Burgers 식에 관한 유한차분근사의 특성

(Characteristics of Finite Difference Approximation for the Burgers' Equation)

강 주 환 (Kang, Ju Whan) *

이 길 성 (Lee, Kil Seong) **

1. 서 론

비선형 이송항과 점성항을 포함하는 Burgers 식의 유한차분법의 특성을 고찰하였다. 이송항이 선형일 경우, Bresler 방법, 음해법, upstream 차분법과 Chaudhari 방법 등의 확대율(amplification factor)을 분석하여 진폭오차(numerical dissipation error)와 위상오차(numerical dispersion error)의 발생근거를 규명하였다. 이를 토대로 몇 가지 차분식을 선택하여 비선형 이송항만 존재하는 경우와 점성항도 포함하는 경우에 대하여

* 서울대학교 토목공학과 박사과정

** 서울대학교 토목공학과 부교수

이러한 수치오차 및 안정성과 정확도를 검토하였다.

Burgers 식의 일반적인 형태는 식 (1)과 같다.

$$\partial C/\partial t = D \cdot \partial^2 C/\partial x^2 - (V + aC)\partial C/\partial x \quad \text{------------} (1)$$

여기서 C는 종속변수이고 t와 x는 각각 시간과 공간에 대한 독립변수이며 점성항의 D는 점성계수이고 이송항의 V는 이송속도, a는 상수이다.

2. 선형모형의 확대율과 진폭/위상 오차

식 (1)에서 a=0이면 식 (2)와 같은 선형모형이 된다.

$$\partial C/\partial t = D \cdot \partial^2 C/\partial x^2 - V \cdot \partial C/\partial x \quad \text{------------} (2)$$

이때 이송항과 점성항의 상대적인 크기를 Peclet 수($Pe \equiv V/D \cdot \Delta x$)로 나타낼 수 있는데 Pe가 큰 경우 진폭오차와 위상오차가 차분식에 따라 크게 나타나는 경우가 생긴다. 각 차분식의 확대율 $G(=C_j^{n+1}/C_j^n)$를 분석하여 이러한 오차의 발생 근거를 밝히겠다.

2.1 차분식과 확대율

Bresler 방법, 음해법, upstream 차분법과 Chaudhari 방법의 식 (2)에 대한 차분형태는 식 (3)~(6)과 같다.

$$\text{Bresler :}\quad -(\beta-\alpha/2)C_{j+1}^{n+1} + 2(1+\beta)C_j^{n+1} - (\beta+\alpha/2)C_{j-1}^{n+1}$$
$$= (\beta-\alpha/2)C_{j+1}^{n} + 2(1-\beta)C_j^{n} + (\beta+\alpha/2)C_{j-1}^{n} \quad \text{------------} (3)$$

$$\text{음해법 :}\quad -(\beta-\alpha/2)C_{j+1}^{n+1} + (1+2\beta)C_j^{n+1} - (\beta+\alpha/2)C_{j-1}^{n+1} = C_j^n \quad \text{------------} (4)$$

$$\text{upstream :}\quad C_j^{n+1} = \beta C_{j+1}^n + (1-2\beta-\alpha)C_j^n + (\beta+\alpha)C_{j-1}^n \quad \text{------------} (5)$$

$$\text{Chaudhari :}\quad C_j^n = (\beta^*-\alpha/2)C_{j+1}^n + (1-2\beta^*)C_j^n + (\beta^*+\alpha/2)C_{j-1}^n \quad \text{------------} (6)$$

여기서 $\beta = D\cdot\Delta t/\Delta x^2$, $\alpha = V\cdot\Delta t/\Delta x$, $\beta^* = \beta + \alpha^2/2$ 이다. 이들에 대한 확대율($G \equiv |G| e^{i\phi}$)은 각각 다음과 같다($\theta \equiv k\Delta x$, k는 상수).

