

박 용규 \*, 정 현교 \*\*, 이 기식 \*\*\*, 한 송엽 \*

서울대학교 전기공학과 \* 강원대학교 전기공학과 \*\* 단국대학교 전기공학과 \*\*\*

An Adaptive Finite Element Method for Magnetostatic Force Computations.

Park Yong Gyu \* Jung Hyun Kyo \*\* Lee Ki Sik \*\*\* Hahn Song Yop \*

Dep. of E. E. Seoul National Univ. \* Kang Won Univ. \*\* Dan Kuk Univ. \*\*\*

Abstract

This paper presents an adaptive finite element method for magnetostatic force computation using Maxwell's stress tensor. Mesh refinements are performed automatically by interelement flux density discontinuity errors and element force errors. In initial mesh, the computed forces for different integration paths give great differences, but converge to a certain value as mesh division is performed by the adaptive scheme. We obtained good agreement between analytic solutions and numerical values in typical examples.

1. 서 론

유한 요소법을 사용하여 힘을 계산할 경우 정확한 해를 얻기 위해서는 매우 세밀한 요소분할이 필요한데, 어느 부분을 세분할 것인가에 대해서는 많은 경험이 요구 된다. 경우에 따라서는 필요이상의 과도한 요소분할로 컴퓨터 메모리나 계산시간에 있어 낭비를 초래하기도 한다. 본 연구에서는 맥스웰 스트레스 텐서 (Maxwell stress tensor) 를 사용하여 힘을 계산하였는데 정확한 힘 계산을 위하여 어느정도 세밀한 요소분할이 필요한가를 모르기 때문에 적응 유한 요소법을 도입하였다 [1], [2], [3]. 처음에는 아주 거친 요소망에서 힘을 구하고, 그 결과에서 힘의 크기가 크게 나타나는 요소를 세분하여 새로운 요소망에서 힘을 계산해 나가는 알고리즘을 도입하였다. 이와 같은 과정을

반복하여 가는 과정에서 힘의 계산치가 수렴하게 되는데 이것이 힘의 참값이며 여기서 계산을 종료하게 된다. 맥스웰 스트레스 텐서 방법에서는 적분 경로에 관계없이 힘의 크기가 일정 하여야 하는데 [4], 수치적으로 확인하여 본 알고리즘의 유용성을 입증 하였다.

2. 정자력 방정식

2.1 맥스웰 스트레스 텐서 (Maxwell stress tensor) 자기력 밀도는 전류 밀도와 자속 밀도에 의하여 다음과 같이 표시된다 [5].

T = J x B (N/m^2) (1)

정자장에서는

J = ∇ x H (2)

이므로 식(1)은

T = 1/μ₀ (∇ x B) x B (3)

가 된다. 따라서 체적 V 인 물체가 자기장에 의해 작용 받는 힘 F 는

F = ∫v T dv (4)

로 된다. 그런데

(∇ x B) x B = (B · ∇) B - 1/2 ∇ B² (5)

이므로 식 (4) 는

F = 1/μ₀ ∫v ((B · ∇) B) dv - ∫s 1/2 B² n ds (6)

가 된다. 여기서 S 는 체적 V 의 표면이고 n 은 S 에 수직인 외향단위 벡터이다.

∫v (B · ∇) B dv = ∫s B (B · n) ds (7)

의 관계가 성립하므로 식 (6) 은

$$\vec{F} = \int_V \vec{F} dv = \int_S \vec{P} ds \quad (8)$$

로 되고 여기서

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} (\hat{n} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \hat{n} \quad (9)$$

이고 이것을 막스웰의 스트레스 텐서라 한다 [4] [5]. 식 (4) 와 식 (8) 을 비교할때 체적 V 인 물체에 작용하는 힘은 그 물체 표면 S 에 작용하는 스트레스 텐서  $\vec{P}$  를 면적분한 것과 같음을 알수있다.

