구에서는 문제물 용이하게 하기 위하여 $m=n$ 이라고 가정하며 모델의 전달함수는 SPR 조건을 만족한다고 가정한다.

첫번째 가정은 $m \neq n$ 일때도 필터를 적절히 선정하여 마찬가지로 제어입력 구성이 가능하며 두번째 가정은 기준모델 선정시의 분제이므로 일반성을 줄인다고는 생각되지 않는다.

위의 오차 모델과 가정으로부터 제어목적인 오차를 0 으로 수렴하게 하는 v 는 다음 정리에 의해 구해진다.

정리 1. 기준모델의 전달함수가 SPR 조건을 만족한다고 가정하였으므로 오차 방정식의 전달함수 역시 SPR 조건을 만족한다. 이때 위의 오차 계통을 안정하게 하고 오차를 0 으로 수렴시키게 하는 $v(k)$ 는 다음과 같다.

$$v(k) = \tilde{\theta}(k) \phi(k) - \alpha \phi(k) \Gamma^1 \phi(k) e_1(k)$$
 여기서 α 는 1/2 보다 큰 상수

<증명> 참고문헌 (6)참조

정리 1 에서 $v(k)$ 가 구해졌으므로 제어입력은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$u(k) = \hat{\theta}(k) \phi(k) - \alpha \phi(k) \Gamma^1 \phi(k) e(k) \quad (7)$$

본 절에서는 기존의 파라미터 적응 알고리즘과 제어입력을 구성하였는데 이는 외란과 비모형화 특성에 견고하지 못하므로 이에 대한 개선으로 다음과 같은 e_1 -변형 적응칙과 제어입력을 생각해 볼 수 있다.

$$\hat{\theta}(k+1) = \alpha \hat{\theta}(k) - \Gamma^1 e_1(k) \phi(k)$$

$$u(k) = \alpha \hat{\theta}(k) \phi(k) - \alpha \phi(k) \Gamma^1 \phi(k) e(k)$$

그러나 위 알고리즘은 외란과 비모형화 특성이 없는 경우에 정상상태 오차가 남는다. 그러므로 다음절에서는 외란과 비모형화 특성에 견고하면서 이들이 존재하지 않는 경우에도 정상상태 오차가 발생하지 않는 e_1 -변형 적응칙을 제안하고 그에따르는 제어입력을 재구성한다.

4. 이산치 e_1 -변형 적응 알고리즘

본 절에서는 기존의 연속치 계통에서의 e_1 -변형 적응 알고리즘을 이산치 계통으로 확장시킨 새로운 적응 알고리즘을 제시하고 그에 상응하는 제어입력을 구한다.

본 연구에서 제안한 이산치 e_1 -변형 적응 알고리즘은 다음과 같다.

$$\hat{\theta}(k+1) = (1 - (\lambda e_1) + (\lambda e_1)^2 / 2) \hat{\theta}(k) - \Gamma^1 e_1(k) \phi(k) \quad (8)$$

적응 알고리즘을 위와 같은 형태로 변형시킨 이론적 근거는 연속치 계통에서 근 복소 평면에서의 좌반면이 이산치 계통에서의 단위원내에 해당된다는 사실이다.

이같은 이산치 e_1 -변형 적응 알고리즘을 사용하는 경우 그에 상응하는 적응제어입력 역시 식 (6)의 오차 방정식으로부터 다음의 정리에 의해 구성될 수 있다.