$$G_B = (1-\beta+\beta\cos\theta - i\alpha/2\ \sin\theta)/(1+\beta-\beta\cos\theta + i\alpha/2\cdot\sin\theta) \quad (7)$$

$$G_L = 1/(1+2\beta-2\beta\cos\theta + i\alpha\sin\theta) \quad (8)$$

$$G_u = 1-(2\beta+\alpha)(1-\cos\theta) - i\alpha\sin\theta \quad (9)$$

$$G_c = 1-(2\beta+\alpha^2)+(2\beta+\alpha^2)\cos\theta - i\alpha\sin\theta \quad (10)$$

2.2 진폭오차와 위상오차

$\Delta x=0.4, \Delta t=5.0, D=0.0006, V=0.072$이면 $\alpha=0.9, \beta=0.02$, $Pe=48.0(\gg 2\sqrt{2})$이므로 이때 이송항이 지배적인 흐름이 되어 진폭/위상 오차가 크게 작용하게 된다. 이에 대하여 Argand diagram을 그린 것이 (그림 1)(생략)이고 위상치 ϕ를 구한 것이 (표 1)이다. (그림 1)을 보면 θ가 작을 때 음해법을 제외하고는 $|G| \cong 1$ 임을 알 수 있다. 즉 음해법에서만 진폭오차가 크게 작용하게 됨을 예측할 수 있다. (표 1)을 보면 Bresler 방법과 음해법이 다른 차분법에 비해 해석적 해(ϕ_e)보다 파속이 다소 느림을 알 수 있다. (그림 2)(생략)는 실제로 이 차분법을 이용하여 선형모형에 대한 수치 실험을 실시한 것인데 이러한 사실들을 잘 나타내주고 있다. 또한 확대율의 크기는 1에 가깝지만 파속이 느린 차분법의 경우 위상오차가 심해지는데 Bresler 방법에서 완연히 나타나고 있다.

3. 비점성 Burgers 식

3.1 대상문제와 해석적 해

다음식 (11)과 같은 보존형태(conservation form)의 초기치 문제를 해석 대상으로 선정하였다($F=C^2/2$).

$$\partial C/\partial t+\partial F/\partial x = 0, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$C(x,0) \equiv g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq 1 \\ |x|, & |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{------(11)}$$

이에 대한 해석적 해(weak solution)는 다음과 같다.

$$C(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq x_s(t) \\ x/(1+t), & x_s(t) \leq x \leq 1+t \\ 1, & x \geq 1+t \end{cases} \quad \text{------(12)}$$

여기서 $x_s(t)=1+t-\sqrt{2(1+t)}$ 이다.

3.2 적용 차분법 및 안정성

진폭/위상 오차 각각에 매우 민감한 Lax-Fredrich(L-F)와 Lax-Wendroff (L-W), 그리고 Lax-Wendroff의 개량된 방법인 MacCormack(MC) 방법 등을 선택하여 적용하였다. 각 차분식의 형태는 다음 식 (13)-(15)와 같다.

$$\text{L-F :} \quad C_j^{n+1} = (C_{j+1}^n+C_{j-1}^n)/2-\Delta t/\Delta x(F_{j+1}^n-F_{j-1}^n)/2 \quad \text{------(13)}$$

$$\text{L-W :} \quad C_j^{n+1} = C_j^n-\Delta t/\Delta x(F_{j+1}^n-F_{j-1}^n)/2+(\Delta t/\Delta x)^2/2 \cdot$$
$$[A_{j+1/2}^n(F_{j+1}^n-F_j^n)-A_{j-1/2}^n(F_j^n-F_{j-1}^n)] \quad \text{------(14)}$$

여기서 $A_{j+1/2} \equiv (dF/dC)_{j+1/2} = (C_j+C_{j+1})/2$ 가 된다.

