

가변구조제어계의 속응성 향상 및 정상상태오차의 제거

김 중 완*

이 만 형**

* 동아대학교 기계공학과

** 부산대학교 정밀기계공학과

The Improvement of Rapid Response and the Elimination of Steady State Error of Variable Structure Control Systems

Joong Wan Kim and Man Hyung Lee
Dong-A University Pusan National Univ.

Abstract

In this study, the several control laws and switching planes are considered to eliminate the steady state error and to obtain the rapid response for variable structure control systems. An elimination algorithm is achieved by combination with each other control law, and the type of control law having the most rapid response is shown through some simulations.

1. 서 론

가변구조제어(VSC)는 시스템 파라미터의 변동이나 외란에 대하여 둔감하며 상태변수들이 스위칭 평면을 따라서 운동하도록 슬라이딩 레짐을 결정할 수 있으므로 시스템의 점근적 안정을 보장할 수 있고 원하는 상태제어를 유도할 수 있다. 그러나 임의의 초기위치에서 스위칭 평면에 도달할 때 까지의 도달시간이 존재하므로 오버슈트가 발생할 수 있고 정상상태로 접근하는 상태변수의 시간선도가 점점 완만해지므로 속응성이 요구되는 시스템에서는 별도의 대책이 요구되며 슬라이딩 레짐에 속하는 제어법칙이나 스위칭 평면이 부적당할 때에는 슬라이딩 운동이 실패하거나 정상상태오차를 갖게 된다. 이와 같은 관점에서 가변구조 제어계의 슬라이딩 레짐의 구조적 분석이 필요하다.

가변구조제어계의 제어법칙과 스위칭 평면은 여러 형태로 제안되어 있다. 연속입력이 발생하여 채터링 현상을 방지해주는 연속제어법칙, 초기위치에서부터 스위칭 평면이 정의되는 시변 스위칭 평면들은 기존의 제어법칙에서 나타나는 불연속 거동과 큰 입력의 발생등의 단점을 향상시켰다. 그러나 시변 스위칭 평면과 연속 제어법칙의 파라미터들이 부적절하게 선택되면 정상상태오차가 남게된다.

따라서 본 논문에서는 속응성이 좋고 정상상태오차를 제거할 수 있는 제어법칙과 스위칭 평면을 구성하고 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

2. 가변구조제어계의 이론

2-1. 기존의 슬라이딩 레짐

가변구조제어계에서는 제어법칙을 상태변수의 함수로 정의하며 슬라이딩 레짐에 의해서 스위칭 논리를 받아 부호가 바뀌므로 계의 구조를 변화시킨다. 이러한 가변구조에 따라서 상태변수는 임의의 초기위치에서 스위칭 평면을 향하며 일단 그 곳에 도달하면 스위칭 평면을 벗어나지 않고 그 평면을 따라서 운동하게 된다.

다음과 같은 시스템의 상태방정식을 고려한다.

$$\dot{X} = AX + BU \tag{1}$$

가변구조제어계에서 스위칭 평면과 제어법칙 및 슬라이딩 운동이 일어날 필요충분조건은 각각 다음식과 같다.

$$\sigma(X) = \sum_{i=1}^n c_i x_i = CX = 0 \tag{2}$$

$$u = \left(- \sum_{i=1}^n \psi_i |x_i| \right) \cdot \text{sign}(\sigma(X)) \tag{3}$$

$$\sigma(X) \cdot \dot{\sigma}(X) \leq 0 \tag{4}$$

여기서

$$\psi_i \geq (\max |a_i|) / (\min |b|) \tag{5}$$

$$\text{단 } \bar{a}_i = \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\bar{b} = \sum_{j=1}^n c_j b_j > 0$$

그리고

$$\text{sign}(\sigma(X)) = \begin{cases} +1 & \text{if } \sigma(X) > 0 \\ -1 & \text{if } \sigma(X) < 0 \end{cases}$$

또한 스위칭 평면의 계수 c_i 는 다음과 같은 등가시스템 행렬 A_{eq} 의 모든 고유치가 음의 값을 갖도록 선택한다.