정리 2. 이산치 e_1 -변형 적응 알고리즘을 사용하는 경우 오차방정식을 안정하게 하고 오차를 0 으로 수렴시키게 하는 $v(k)$ 는 다음과 같다.

$$v(k) = (1 - (\lambda e_1) + (\lambda e_1)^2 / 2) \tilde{\theta}(k) \phi(k) - \alpha \phi(k) \Gamma^1 \phi(k) e_1(k)$$

<증명> 가정에 의해 $d + c^1(zI - A)b$ 가 SPR 조건을 만족하므로 Kalman-Yacubovich lemma 에 의해 다음과 같은 $P=P^* > 0$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} A^1 P A - P &= -q q - L \\ A^1 P b &= c/2 + q \\ d - b^1 P b &= \nu^2 \end{aligned} \quad (9)$$

for some vector $q, \epsilon, \nu > 0$

오차 계통의 안정도와 $\lim e(k)=0$ 를 증명하기 위해서 다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의하고 ΔV 가 0 보다 작음을 보인다.

$$\begin{aligned} V(e(k), \tilde{\theta}(k)) &= 2e^t(k) P e(k) + \tilde{\theta}^t(k) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(k) \\ \Delta V(e(k), \tilde{\theta}(k)) &\triangleq \Delta V(k) = V(k+1) - V(k) \\ &= 2[e^t(k)(A^1 P A - P)e(k) + 2e^t(k)A P b v(k) \\ &\quad + b^1 P b v^2(k)] + \tilde{\theta}^t(k+1) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(k+1) - \tilde{\theta}^t(k) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(k) \end{aligned}$$

식 (9) 의 관계를 대입하면

$$\Delta V(k) = -2[e^t(k)q - \nu v(k)]^2 - 2\epsilon e^t(k) L e(k) + 2e_1^t(k)v(k) + 2\tilde{\theta}^t(k) \Gamma^{-1} \Delta \tilde{\theta}(k) + \Delta \tilde{\theta}^t(k) \Gamma^{-1} \Delta \tilde{\theta}(k)$$

여기서 $\Delta \tilde{\theta}(k)$ 는 식 (8)로부터

$$S = (1 - \lambda e_1 + (\lambda e_1)^2 / 2) \quad \text{라고 할때 다음과 같다.}$$

$$(S-1) \tilde{\theta}(k) - \Gamma^1 e_1(k) \phi(k)$$

위식을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= -2 [e^t(k)q - \nu v(k)]^2 - 2\epsilon e^t(k) L e(k) \\ &\quad + 2e_1^t(k)v(k) - 2S \tilde{\theta}^t(k) e_1(k) \phi(k) \\ &\quad + \phi^t(k) \Gamma^1 \phi(k) e_1^2(k) \end{aligned}$$

그러므로 $\Delta V(k) < 0$ 이 되기 위해서는

$$v(k) = S \tilde{\theta}(k) \phi(k) - \alpha \phi^t(k) \Gamma^1 \phi(k) e_1(k) \quad \text{<증명 끝>}$$

정리 1 의 결과로서 제어입력은 다음과 같이 구해진다.

$$u(k) = (1 - (\lambda e_1) + (\lambda e_1)^2 / 2) \hat{\theta}(k) \phi(k) - \alpha \phi^t(k) \Gamma^1 \phi(k) e_1(k)$$

이산치 e_1 -변형 알고리즘 사용시의 전체 계통도를 살펴보면 다음과 같다.

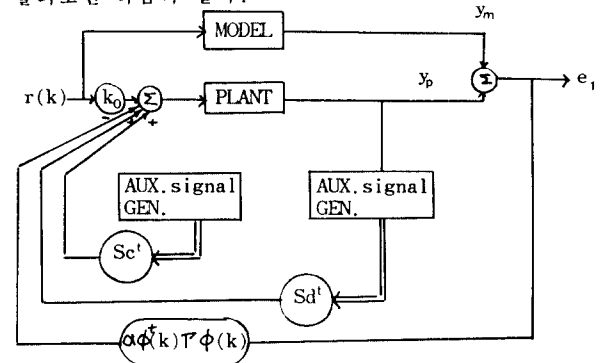


그림 1. 이산치 e_1 -변형 적응 알고리즘을 사용한 적응제어계통

Fig. 1. Adaptive control sys. with discrete e_1 -modification

4. 벡터 이론을 이용한 파라미터 적응 제어 알고리즘에 대한 견고성 고찰

본 절에서는 벡터 이론을 사용하여 이산치 e_1 -변형 알고리즘을 사용하는 경우 견고성이 향상됨을 보인다.