$$\text{MC :} \quad C_j^{\overline{n+1}} = C_j^n-\Delta t/\Delta x(F_{j+1}^n-F_j^n)$$

$$C_j^{n+1} = [C_j^n+C_j^{\overline{n+1}}-\Delta t/\Delta x\cdot(F_j^{\overline{n+1}}-F_{j-1}^{\overline{n+1}})]/2 \quad \text{------(15)}$$

이들이 안정하게 되는 범위는 다음 식 (16)과 같다.

$$|(\Delta t/\Delta x)(C_{j+1}^n+C_{j-1}^n)/2| \leq 1 \quad \text{------(16)}$$

3.3 수치 실험

앞에서 언급한 초기치문제에 대하여 식 (16)의 안정조건을 만족시키도록 $\Delta t_{max} = \Delta x/\max_j |V_j^n|$ 으로 정하여 수치실험을 하였다. 그 결과 Lax-Fredrich 방법과 Lax-Wendroff 방법에서 각각 진폭오차와 위상오차가 발생하였다(그림 3 생략). 반면에 MacCormack 방법에서는 두 오차가 번갈아 가며 나타나지만 그 정도는 비교적 적은 양이었다. 또한 CPU 시간도 L-W > MC > L-F 순으로 MacCormack 방법이 그 정확성에 비해 다소 경제적임을 보이고 있다.(표 2 참조)

4. 점성항을 포함하는 Burgers 식

4.1 대상문제와 해석적 해

식 (1)에서 V=0, D=1, a=1 인 경우 Brailovskaya, Lax-Wendroff, MacCormack 방법을 다음식 (17)과 같은 초기조건을 갖는 문제에 적용하였다.

$$C(x,t=0) = \operatorname{sgn} x \qquad (17)$$

해석적 해는 식 (18)과 같다(그림 4 생략).

$$C(x,t) = \{G(x,t)-G(-x,t)\}/\{G(x,t)+G(-x,t)\} \qquad (18)$$

여기서 $G(x,t) = \exp(t-x)\ \mathrm{erfc}\{(x-2t)/(2\sqrt{t})\}/2$ 이다.

4.2 적용 차분법 및 안정성

4.2.1 Brailovskaya 방법

$$\text{Predictor} : C_j^{\overline{n+1}} = C_j^n - a(\Delta t/2\Delta x)\cdot(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) - V(\Delta t/2\Delta x)(C_{j+1}^n - C_{j-1}^n) + D(\Delta t/\Delta x^2)(C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n) \qquad (19)$$

Corrector : $C_j^{n+1} = C_j^n - a(\Delta t/2\Delta x)(F_{j+1}^{\overline{n+1}} - F_{j-1}^{\overline{n+1}}) - V(\Delta t/2\Delta x)(C_{j+1}^n - C_{j-1}^n)$

$$+D(\Delta t/\Delta x^2)(C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n) \quad \text{------------(19')}$$

안정조건은 다음과 같다.

$$\Delta t \le \min[\Delta x^2/(2D),\ \Delta x/|A|] \quad \text{------------(20)}$$

4.2.2 2-step Lax-Wendroff 방법

Step 1 : $C_j^{n+1/2} = (C_{j+1/2}^n + C_{j-1/2}^n)/2 - a(\Delta t/\Delta x)(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) - V(\Delta t/\Delta x)(C_{j+1/2}^n - C_{j-1/2}^n)$

$$+D(\Delta t/\Delta x^2)[(C_{j-1/2}^n - 2C_{j-1/2}^n + C_{j+1/2}^n) + (C_{j+1/2}^n - 2C_{j+1/2}^n + C_{j-1/2}^n)] \quad \text{------(21)}$$

Step 2 : $C_j^{n+1} = C_j^n - a(\Delta t/\Delta x)(F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}) - V(\Delta t/\Delta x)(C_{j+1/2}^{n+1/2} - C_{j-1/2}^{n+1/2})$

$$+D(\Delta t/\Delta x^2)(C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n) \quad \text{------------(21')}$$

안정조건은 다음과 같다.