### 2. 2 요소별 정자력 계산

본 연구에서는 2차원 (X-Y 평면) 문제만을 다루므로 적분경로가 X-Y 평면에서 선으로 된다. 요소는 삼각형 요소를 사용하고 시험함수 (trial function) 는 1차 함수이고 자기 벡터퍼텐셜을 이용하였다. 그러므로 한 요소내에서는 자속밀도가 일정하게 된다. 그림 1 은 자속밀도가 Bx 및 By인 요소에 적분경로 a-b 가 걸쳐 있는 경우이다. 자속밀도가 일정하기 때문에 구간(a, b) 에서  $\vec{P}$  값은 일정하게 된다. 점 a 및 b 의 좌표를 각각 (Xa, Ya), (Xb, Yb) 라 하고  $\vec{P}$  의 X 성분 및 Y 성분을 각각 Px 및 Py 라 하면

$$\vec{P}_x = \frac{1}{\mu_0} (\hat{n}_x \cdot \vec{B}) \vec{B}_x - \frac{1}{2\mu_0} B_x^2 \hat{n}_x \quad (10)$$

$$\vec{P}_y = \frac{1}{\mu_0} (\hat{n}_y \cdot \vec{B}) \vec{B}_y - \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \hat{n}_y \quad (11)$$

그러므로 경로 a-b ( $\Delta l$ ) 에 작용하는 힘  $\Delta F$  는

$$\Delta \vec{F} = \vec{P} \Delta l \quad (12)$$

이고 X 성분 및 Y 성분 Fx 및 Fy 는 각각

$$F_x = \frac{\Delta S}{2\mu_0} ((B_x^2 - B_y^2) \hat{n}_x + 2\hat{n}_y B_x B_y) \quad (13)$$

$$F_y = \frac{\Delta S}{2\mu_0} (-(B_x^2 - B_y^2) \hat{n}_y + 2\hat{n}_x B_x B_y) \quad (14)$$

여기서  $\Delta S = Z \cdot \Delta l$

Z 는 Z축 방향의 길이,  $\hat{n}_x, \hat{n}_y$  는 각각 n 의 X 성분 및 Y 성분이다.

위와같이 요소별 힘이 계산되면 전체 힘 F는

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^e \Delta \vec{F}_k \quad (15)$$

로 계산된다.

여기서  $\Delta \vec{F}_k$  는 식 (12) 로 계산되는 요소별 힘이고 e 는 적분경로에 포함되는 요소수이다.

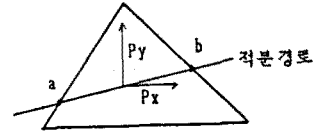


그림 1. 삼각형 요소 및 적분경로.

### 3. 적용 요소 분할

식 (12) 에서 보는 바와같이 힘  $\Delta F$  가 정확히 계산하려면  $\vec{P}$  가 정확히 계산되고  $\Delta l$  이 충분히 작아야 한다. 그런데  $\vec{P}$  는  $\vec{B}$  의 함수이므로  $\vec{B}$  를 정확히 계산하기 위해 적용 요소 분할 기법을 적용하였다. 우선 전 계산 영역에 걸쳐  $\vec{B}$  의 오차가 큰 곳의 요소를 세분하고 다음으로는 적분 경로를 따라  $\Delta F$  의 값이 큰 곳의 요소를 세분한다.

이것은 계산영역 전체에 걸쳐  $\vec{B}$  의 값을 정확히 계산 하면서 적분경로에서의  $\vec{B}$  값이 큰 곳 또는  $\Delta l$  이 큰 곳을 세분하여  $\Delta F$  의 값을 정확히 계산하는 효과를 주게된다.

#### 3-1 자속밀도 오차에 의한 요소분할

각 요소 경계에서  $\vec{B}_n$  과  $\vec{H}_t$  가 연속이 되어야 한다는 조건을 이용하여 유한요소법으로 계산된 자속밀도의 오차를 추정하고 이 오차가 큰 요소부터 요소를 4분, 3분 또는 2분하는 방법을 사용한다 [1].

#### 3-2 $\Delta F$ 크기에 따른 요소분할

힘 계산을 위한 적분경로를 따라 요소별로  $\Delta F$  를 계산한다. 이것들의 평균치를 구한 다음 각 요소별  $\Delta F$  가 이 평균치 보다 큰 요소는 그오차 크기가 큰것부터 4분 3분 또는 2분 한다.

그림 2 는 본 연구에서 사용한 적용요소분할 알고리즘 의 흐름도를 나타낸다.

