

단일보강링 원통형 금형의

최적 설계용 CAD 프로그램 개발

신중호, 손주리, 류갑상
한국기계연구소, CAD/CAM실, 창원

Development of A CAD Program for Optimal Design of A Cylindrical Die with One Stress-Ring.

J.H. Shin, J.R. Son, G.S. Ryu
CAD/CAM Lab., Korea Institute of Machinery & Metals, Changwon

ABSTRACT

Shrink-rings (Stress-rings) are used in the fabrication of dies for cold forming and powder compaction processes to increase the allowable pressures for a given die material. Optimum procedures are to minimize a die thickness under the conditions that the stress distributions in the die and stress-rings utilize fully the strength available in each of the die elements. This paper proposes a new approach, where the maximum allowable shrinking pressures are calculated on shrinkage plans in the radial direction and the fractional shrinking pressures below the maximum allowable pressures are used as the design values. Two criteria for the optimal die design are used: Maximum shear stress limit for one-piece dies and zero tensile stress limit for combined dies. A computer program, DIECOM, is developed for illustrating the computer-aided design procedures. Finally, examples for each case are presented in this paper.

1. 서론

분말압축성형 (Powder compaction)은 효율성과 경제성이 매우 높은 제작방법이다. 그러나 높은 강도를 요구하거나 대형제작품의 분말압축성형시에 금형의 외부직경이 가용치수를 초과하는 경우가 발생한다. 이때 주어진 금형의 치수와 압축력에 적합한 금형의 최적설계방법으로

응력보강링 (Stress-rings)을 이용하는데, 본 논문에서는 한개의 보강링을 이용한 Die-ring의 최소치수로 최적설계하는 설계방법을 제시한다.

금형은 내부 및 외부압축력을 받는 Thick-walled cylinder로 간주하며 압축력에 의해 Radial방향과 Tangential(hoop)방향에 Fig.1과 같은 응력이 발생한다. 반경길이에 따라 응력 ($\sigma_t - \sigma_r$)은 Cylinder 내면에서 설계치를 만족시킬 때, 내면에서 멀어질수록 낮아진다.

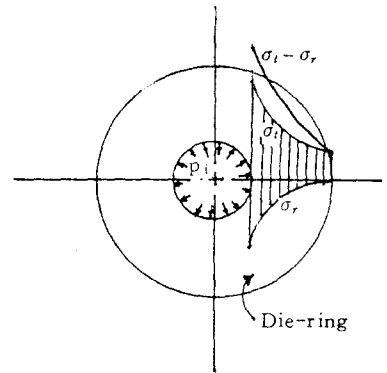


Fig. 1 단일형의 금형

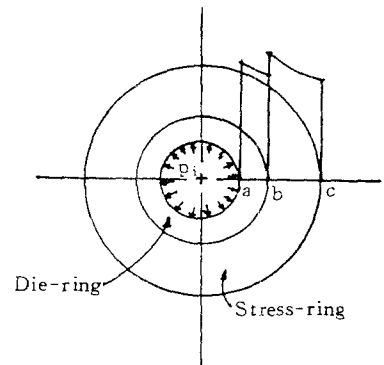
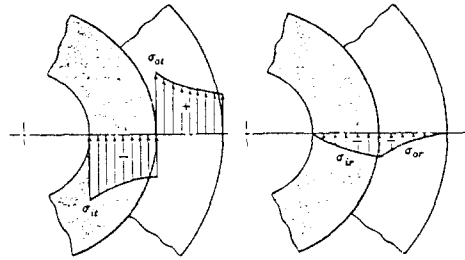


Fig. 2 보강링을 둔 금형

Fig.2에서와 같이 동일한 금형적경일 경우에도 보강링을 사용하면 보강링에 의한 Shrink-fit 압력에 의하여 Die-ring 내면의 응력을 낮출 수 있어 더높은 내압에 견딜 수 있는 금형을 설계할 수 있다. 또한 보강링이 있는 금형의 경우는 Die-ring과 Stress-ring의 내면에서의 응력이 설계치를 동시에 만족하는 상태로 최소의 Die-ring의 치수를 결정함으로써 고가인 금형재료의 이용도가 매우 향상된다.