$$\dot{X} = (I - B(CB)^{-1}C) \cdot AX = A_{eq} X \tag{6}$$

2-2. 제안된 슬라이딩 레짐

식(2)의 스위칭 평면은 시불변이며 식(3)의 제어법칙은 부호함수의 영향 때문에 불연속 입력을 발생시키므로 상태변수의 제어동태가 채터링하게 된다. 이러한 문제를 해결

하기 위하여 여러가지 형태의 스위칭 평면과 제어법칙이 제안되었고 그 중의 대표적인 것이 시변스위칭평면과 연속 제어법칙이다. 시변스위칭평면은 Joo 등에 의하여 제안되었으며 연속제어법칙은 Slotine 및 Joo 등이 각각 제안하였다. 이것을 슬라이딩레짐이라 부르며 다음과 같은 특징을 갖고 있다. 상태공간에서 상태의 초기위치에서 부터 슬라이딩 운동을 발생시킬 수 있으며 이에 따라서 제어입력의 크기를 작게할 수 있다. 또한 연속입력이 발생하므로 연속적 제어운동이 얻어진다. 시변스위칭평면과 연속제어법칙은 각각 다음식으로 표현된다.

$$\sigma(X, t) = \sigma(X) - \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \quad (7)$$

여기서 $\sigma(X) = CX$, $\alpha = C X(t_0)$, $\beta > 0$ 이고 t_0 는 초기시간이며 $X(t_0)$ 는 상태변수의 초기조건이다.

$$u = \left(- \sum_{i=1}^n \Psi_i |x_i| \right) \cdot \text{MOD}(\sigma(X)) \quad (8)$$

여기서 $\text{MOD}(\cdot)$ 는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$\text{MOD}(y) = \begin{cases} y & \text{if } |y| \leq 1 \\ \text{sign}(y) & \text{if } |y| > 1 \end{cases}$$

윗식에서 y 는 표1과 같이 여러 형태로 제안되어 있다.

표 1. 제안된 y 의 비교

y	$\sigma(X)$	$\sigma(X)/\lambda N(X)$	$\sigma(X, t)/\lambda N(X)$
		λ : 임의의 상수	λ : 임의의 상수
		$N(X)$:	$N(X)$:
		X 의 norm	X 의 norm

표1에서 X 는 다음식으로 정의된다.

$$\bar{x}_i = x_i \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$\bar{x}_n = x_n - \alpha e^{-\beta(t-t_0)}$$

시변스위칭평면과 연속제어법칙은 계수 β 와 λ 의 선택에 따라서 상태변수의 제어 동특성이 달라지므로 적절한 선택을 위해서는 정량적인 연구가 필요하다. 따라서 본 논문에서는 정상상태오차를 효과적으로 제거할 수 있고 속응성을 향상시킬 수 있는 스위칭평면과 제어법칙을 구성하고자 한다.

3. 개선된 슬라이딩 레짐

가변구조제어의 개념은 시스템이 상태방정식으로 주어질 때 등가상태방정식이 안정한 구조가 되도록 극점을 선택하고 점근선을 따라서 상태변수가 수렴하도록 제어법칙을 정하고 스위칭평면을 도입하면 원하는 상태레직이 이루어진다. 일반적으로 2차 시스템인 경우에 2개의 점근선이 존재하는데 이러한 점근선을 스위칭평면으로 선택할 경우에 스위칭 기구의 불완전성, 제어입력의 대소 및 시간지연을 충분히 고려한 샘플링 시간 등의 영향을 받아 슬라이딩레짐이 붕괴될 수도 있고 정상상태에서 오차가 남을 수도 있다. 여기서는 스위칭평면을 상태벡터의 제어거동에 따라서 변하는 시변스위칭평면을 구성하고 제어법칙을 개선하여 정상상태오차를 제거하고자 한다. 다음식과 같은 2차 선형 시불변 시스템을 생각하자.