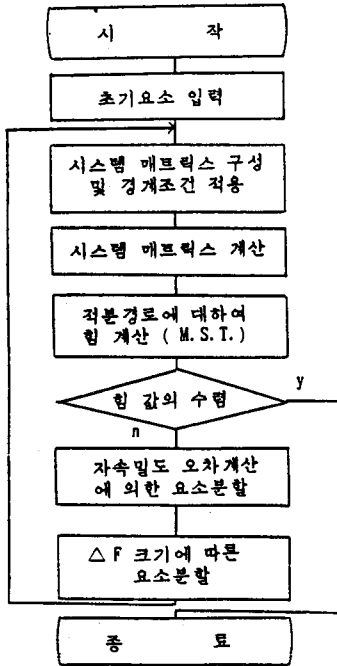


그림 2. 적응 유한요소분할 알고리즘.

4. 사례 연구

4.1 U형 전자석의 힘

그림 3은 U형 전자석에 작용하는 힘  $F_y$ 를 구하기 위한 모델이다. 이 모델을 본 연구에서 제시한 적응요소분할 알고리즘으로 계산하여 보자. 여기서는 적응유한요소법으로 요소를 분할함에 따라 적분경로에 관계없이 힘이 같게 된다는 것을 보여주기 위하여 3개의 적분경로를 선택하였다. 그림 4는 초기 요소망으로서 567개의 요소로 되어있으며, 그림 5는 적응요소분할을하여 만들어진 최종 요소 4675 요소로 분할된 결과이다. 그림 6은 적응요소분할을 하여감에 따라 적분경로별 힘을 계산한 것인데 요소가 약 3700개 정도에서 힘의 수렴함을 볼 수 있다. 이 그림을 보면 적분 경로에 관계없이 힘이 같이 일치함을 알 수 있다. 또한 그림 6에서 각 3개의 경로에서 계산된 힘의 평균치도 나타내었는데 약 2000요소에서 수렴하므로 평균치를 사용 하면 계산

시간이 매우 단축됨을 알 수 있다. 그림 7은 이 모델의 플럭스분포를 보여준다.

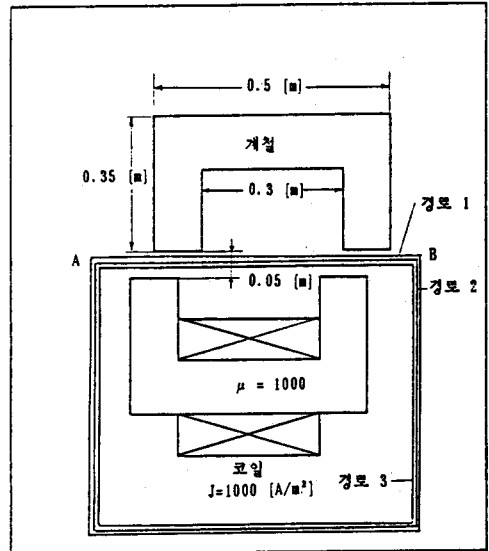


그림 3. U형 전자석 모델 및 적분경로

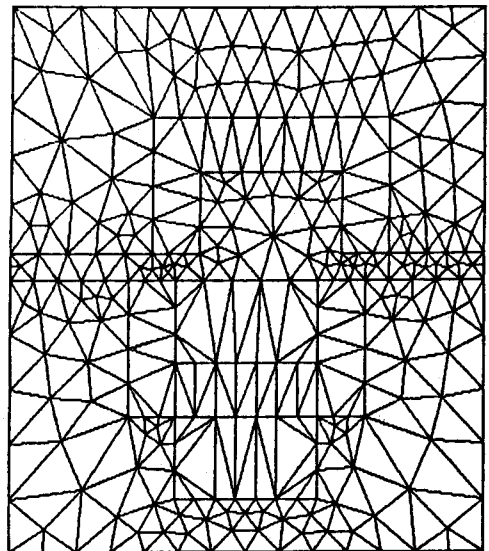


그림 4. 초기 요소 (511 요소).