다음과 같이 오차 모델을 나타내는 연산자 H_1, H_2 를 정의한다.

$$\begin{aligned} e_1 &= -H_2 \psi + e_1^* \\ H_1: e_1 &\rightarrow \psi \\ \psi &= \hat{\theta}(k-1) \phi(k-1) \end{aligned}$$

위의 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

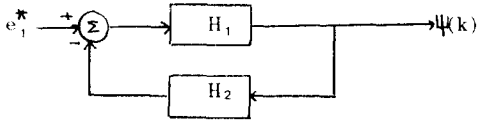


그림 2. 오차 모델
Fig. 2. Error Model

여기서 H_1 은 파라미터의 적응 알고리즘에 관계되며 H_2 는 모델과 계통의 전달함수에 관계된다.

본 연구는 파라미터 적응 알고리즘에 변형을 가한 것이므로 그것에 의한 견고성 향상을 보임에 있어 H_1 의 섹터 범위를 고찰한 다음 H_2 의 허용 섹터 범위가 넓어짐을 보이면서 된다.

정리 3. 이산치 e_1 -변형 적응 알고리즘을 사용하면 H_1 은 CONE(C, R)의 외부에 존재한다.

여기서 $C=-1/2$
 $R=(1/4+(1/2S)\Gamma\phi(k-1)\phi(k-1))^{1/2}$

<증명>

$$\begin{aligned} V(k) &= (\tilde{\theta}(k)\Gamma\tilde{\theta}(k))/2 \text{ 라고 하면} \\ V(k-1) &= (\tilde{\theta}(k-1)\Gamma\tilde{\theta}(k-1))/2 \end{aligned}$$

식(8)의 관계를 대입하면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} V(k-1) &= (1/2S^2)(\tilde{\theta}(k) + \Gamma\phi(k-1)e_1(k)) \\ &\quad \Gamma^{-1}(\tilde{\theta}(k) + \Gamma\phi(k-1)e_1(k)) \\ &= (1/2S^2)(2V(k) + 2\phi(k-1)\tilde{\theta}(k)e_1(k) \\ &\quad + \phi^T(k-1)\Gamma\phi(k-1)e_1^T(k)) \\ &= (1/S^2)V(k) + (1/S^2)\phi(k-1)\tilde{\theta}(k)e_1^T(k) \\ &\quad + (1/2)(1/S^2)\phi^T(k-1)\phi(k-1)e_1^T(k) \\ &= (1/S^2)V(k) + (1/S^2)\phi(k-1)(S\tilde{\theta}(k-1) \\ &\quad - \Gamma\phi(k-1)e_1(k))e_1^T(k) + (1/2)(1/S^2) \\ &\quad \Gamma\phi^T(k-1)\phi(k-1)e_1^T(k) \\ &= (1/S^2)V(k) + (1/S)\phi(k-1)\tilde{\theta}(k-1) \\ &\quad e_1^T(k) - (1/2)(1/S^2)\Gamma\phi^T(k-1)\phi(k-1)e_1^T(k) \end{aligned}$$

여기서 $\psi(k) \triangleq \tilde{\theta}(k-1)\phi(k-1)$ 이므로 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \psi(k)e_1^T(k) - (1/2)(1/S)\Gamma\phi^T(k-1)\phi(k-1)e_1^T(k) \\ = S(V(k-1) - V(k)/S^2) \\ + (\psi(k) + e_1(k)/2)^T - (1/4) \\ + (1/2)(1/S)\Gamma\phi^T(k-1)\phi(k-1)e_1^T(k) \\ = \psi^T(k) + S(V(k-1) - V(k)/S^2) \end{aligned}$$