$$(\Delta t/\Delta x^2)(A^2\Delta t + 2D) \le 1 \quad \text{------------(22)}$$

4.2.3 MacCormack 방법

Predictor : $C_j^{\overline{n+1}} = C_j^n - a(\Delta t/\Delta x)(F_{j+1}^n - F_j^n) - V(\Delta t/\Delta x)(C_{j+1}^n - C_j^n)$

$$+D(\Delta t/\Delta x^2)(C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n) \quad \text{------------(23)}$$

Corrector : $C_j^{n+1} = [C_j^n + C_j^{\overline{n+1}} - a(\Delta t/\Delta x)(F_j^{\overline{n+1}} - F_{j-1}^{\overline{n+1}}) - V(\Delta t/\Delta x)(C_j^{\overline{n+1}} - C_{j-1}^{\overline{n+1}})$

$$+D(\Delta t/\Delta x^2)(C_{j+1}^{\overline{n+1}} - 2C_j^{\overline{n+1}} + C_{j-1}^{\overline{n+1}})]/2 \quad \text{------------(23')}$$

안정조건은 다음과 같다.

$$\Delta t \le \Delta x^2/(|A|\cdot\Delta x + 2D) \quad \text{------------(24)}$$

4.3 수치 실험

$\Delta x = 0.05$ 또는 0.025, $\Delta t = (\Delta x)^2/(|A|\cdot\Delta x + 2D)$에 대하여 $t = 0.01$ 또는 0.1에서의 수치해의 파형을 구하여 해석적 해와의 RMS 오차와 계산시간(CPU)을 (표 3)에 나타내었다. 계산시간은 세 차분법 모두 비슷하지만 MacCormack 방법이 가장 정확하였고 Lax-Wendroff 방법이 가장 부정확하였다.

5. 결 론

1) Pe가 큰 경우 선형 대류분산모형에서 확대율의 분석 결과 음해법은 진폭오차와 위상오차에 민감하고 Bresler 방법은 위상오차에만 민감하다.

2) weak solution을 갖는 비점성 Burgers 식에의 적용시에 Lax-Fredrich 방법과 Lax-Wendroff 방법에서 각각 진폭오차와 위상오차가 발생된다. CPU 시간은 L-W>MC>L-F 의 순으로 MacCormack 방법이 그 정확성에 비해 다소 경제적이다.

3) 점성 Burgers 식에의 적용시 MacCormack 방법이 가장 정확하고 2-step Lax-Wendroff 방법이 가장 부정확하며 CPU 시간은 Brailovskaya 방법을 포함한 세 차분법 모두 비슷하다.

표 1. 각 차분법의 phase angle

ϕ \ θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
ϕ_e	0.00	-13.50	-27.00	-40.50	-54.00	-67.50	-81.00
ϕ_u	0.00	-13.53	-27.24	-41.29	-55.78	-70.77	-86.19
ϕ_c	0.00	-13.49	-26.92	-40.28	-53.58	-66.94	-80.54
ϕ_B	0.00	-13.29	-25.36	-35.30	-42.58	-46.99	-48.46
ϕ_I	0.00	-13.11	-24.23	-32.47	-37.93	-41.00	-41.99

표 2. 비점성 Burgers 식의 각 차분법 별 CPU 시간 (msec)
($\Delta t_{n+1} = \Delta x / \max_j |v_j^n|$, t = 2 sec)

차 분 법	$\Delta x=1/20$	$\Delta x=1/40$
Lax Fredrich	1140	4037
Lax-Wendroff	596	1859
MacCormack	812	2771

표 3. 점성항을 포함하는 Burgers 식에 대한 RMS 오차/계산시간

차 분 법 \ time	0.01		0.10
Δx	0.050	0.025	0.050
Brailovskaya	0.00558/661	0.00350/2318	0.01611/2587
Lax Wendroff	0.00957/666	0.00687/2357	0.03351/2770
MacCormack	0.00345/685	0.00293/2383	0.01553/2640