

김 주홍 정 인국 오 준남 김 진원 조 한준

東國 大學校 電子工學科

The Enlarged Sorting Algorithm of Tri - Point Comparison Method for Bang - Bang Optimal Control

Kim, Joo Hong Jeong, In Guk Oh, Jun Nam Kim, Jin Wan Gho, Han Jun

Department of Electronic Eng., Dongguk University

Abstract

This paper proposes a algorithm to obtain a time-varying system parameters for the optimal controller. The proposed algorithm is enlarged from the optimal sorting algorithm. It applies to Bang-Bang control and compares with CGD Method. We confirm that the proposed algorithm is excellent.

제어변수(control variable)의 최적화에 適用되는 알고리즘을 提案하고 그 特性을 檢討한 것이다.

2. 3 点比較 索出法에 의한 最適化 알고리즘

발표된 이 알고리즘의 개요를 쓰면 다음과 같다. 3 점비교 색출법은 最適 시스템因數의 계산을 효과적으로 계산하는 알고리즘이며, 일반적으로 유한개의 인수에 적용될 수 있으나 因數가 하나인 경우에 대하여 설명하면 다음과 같다.

1. 서 론

제어계에서 制御變數나 制御器의 定數의 最適化에 관한 이론과 알고리즘은 많은 연구 발표가 있었다.

最適制御 문제는 극히 간단한 경우를 제외하고는 非線形 多次元 문제이므로 컴퓨터에 의한 수치계산을 필요로 한다. 또한 선형계에 있어서도 評價指數는 거의가 2차형식(quadratic form)이므로 비선형 문제도 귀착된다.

최적 제어계에 적용되는 대표적인 수치계산법은 Dynamic Programing法, 最級降下(Steepest Descent)法, CGD(Conjugate Gradient Descent)法 등이 있으나, 狀態方程式이외에 많은 補助方程式들이 필요하며 많은 계산시간과 큰 기억용량이 요구 된다. 1) 2)

최근 최적제어의 제어기 설계에 적합한 새로운 알고리즘으로 3점비교 색출법을 제안한 바있으나 이것은 시스템인수를 계산하는 알고리즘으로 중태의 것과는 달리 Hamiltonian 등의 보조 방정식이 불필요하며 좋은 수렴성을 갖고 있으나 시불변 시스템인수를 이용하는 제어기 설계에 局限되는 短점을 갖고 있었다. 1)

本 논문에서는 이 알고리즘을 擴張 改選하여 Bang-Bang 제어와 같은 有限個의 異散變數를 갖는

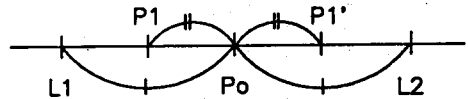


그림 1. 3 점비교 색출법 Fig. 1. Tri- point Comparison Method.

그림1 과 같이 L1과 L2를 探索範圍로 정하고 이의 중앙점(P0)를 초기점으로 택하여 探索區間 L1~ P1과 P0~ L2의 二等分點을 각각 P1과 P1'로 정하고 이 3 점(P0, P1, P1') 중에서 평가지수가 최소가 되는 점을 선택하여 그점을 P1*로 쓰고 기억시켜 1 回探索을 마친다.

다음 2 回探索은 P1* 을 중심으로한 앞의 탐색 구간의 1/2 의 거리를 갖는 탐색점 P2, P2' 에 대하여 1 회탐색 방법을 반복하여 새로운 P2* 를 찾는다. 이와 같은 계산을 반복하여 평가지수가 수렴할때 까지 계속한다.

이와 같이하여 最小의 평가지수가 되는 시스템 인수를 탐색하는 법이며 인수가 여러개인 경우는 毎계산횟수에 각각의 인수에 대해서 같은 探索法을 적용한다.