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (9)$$

스위칭평면은

$$\sigma(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (10)$$

이고, 제어법칙은

$$u = - (\Psi_1 |x_1| + \Psi_2 |x_2|) \quad (11)$$

이다. 식 (9), (10), (11) 에서 구해지는 등가상태방정식은 다음식과 같다.

$$\dot{X} = (I - B(CB)^{-1}C)AX = A_{eq}X \quad (6)$$

식(6)의 모든 고유치가 음이 되도록 C 를 구한다. 그러면 식(6)으로 주어지는 시스템의 상태레직은 그림1과 같이 2개의 점근선을 가지며 수렴하게 된다.

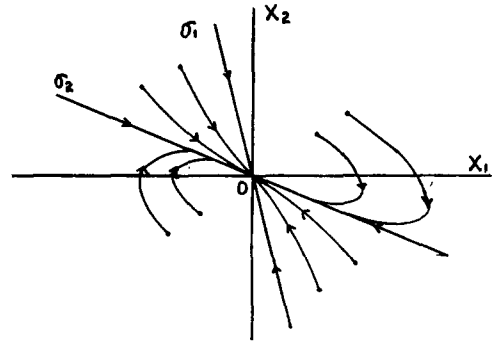


Fig.1 State Trajectory of Eq.(6).

식(6)의 고유치를 λ_1 , λ_2 라 할 때 그림1의 점근선 σ_1 , σ_2 는 다음식과 같다.

$$\sigma_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \quad (12)$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 x_1 + x_2$$

여기서 $B = [0, 1]^T$, $C = [c_1, 1]$ 로 두면

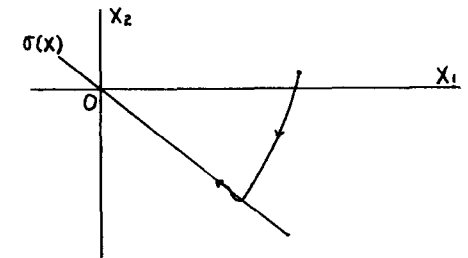
$$\lambda_1 = \frac{[(a_{11} - c_1 a_{12} + \sqrt{((c_1 a_{12} - a_{11})^2 - 4 c_1 a_{11} a_{12})})]}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{[(a_{11} - c_1 a_{12} - \sqrt{((c_1 a_{12} - a_{11})^2 - 4 c_1 a_{11} a_{12})})]}{2} \quad (13)$$

적절한 고유치를 선택하고 c_1 을 구하면 시스템(9)의 스위칭평면은 다음식으로 구해진다.

$$\sigma(X) = c_1 x_1 + x_2 \quad (14)$$

시스템 (9)가 스위칭평면(14)를 이상적으로 추종한다면 상태레직은 그림2와 같이 나타난다.



식(14)의 스위칭평면은 상태벡터의 초기위치에 관계 없이 정해지므로 제어의 초기에서 스위칭평면에 도달할 때 까지 상당히 큰 입력을 발생시키고 스위칭평면을 통과하는 순간 스위칭평면을 따르도록 하기 위해서 갑자기 역방향의 입력을 발생시키게 된다. 이것은 실제 플랜트에서는 충격 진동을 가하게 되므로 바람직하지 않다. 그러므로 식(14)의 계수 c_1 을 다음과 같이 변환한다.

$$c_1^* = \sqrt{\{ b^2 - (b^2/a^2) x_1^2 \} + d} \quad (15)$$

여기서 $d > 0$ 는 초기위치에서 적당하게 잡은 초기스위칭평면의 계수값이고, $b = c_1 - d$ 이며, $a = x_{10}$ 이다.

단 x_{10} 는 x_1 의 초기값이다. 따라서 시변스위칭평면은

$$\sigma(X)^* = c_1^* x_1 + x_2 \quad (16)$$

이다. 한편 상태궤적이 스위칭평면을 횡단할 때 입력(11)이 연속입력이 되도록 다음식과 같이 둔다.

$$u = -(\psi_1 |x_1| + \psi_2 |x_2|) \text{MOD}(\sigma(X)^*) \quad (17)$$

4. 시뮬레이션 및 고찰

다음과 같은 2차 선형시불변 시스템을 생각한다.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (18)$$