(a) Tangential 응력분포 (b) Radial 응력분포

Fig.4 Shrink-fit 압력에 의한 응력분포 상태

2. 응력 해석

압축성형용 금형의 설계는 일정내압을 유지하고 있는 Thick-walled cylinder 해석에 근거한다. 탄성응력해석에 의한 Thick-walled cylinder의 응력상태는 내압과 외압이 유지될 때 다음과 같다.¹⁻⁴⁾

Fig.3은 내압만 작용할 때의 응력분포이다.

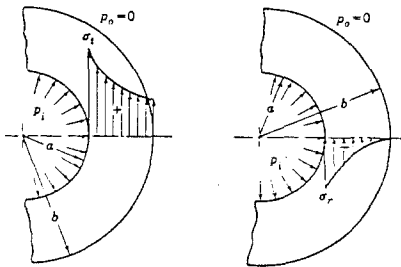
$$\sigma_t = \frac{a^2 \cdot p_i - b^2 p_o - a^2 b^2 (p_o - p_i) / r^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_r = \frac{a^2 \cdot p_i - b^2 p_o + a^2 b^2 (p_o - p_i) / r^2}{b^2 - a^2}$$

.....(1)

여기서,

- σ_t = tangential 방향의 응력
- σ_r = radial 방향의 응력
- a, b = cylinder의 내경과 외경의 반지름
- p_i = cylinder의 내압
- p_o = cylinder의 외압



(a) Tangential 응력분포 (b) Radial 응력분포

Fig. 3 내압상태에 의한 응력분포 상태

Stress-ring을 사용하였을 때는 Shrinking에 의하여 Shrink-fit 압력 p_s 가 발생하는데, 이는 반경방향의 길이변화와 다음의 관련이 주어진다.²⁻⁴⁾

Fig.2의 경우에 반경 b 에서의 길이변화 Δ 는 식(2)와 같다.

$$\Delta = b \cdot p_s \left[\frac{1}{E_s} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu_s \right) + \frac{1}{E_D} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_D \right) \right] \dots\dots\dots(2)$$

여기서,

E_s, E_D = Stress-ring과 Die-ring의 탄성계수

ν_s, ν_D = 각 Ring의 Poisson 계수이다.

Shrink-fit 압력에 의한 Die-ring과 Stress-ring에서의 응력분포는 Fig.4와 같으며 식(1)에서 유도될 수 있다.

(a) Die-ring의 내면인 a 에서의 응력 :

$$\sigma_{ts} = \frac{-2b^2 p_s}{b^2 - a^2} \text{ 과 } \sigma_{rs} = 0.0 \dots\dots\dots(3)$$

(b) Stress-ring의 내면인 b 에서의 응력 :

$$\sigma_{ts} = \frac{(c^2 + b^2) \cdot p_s}{c^2 - b^2} \text{ 과 } \sigma_{rs} = -p_s \dots\dots\dots(4)$$

3. 최대 전단응력에 의한 최적설계

설계조건으로서는 최대 전단응력조건 (Maximum shear stress limit)을 이용하면,

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{\sigma_Y}{SF} \dots\dots\dots(5)$$

여기서,

σ_Y = 인장항복강도

SF = 응력집중계수 등을 고려한 안전계수

최대 전단응력조건을 이용하여 Die-ring의 내면 (a 면)과 Stress-ring의 내면 (b 면)에서의 $(\sigma_t - \sigma_r)$ 을 구하면 다음과 같다.

(a) a 면에서의 내압과 외압에 의한 $(\sigma_t - \sigma_r)$ 은

$$(\sigma_t - \sigma_r)_a = \frac{2(p_i - p_o) c^2}{c^2 - a^2} \dots\dots\dots(6)$$

a 면에서의 Shrink-fit 압력 (p_s)에 의한 값은

$$(\sigma_i - \sigma_r)_s = \frac{-2b^2 \cdot p_s}{b^2 - a^2} \dots\dots\dots (7)$$

(b) b 면에서의 내압과 외압에 의한 값은

$$(\sigma_i - \sigma_r)_p = \frac{2(p_i - p_o) \cdot a^2 c^2}{(c^2 - a^2) b^2} \dots\dots\dots (8)$$

b 면에서의 Shrink-fit 압력 (p_s)에 의한 값은

$$(\sigma_i - \sigma_r)_s = \frac{2 \cdot c^2 \cdot p_s}{c^2 - b^2} \dots\dots\dots (9)$$