3. Bang - Bang 制御를 위한 3 点比較 案出法

위의 3 点比較 案出法은 時不變 시스템인 수를 이용하는 제어기의 설계에는 적절한 時變 시스템인 수의 경우에는 부적합하므로 이를 改善하여 Bang - Bang 제어의 最適化 문제에 拡張適用하기 위하여 시도한 알고리즘은 다음과 같다.

Bang - Bang 제어기의 제어변수는 그림 2 와 같다.

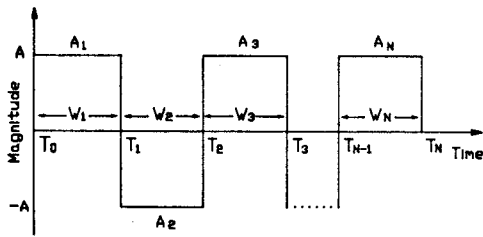


그림 2. bang - bang 제어입력
Fig. 2. bang - bang control input.

여기서 A_1, A_2, \dots, A_N 는 입력의 크기, T_1, T_2, \dots, T_N 는 스위칭 시각이며 W_1, W_2, \dots, T_N 는 스위칭 시간을 나타낸다. 이때 最適化의 대상인 要素로 크기 A 를 固定하고 스위칭 시간 W 를 위한 경우와 W 를 고정하고 신호의 크기 A 를 위한 두 경우이다. 이 두 경우에 대한 알고리즘을 만들어 一般性을 잃지 않고 간단히 하기 위하여 變數를 3 개로 制限하고 첫 번째의 경우에 대해서 설명키로 한다.

(1) 스위칭시간 W_1 이 변화하는 과정

입력이 스위칭시간 W_2 및 W_3 는 고정시키고 W_1 만을 獨立的으로 변화시킬때 그림 3 의 점선과 같이 $\pm \Delta W_1$ 에 따라 2 가지 경우를 생각한다.

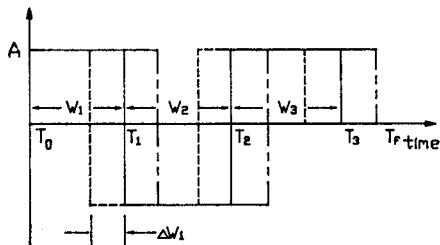


그림 3. W 의 변화 형태
Fig. 3. Change form of W.

그림 3 에서 스위칭시간 W_2 및 W_3 는 불변이므로 W_1 의 변화량 ΔW_1 및 변화되는 스위칭 시각은 식 (3-1) 및 (3-2) 와 같으며 이때 $K = 0$ 이다.

$$\Delta W_1 = R \cdot W_1 \quad (0 < R < 1) \quad (3-1)$$

$$\begin{aligned} T_1(K+1) &= T_1(K) \pm \Delta W_1 \\ T_2(K+1) &= T_2(K) \pm \Delta W_1 \quad (3-2) \\ T_3(K+1) &= T_3(K) \pm \Delta W_1 \end{aligned}$$

여기서는 R 은 스위칭시간의 변화량을 결정하는 因數로 0 과 1 사이의 값을 가진다.

식 (3-2) 에서 $+\Delta W_1$ 의 경우와 $-\Delta W_1$ 의 경우의 각 3 개의 시각에 대한 2 개의 평가자수와 변화 이전의 평가자수를 중에서 最小值의 평가자수를 案出하여 평가자수와 이에 대응하는 3 개의 스위칭시간을 $T_1(1), T_2(2), T_3(3)$ 로 하여 기억시키고 다음의 계산단계로 넘어간다.

(2) 스위칭시간 W_2 가 변화하는 과정

다음은 제 1 과정에서 기억된 $T_1(1), T_2(2), T_3(3)$ 을 기준으로 하여 스위칭시간 W_1 및 W_3 는 고정시키고 W_2 를 식 (3-3) 의 변화폭으로 변화시키는 과정이다.

$$\Delta W_2 = R \cdot W_2 \quad (0 < R < 1) \quad (3-3)$$

$$\begin{aligned} T_1(K+1) &= T_1(K) \\ T_2(K+1) &= T_2(K) \pm \Delta W_2 \quad (3-4) \\ T_3(K+1) &= T_3(K) \pm \Delta W_2 \end{aligned}$$

이러한 변화를 그림 4 에 나타내었으며 이때의 스위칭 시각의 변화는 식 (3-4)와 같으며 여기서 $K = 1$ 이다.