$C = [c_1, 1]$ 로 두면 식(6)으로 부터

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -c_1 - 1 \end{bmatrix}$$

등가시스템의 고유치를 -0.1 , -4.0 으로 두면 식(13)으로 부터 c_1 은 39.1 또는 4로 구해진다. 여기서는 4를 선택하고 d 를 0.1로 두면 식(15)로 부터

$$c_1^* = \sqrt{\{ 15.21 - (15.21/a^2) x_1^2 \} + 0.1} \quad (19)$$

이 되고 등가입력 u_{eq} 는

$$u_{eq} = -(4|x_1| + 5|x_2|) \quad (20)$$

그러므로 식(17)의 $\psi_1=4$, $\psi_2=5$ 로 결정된다. 따라서

$$u = -(4|x_1| + 5|x_2|) \text{MOD}(\sigma(X)^*) \quad (21)$$

그림 3에 식(14)의 스위칭평면을 이용한 상태변수 x_1 의 시간선도를 나타내었고 그림 4에는 식(16)의 스위칭평면을 이용한 상태변수 x_1 의 시간선도를 나타내었다. 속응성이 향상되었고 정상상태오차가 제거되었음을 알 수 있다.

5. 결 론

가변구조제어의 정상상태오차를 제거하고 속응성을 향상시키기 위하여 기존의 시불변스위칭평면을 개선하여 시변스위칭평면으로 구조를 변화시켰다. 다양한 제어법칙과 관련하여 시뮬레이션을 수행하여 고찰한 결과 본 논문에서 제안된 방법을 이용할 경우 속응성이 향상되었고 정상상태오차를 완전히 제거할 수 있었다.

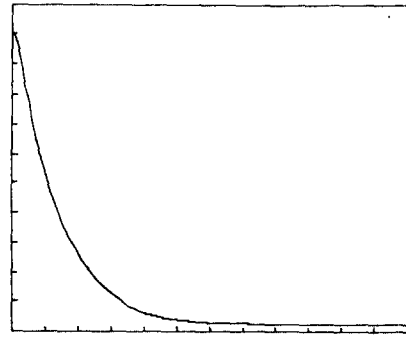


Fig.3 Time Trajectory of x_1 , using Eq.(14)

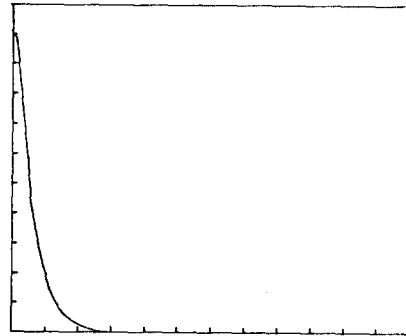


Fig.4 Time Trajectory of x_1 , using Eq.(16)

참 고 문 헌

- 1) Vadim I. Utkin, " Variable Structure Systems with Sliding Modes ", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-22, No.2, pp.212-217, April, 1977.
- 2) Vadim I. Utkin, "Variable Structure Systems : Present and Future ", Plenum Publishing Corporation, pp.1105-1120, 1984.
- 3) U. Itkis, " Control Systems of Variable Structure ", John Wiley & Sons, N.Y. 1976.
- 4) O. M. E. El-Ghezawi et al., " Analysis and Design of Variable Structure Systems using a Geometric Approach ", Int. J. Control, Vol.38, No.3, pp.657-671, 1983.
- 5) J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking Control of Non-linear Systems using Sliding Surface with Application to Robot Manipulators", Int.J.Control, Vol.38, No.2, pp.465-492, 1983.
- 6) Kar-Keung D. Young and Harry G. Kwatny, " Variable Servomechanism Design and Applications to Overspeed Protection Control ", Automatica, Vol.18, No.4, pp.385-400, 1982.
- 7) J. E. Slotine, "The Robust Control of Robot Manipulators", Int. J. Robotics Research, Vol.4, pp.49-63, 1985.
- 8) 주 기호 외 3명, " 가변구조제어계의 Reaching Phase 및 Chattering 현상의 제거에 관한 연구 ", 전기학회논문지, 제 36권, 제1호, pp.52-57, 1987.