式(6)~(9)에 의한 개략적 응력분포는 Fig. 5에서 나타나며 각면에서의 최대응력값은 2개의 응력합으로 나타난다. 즉 a 면에서는

$$\begin{aligned} (\sigma_i - \sigma_r)_a &= \frac{2(p_i - p_o) c^2}{c^2 - a^2} - \frac{2b^2 \cdot p_s}{b^2 - a^2} \\ &\leq \frac{\sigma_D}{SF} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

과 b 면에서는

$$\begin{aligned} (\sigma_i - \sigma_r)_b &= \frac{2(p_i - p_o) \cdot a^2 c^2}{(c^2 - a^2) b^2} + \frac{2c^2 \cdot p_s}{c^2 - b^2} \\ &\leq \frac{\sigma_R}{SF} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

Fig. 5에서의 곡선 (10)은 최소값이며 p_s 의 값을 줄일수록 곡선은 상승하며 곡선 (11)은 최대값이며 p_s 의 값을 줄일수록 곡선은 하강한다.

이때 고려해야 할 중요사항으로서 Shrink-fit 압력은 다음의 3가지 조건을 만족하여야 한다.

- (1) p_s 에 의한 Die-ring 내면의 인장응력이 Von-Mises조건인 $0.85 \cdot \sigma_Y$ 를 초과할 수 없다.
- (2) p_s 에 의한 Stress-ring 내면의 인장응력이 $0.85 \sigma_Y$ 를 초과할 수 없다.
- (3) Stress-ring의 Tempering 온도 보다 많은 길이변화를 유지할 수 없다.

위의 사항들을 식으로 나타내면 Shrink-fit 압력은

$$p_s \leq \frac{0.425 Y_D (b^2 - a^2)}{b^2} \dots\dots\dots (12)$$

$$p_s \leq \frac{0.85 Y_R (c^2 - b^2)}{c^2 + b^2} \dots\dots\dots (13)$$

$$p_s \leq \frac{\alpha \cdot \Delta T}{\frac{1}{E_S} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu_S \right) + \frac{1}{E_D} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_D \right)} \dots\dots\dots (14)$$

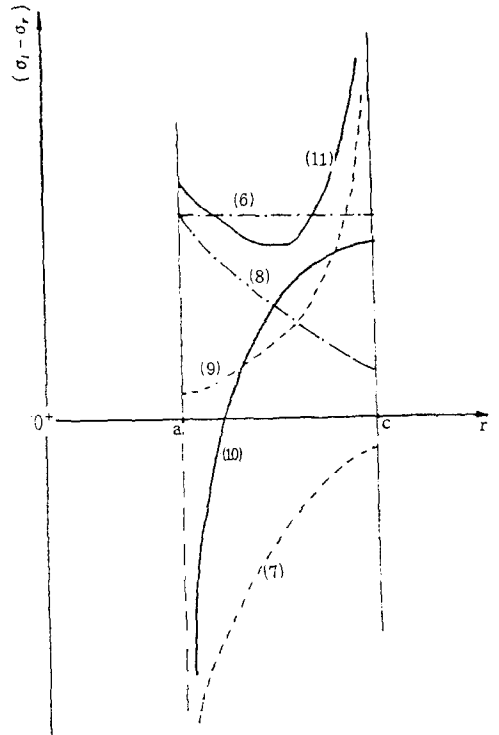


Fig. 5 응력 곡선도

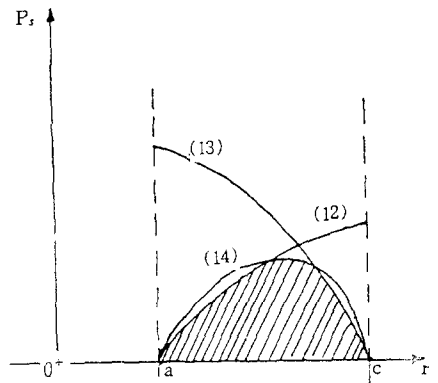


Fig. 6 Shrink-fit 압력 곡선도

여기서,

Y_D = Die-ring의 인장항복강도

Y_S = Stress-ring의 인장항복강도

α = 열변형률

ΔT = Stress-ring의 Tempering 온도

식(12)~(14)를 그래프로 표시하면 Fig. 6과 같으며, 빗금친 범위내의 $r = b$ 값에 해당하는 p_s 를 설계값으로 이용할 수 있다.