양변을 $k=0$ 에서 N 까지 더하면 노름(Norm)의 정의에 의해 다음과 같이 정리된다.

$$R^2 = (1/4) + (1/2)(1/S)\Gamma\phi^T(k-1)\phi(k-1) \text{ 이라고 할 때}$$

$$\|\psi(k) + e_1(k)/2\| - R^2 \|e_1(k)\| \geq -C$$

여기서 C 는 상수

<증명 끝>

위의 결과로부터 이산치 e_1 -변형 적응치를 사용하는 경우 R 이 커지고 이에 따라 H_1 이 존재하는 CONE 영역이 좁아짐을 알 수 있다. 따라서 H_2 허용 범위가 넓어지므로 견고성이 향상됨을 알 수 있다.

6. 수치에 및 컴퓨터 시뮬레이션

본 절에서는 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 이산치 e_1 -변형 알고리즘이 외란에 대해 견고함을 보인다.

플랜트의 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$W_p(z) = \frac{z - 0.335z - 0.027}{z - 0.87z + 0.185}$$

기준모델의 전달함수는 다음과 같다.

$$W_m(z) = \frac{z - 0.57z + 0.074}{z - 0.19z + 0.007}$$

보조 신호 발생기의 전달함수는 아래와 같다.

$$\frac{1}{z - 0.502z + 0.0495}$$

이산치 e_1 -변형 알고리즘은 다음과 같다.

$$\hat{\theta}(k+1) = (1 - 0.01e_1 + (0.01e_1)^2 / 2) \hat{\theta}(k) - 0.01e_1(k)\phi(k)$$

기준 입력은 3이며 외란은 $0.9\cos(2k)$ 로 주어진다. 위와같은 경우 외란 존재시 기존의 알고리즘을 사용한 경우와 Γ -변형 알고리즘을 사용한 경우, 본 연구의 알고리즘을 사용한 경우를 보면 각각 그림 3, 4, 5와 같고 외란이 존재하지 않는 경우에 이산치 Γ -변형 알고리즘과 본 연구의 알고리즘을 사용한 경우를 보면 각각 그림 6, 7과 같다.