5. 결론

유한요소법을 이용하여 정자력을 계산하는 경우 계산된 힘의 정확도를 높이기 위하여 적응유한요소법을 도입하였다. 요소 수가 적을 때는 적분경로에 따라 힘의 값이 다르게 나타났으나 적응요소분할을 하여 감에 따라 힘의 값이 적분 경로에

관계없이 일정한값에 수렴함을 알았다. 힘을 정확히 구하기 위하여 적분 경로를 3 개 택하고 각각의 경로에 대하여 힘을 계산하고 이들 값이 어느 오차 범위내에 들어가면 이들의 평균치로 부터 힘을 구하는 방법이 계산 시간을 단축할수 있었다. 적용 요소 분할을 사용하였기 때문에 필요한 부분만 요소가 세분되어 컴퓨터의 기억 용량이나 계산시간을 절약할수있었다. 본 연구에서는 힘 계산만을 다루었는데 이 알고리즘은 토크계산에는 물론 교류 전자력 계산에도 확장 가능하다.

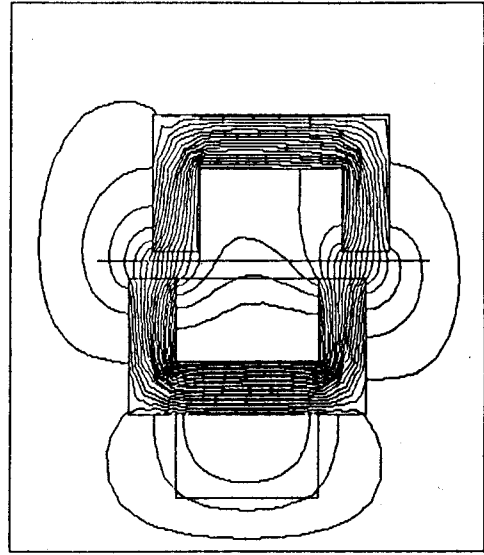


그림 7. 플럭스 분포.

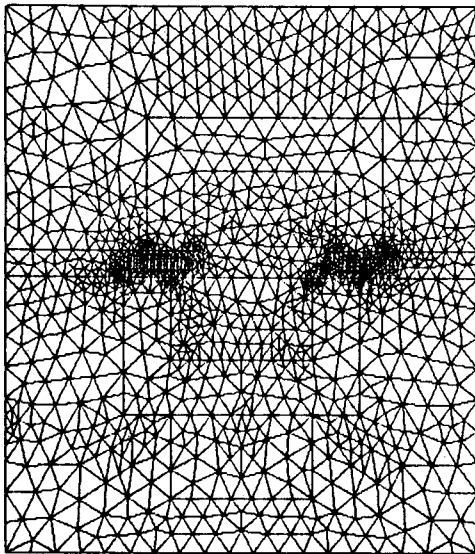


그림 5. 최종 요소 ( 4451 요소 ).

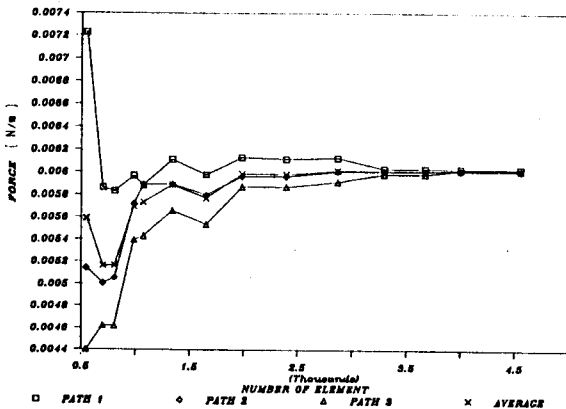


그림 6. 요소수의 증가에 따른 각 경로별 힘 계산결과와 수렴.

참고 문헌

- [ 1 ] Song-yop Hahn et al., " A posteriori error estimate for adaptive finite element mesh generation ", IEEE Trans. on Magnetics , Vol.MAG-24, No.1 pp .315-317, January 1988.
- [ 2 ] A.R.Pinchuk and P.P.Silvester , " Error Estimation for automatic adaptive finite element mesh generation " ,IEEE Trans.on Magnetics ,Vol.MAG-21, No. 6, pp.2551-2554, November 1985.
- [ 3 ] Z.J. Cendes and D.N. Shenton, " Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic field " , IEEE Trans. on Magnetics , Vol. MAG-21 , No.2, pp. 1811 - 1816 , September 1985.
- [ 4 ] K. Reichert, H. Freundl and W. Vogt, "The calculation of force and torque within numerical magnetic field calculation method",Proceedings on COMPUMAG, pp . 64-74, 1976.
- [ 5 ] Durney and Johnson , Introduction to modern elect romagnetics , McGrawhill , pp. 163-166, 1984.