결과적으로 식(10)과 (11)을 만족하면서 식(12)~(14)를 만족시키는 최소값의 b 와 p_s 을 결정하는 것이 금형설계의 최적화인 것이다.

4. Zero tensile stress 에 의한 최적설계

Die-ring 을 단일 실린더로 제작하는 경우가 보편적이거나 2 개 이상의 분리형을 조합하는 경우도 있다. 이때에는 내압과 외압을 받는 동안 Die-ring 의 분리작용을 주는 인장응력은 존재해서는 안된다. 이러한 조건을 만족하기 위해서 내압과 외압에 의한 Die-ring 내면에서의 Tangential 응력은 식(1)에서

$$\sigma_t = \frac{(a^2 + c^2) p_i - 2 c^2 p_o}{c^2 - a^2} \dots\dots\dots (15)$$

와 Shrink-fit 압력에 의한 응력은 식(3)에서

$$\sigma_t = \frac{-2 b^2 \cdot p_s}{b^2 - a^2} \dots\dots\dots (16)$$

식 (15)와 (16)의 응력합으로서 Die-ring 내면의 응력은

$$\sigma_t = \frac{(a^2 + c^2) p_i - 2 c^2 p_o}{c^2 - a^2} - \frac{2 b^2 \cdot p_s}{b^2 - a^2} \dots\dots\dots (17)$$

로서, Die-ring 에서는 식(17)의 $\sigma_t = 0$ 인 조건과 Stress-ring 에서는 식(11)의 조건 및 Shrink-fit 압력조건인 식(12)~(14)를 만족하는 최소의 b 와 그 값에서의 p_s 를 결정하는 것이 최적화의 목적이다.

5. 實 用 例

다음의 금형조립체 치수와 기계적 성질이 주어졌을 때 최적의 Die-ring 외부반경인 b 의 값을 결정하라.

- $a = 5$ inches
- $c = 10$ inches
- $E_D = 30 \times 10^6$ psi
- $E_S = 30 \times 10^6$ psi

- $\nu_D = 0.292$
- $\nu_S = 0.292$
- $Y_D = 150,000$ psi
- $Y_S = 100,000$ psi
- Tempering 온도 = 800°F
- 열팽창계수 $\alpha = 6.0 \times 10^{-6}$ inch/inch °F

- (a) $p_o = 0$ 와 $p_i = 40,000$ psi 일 때 Maximum shear stress 조건을 이용하라.
- (b) $p_o = 0$ 와 $p_i = 30,000$ psi 일 때 Zero tensile stress 조건을 이용하라.

Die-ring 에서의 응력집중 및 내압의 불균일 등을 고려하여 안전계수를 약 1.5로 설정하면 사용강도는 $150,000/1.5 = 100,000$ psi 이며, Stress-ring 에서는 안전계수를 1.25로 정하면 사용강도는 $100,000/1.25 = 80,000$ psi 로 설정된다. 식(12)~(14)에서 b 값의 변화에 따른 최대가용 Shrink-fit 압력 (p_s) 는 Table 1 과 같다.

5.1 Maximum shear stress limit

최대가용 p_s 에서 p_s 를 줄여가면서 Die-ring 의 응력곡선과 Stress-ring 의 응력곡선들을 표시하면 Fig.7 과 같으며, 사용응력 $Y_D = 100,000$ psi 와 $Y_S = 80,000$ 의 직선과 교점의 좌표에서 최소의 b 값을 찾으면 최대 Shrink-fit 압력의 10%에 해당하는 곡선에 해당한다. Table 2 에서 추출하면 Die-ring 의 경우 $b \leq 7.75$ (inches) 이고 Stress-ring 의 경우 $b \geq 6.00$ (inches) 이다. 따라서 최적 설계 치수는 두 조건을 만족하면서 최소의 b 값이므로, 최적치수 $b = 6.0$ (inches) 이다.

이때의 p_s 값은 Table 1 의 값에서 $18,770 \times 0.1 = 1,877$ (psi) 이며 식(2)에서 반경방향의 길이변화는 0.003 (inches) 이다.