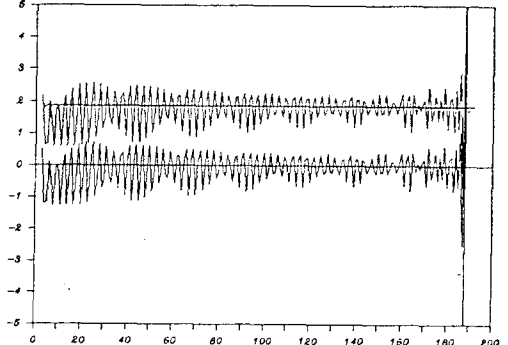


그림 3. 외란 존재시 기존 알고리즘을 사용한 경우의 출력오차

Fig 3. Output error using the existing algorithm with disturbance

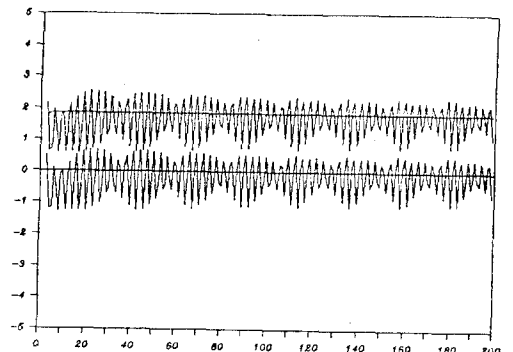


그림 4. 외란 존재시 σ -변형 알고리즘 사용시의 출력오차

Fig 4. Output error using the σ -modification with disturbance

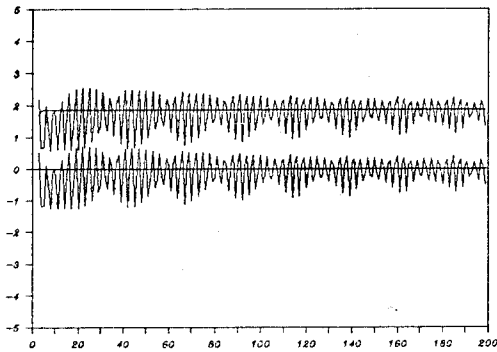


그림 5. 외란 존재시 이산치 e_1 -변형 알고리즘을 사용한 경우의 출력오차

Fig 5. Output error using the discrete e_1 -modification with disturbance

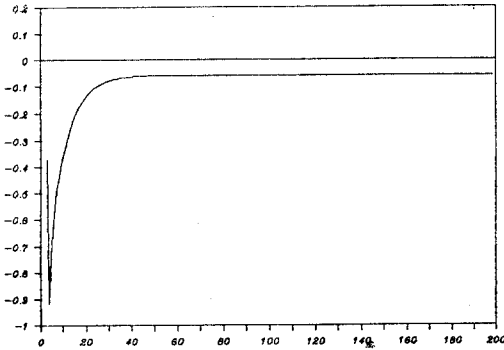


그림 6. 외란이 없는 경우 σ -변형 알고리즘 사용시의 출력오차

Fig 6. Output error using the discrete σ -modification without disturbance

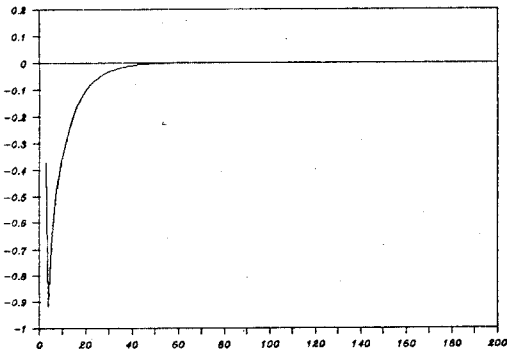


그림 7. 외란이 없는 경우 이산치 e_1 -변형 알고리즘 사용시의 출력오차

Fig 7. Output error using the discrete e_1 -modification without disturbance

위의 그림들로부터 본 연구의 이산치 e_1 -변형 알고리즘은 기존의 알고리즘에 비해 외란에 대해 견고함을 알 수 있었고 외란이 존재하지 않는 경우 σ -변형 알고리즘에 비해 정상오차가 적음을 알 수 있다.

7. 결론

본 연구에서는 이산치 적응제어시스템의 견고성을 향상시키기 위하여 연속치 제동의 e_1 -변형 개념을 도입하여 이산치 e_1 -변형 알고리즘을 제안하였고 그에 따르는 제어입력을 Lyapunov 안정도 방법에 의해서 재구성하였으며 이에 대한 견고성 향상을 보임에 있어서 섹터 이론을 사용하였다. 아울러 컴퓨터 시뮬레이션을 해본 결과 기존의 알고리즘보다 견고하고 σ -변형 적응 알고리즘의 단점을 보완함을 알 수 있었다.

8. 참고문헌

1. K.A. Ossman, "Adaptive Regulation of MIMO Linear Discrete-time Systems without requiring a Persistent Excitation", IEEE AC-32 1987
2. R.B. Peterson, "Bounded Error Adaptive Control", IEEE AC-27 1982
3. P.A. Ioannou, "Adaptive Systems with Reduced Models", N.Y.:Springer-verlag 1983
4. B.D.O. Anderson, "Adaptive Systems lack of persistency of excitation and bursting phenomena", Automatica, vol. 21 1985
5. K.S. Narendra, "A New Adaptive law for Robust Adaptation Without Persistent Excitation", IEEE AC-32 1987
6. K.S. Narendra, "Stable Discrete Adaptive Control", IEEE AC-25 1980
7. G. Zames, "On the I/O stability of time varying nonlinear feedback systems part I and II", IEEE AC-11 1966