Table 3 에서 주어진 값은 식(6)~(9)에 의한 응력상태이며 Die-ring 의 경우 ($\sigma_t - \sigma_r$) 은 94,380 (psi) 이며 Stress-ring 의 경우 79,940 (psi) 이므로 모든 조건을 만족하는 최적설계가 이루어졌다.

Table 1.
각 식에 의한 P_s 와 허용 최대 P_s

R	SHRINK-FIT PRESSURE (psi)			
	Eq. (12)	Eq. (13)	Eq. (14)	MAX. PS
5.000	0.25839	50999.89063	0.29114	0.25839
5.250	5926.87256	48268.00391	6465.16992	5926.87256
5.500	11064.04883	45518.23438	11621.15723	11064.04883
5.750	15545.83984	42759.51172	15670.20801	15545.83984
6.000	19479.16797	40000.00000	18773.33398	18773.33398
6.250	22950.00000	37247.19141	21060.00195	21060.00195
6.500	26028.10547	34507.91016	22635.26563	22635.26563
6.750	28770.57813	31788.32227	23585.10156	23585.10156
7.000	31224.49023	29093.95898	23980.41016	23980.41016
7.250	33428.95313	26429.74219	23880.07227	23880.07227
7.500	35416.66797	23800.00000	23333.33398	23333.33398
7.750	37215.14063	21208.51172	22381.62500	21208.51172
8.000	38847.65625	18658.53711	21060.00195	18658.53711
8.250	40364.02344	16152.84473	19398.29297	16152.84473
8.500	41691.17578	13693.75977	17422.00781	13693.75977
8.750	42933.67578	11283.18555	15183.06152	11283.18555
9.000	44074.07422	8922.65234	12610.37109	8922.65234
9.250	45123.26563	6613.33789	9810.32910	6613.33789
9.500	46090.72266	4356.11035	6767.20215	4356.11035
9.750	46984.71484	2151.55396	3493.45190	2151.55396
10.000	47812.46875	0.08106	0.13733	0.08106

Table 2. 10% P_s 일때 b 에 따른 $(\sigma_t - \sigma_r)$

R	Eq. (6)	Eq. (8)	Eq. (10)	Eq. (7)	Eq. (9)	Eq. (11)
5.000	106666.66406	-12749.99512	93916.67188	106666.73438	0.06890	106666.30469
5.250	106666.66406	-12749.99609	93916.67188	96749.81250	1634.40955	98386.21875
5.500	106666.66406	-12749.99609	93916.67188	88154.27344	3172.43608	91326.75781
5.750	106666.66406	-12749.99512	93916.67188	80655.33813	4644.89037	85300.21054
6.000	106666.66406	-12749.99512	93916.67188	74074.07031	5846.68504	79940.73438
6.250	106666.66406	-11695.99707	94966.66406	68266.66406	6811.99856	75178.66406
6.500	106666.66406	-11087.99512	95278.67188	63116.37109	7839.04980	70955.47188
6.750	106666.66406	-10451.99512	96214.67188	58527.66406	8667.01660	67192.67969
7.000	106666.66406	-9791.99707	96874.66406	54421.76953	9404.07910	63825.84766
7.250	106666.66406	-9107.99707	97558.66406	50733.25391	10068.01074	60801.26563
7.500	106666.66406	-8399.99707	98266.66406	47407.40675	10666.66305	58074.07031
7.750	106666.66406	-7266.08594	98940.67188	44398.19531	10470.89668	55019.04297
8.000	106666.66406	-6173.07520	100542.83594	41666.66997	10345.84981	52032.51953
8.250	106666.66406	-5106.07910	101540.58594	39175.67528	10115.28120	49294.95703
8.500	106666.66406	-4187.87568	102428.83594	36908.98281	9869.37400	46778.25781
8.750	106666.66406	-3350.76270	103415.89844	34829.63359	9608.21445	44458.25000
9.000	106666.66406	-2591.19482	104685.46875	32921.81250	9392.26177	42314.07422
9.250	106666.66406	-1868.65967	104758.00701	31166.30078	9161.32910	40327.62891
9.500	106666.66406	-1205.07319	105461.64063	29517.55273	8935.80547	38483.16016
9.750	106666.66406	-583.80590	106087.80469	28051.75070	8735.15234	36768.87500
10.000	106666.66406	-0.02162	106666.64063	26666.71680	8500.00480	35166.72266

STRESS

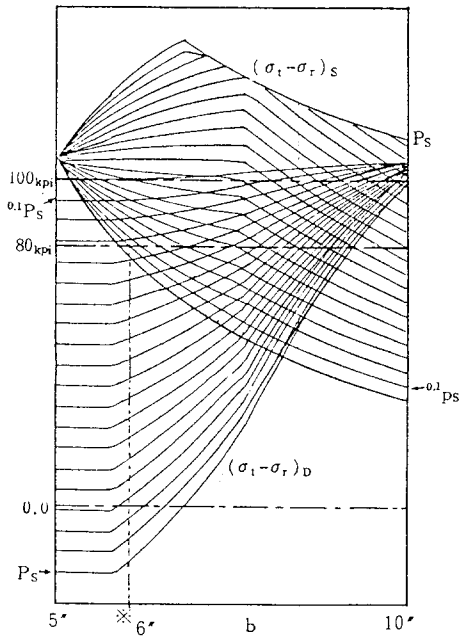


Fig 7. P_s 에 의한 응력선

Table 3. $b = 6.0$ inches 경우의 응력상태

	MAXIMUM SHEAR STRESS	
	DIE-RING	STRESS-RING
σ_t due to ΔP	66666.66406	50370.37109
σ_r due to ΔP	-40000.00000	-23703.70313
σ_t due to P_s	-12287.99609	3989.33203
σ_r due to P_s	0.00000	-1877.33276
total σ_t	54378.66797	54359.70313
total σ_r	-40000.00000	-25581.03516
$\sigma_t - \sigma_r$	94378.67188	79940.74219

5.2 Zero tensile stress limit

b_s 값에 따른 Die-ring과 Stress-ring의 응력곡선들은 Fig.8에 나타낸다. 이때 Die-ring은 Zero 인장응력이여야 하므로 $Y_D = 0$ 이며, Stress-ring의 경우 $Y_S = 80,000 psi$ 이다. 직선과 곡선의 교점에서 최소의 b 를 찾으면 40%의 b_s 선에 해당됨을 알 수 있고 이때의 응력상태는 Table 4에 다음과 같이 주어진다.

즉, Die-ring의 경우 $b \leq 5.87$ (inches)이며 Stress-ring의 경우 b 의 제한조건이 없다. 따라서 최적 설계치수로서 $b = 5.87$ (inches)

STRESS

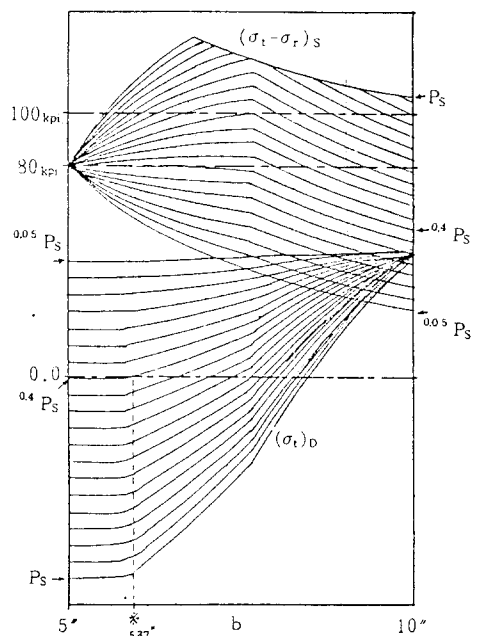


Fig 8. P_s 에 의한 응력선

Table 4. 40% P_s 일때 b 에 따른 (σ_t) 와 $(\sigma_t - \sigma_r)$

b	Eq. (15)	Eq. (16)	Eq. (17)	Eq. (7)	Eq. (9)	Eq. (11)
5.000	50000.00000	-51120.48438	-1120.48438	79979.67969	0.27561	79979.95312
5.250	50000.00000	-51000.00781	-1000.00781	72762.35938	6545.63916	79108.00000
5.500	50000.00000	-50999.99219	-999.99219	66115.70313	12689.94227	78905.64844
5.750	50000.00000	-50999.99219	-999.99219	60491.49219	18779.53734	79071.02344
6.000	50000.00000	-49152.00000	-3481.00000	55355.25489	23458.64602	79002.21825
6.250	50000.00000	-48000.00000	-3200.00000	51200.00000	27648.00000	78948.00000
6.500	50000.00000	-44351.99509	-5648.00591	47337.27734	31356.71094	78973.49219
6.750	50000.00000	-41807.99219	-8192.00781	43895.74609	34660.07813	78955.87813
7.000	50000.00000	-39168.00000	-10832.00000	40816.37813	37616.32813	78912.56625
7.250	50000.00000	-36437.00000	-13568.00000	38047.94141	40270.07449	78872.00000
7.500	50000.00000	-33600.00000	-16400.00000	35585.58449	42666.86406	78822.21875
7.750	50000.00000	-29964.35547	-20935.64453	33598.64844	44847.39844	78782.04488
8.000	50000.00000	-26495.30357	-25504.69141	31950.00000	46863.41406	78751.41406
8.250	50000.00000	-23495.30357	-25504.69141	29384.75586	48461.14063	69445.89844
8.500	50000.00000	-20474.33227	-25525.67273	27631.66016	49777.50391	67159.16406
8.750	50000.00000	-18751.30644	-32048.69531	26122.44922	50813.76953	64635.71875
9.000	50000.00000	-13403.05566	-34596.94531	24671.35742	51589.06250	62760.42188
9.250	50000.00000	-7474.84963	-42525.35938	23274.72656	52050.37472	60070.05078
9.500	50000.00000	-4820.29474	-45179.70625	22160.66406	52422.43359	57903.09766
9.750	50000.00000	-2335.42432	-47664.57492	21038.29102	52680.67109	55599.41406
10.000	50000.00000	-0.00647	-49999.71406	20000.03711	52890.02734	54000.00641

이때, 이때의 p_s 값은 6,860 (psi) 로서 식(2)에 의한 반경방향의 길이변화는 $b = 5.87$ (inches)에서 0.0112(inch)이다. Table 5의 값은 식(8)~(9)와 식(15)~(17)에 의한 응력상태이며, Die-ring의 경우 $\sigma_t = -18.0$ (psi)로서 Zero tensile 조건을 만족하고 있으며, Stress-ring의 경우 78,990(psi)로서 최적설계가 달성되었다.

Table 5. $b = 5.87$ inches 경우의 응력상태

	ZERO TENSILE STRESS LIMIT	
	DIE-RING	STRESS-RING
σ_t due to ΔP	50000.00000	39021.76563
σ_r due to ΔP	-30000.00000	-19021.76538
σ_t due to P_s	-50017.76172	14080.65527
σ_r due to P_s	0.00000	-6863.83447
total σ_t	-17.76172	53102.42188
total σ_r	-30000.00000	-25885.60156

6. 결론

분말압축성형용 금형의 최적설계를 구축하기 위한 일단계로서, 보강링이 하나일 경우에 대해 설계방법을 제시하였다.

이번에 제시된 방법은 가용 최대 Shrink-fit 압력의 한계내에서 반경방향의 b 값에 따른 응력분포곡선을 이용한 점이 특이하다.

또한 단일물체로 제작한 Die-ring의 경우 최대 전단응력조건(Maximum shear stress limit)을 사용하였고 2개 이상의 부분품으로 조합된 Die-ring의 경우에는 Zero 인장강도조건(Zero-tensile stress limit)을 이용하였다.

제시된 설계방법은 유사 압축성형용 금형의 설계에도 이용할 수 있으며, 다만 보강링의 최적설계용으로 발전되어야 할 것으로 본다.

<References>

- 1) Kuhn, H.D., "Optimum Die Design for Powder Compaction," International Journal of Powder Metallurgy & Powder Technology, Vol.14, No.4, 1978, pp.259-275.
- 2) Juvinall, R.C., "Stress, Strain, and Strength," McGraw-Hill Book Comp., N.Y., N.Y., 1967.
- 3) Shigley, J.E., "Mechanical Engineering Design," 3th Edi., McGraw-Hill Book Comp., N.Y., N.Y., 1977.
- 4) Spotts, M.F., "Design of Machine Elements," 5th Edi., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1978.