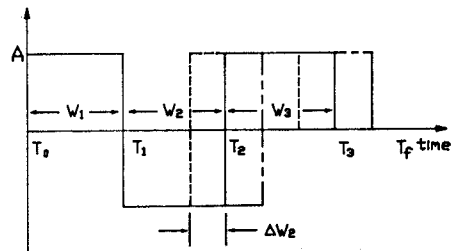


그림 4. W 의 변화형태
Fig. 4. Change form of W

여기서는 제 (1)과정의 방법을 반복하여 적어진 평가자수와 이때의 스위칭 시각 $T_1(2), T_2(2), T_3(2)$ 를 기억한다.

(3) 스위칭시간 W_3 가 변화하는 과정

다음은 제 (2)과정에서 정해진 $T_1(2), T_2(2), T_3(2)$ 를 기준으로 하여 스위칭시간 W_1 및 W_2 는 고정시키고 W_3 를 식 (3-5)의 변화폭으로 변화시키는 과정이며 이를 그림 5 에 나타내었고 스위칭시간의 변화는 식 (3-6)과 같으며 이때 $K = 2$ 이다.

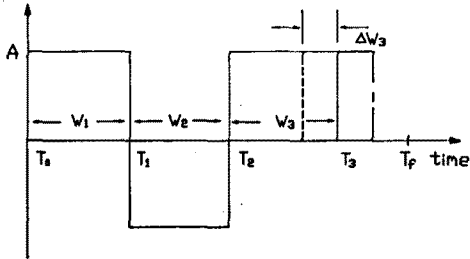


그림 5. W의 변화형태
Fig. 5. Change form of W

$$\Delta W_3 = R \cdot W_3 \quad (0 < R < 1) \quad (3-5)$$

$$\begin{aligned} T_1(K+1) &= T_1(K) \\ T_2(K+1) &= T_2(K) \\ T_3(K+1) &= T_3(K) \pm \Delta W_3 \end{aligned} \quad (3-6)$$

제 (1)과정과 같은 방법으로 평균제수와 스위칭 시간 $T_1(3)$, $T_2(3)$, $T_3(3)$ 을 기억하고 1회의 계산과정을 완료한다. 그리고 반복계산에 따른 스위칭 시간의 변화폭은 식 (3-7)과 같다.

$$W_i = R^M \cdot W_i \quad (0 < R < 1) \quad (3-7)$$

여기서 $i = 1, 2, 3 \dots$ 이고 M은 반복계산의 횟수이다. 상술한 과정 (1), (2), (3)을 반복 진행하여 스위칭시간이 3개인 경우 이를 제어변수로 취하여 최적화 문제를 해결할 수 있다.

또한, 그림 6은 이들의 계산과정을 간략하게 흐름도로 나타낸 것이다.

4. Bang-Bang 최적제어의 시뮬레이션 및 검토

계자제어형 (Field-controlled) DC 모터의 위치 제어에 본 알고리즘을 적용하여 시뮬레이션하고 그 성능을 비교 검토한 결과 다음과 같다.

DC 모터의 諸元을 대입하여 구한 상태방정식은 식 (4-1)과 같다. 여기서 θ 는 모터 회전속의 角變位, $\dot{\theta}$ 는 角速度 그리고 i 는 제어 입력인 계자전류이다. 그 블록선도는 그림 7과 같다. 3)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R}{J} x_2 + 5x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + 0.1u \\ \dot{x}_4 &= (x_4 - 10)^2 \end{aligned} \quad (4-1)$$

DC 모터의 각변위 θ 를 영에서부터 10 rad 회전시키는 것이 최적화의 문제로 제기되며 이에 대한 평균제수는 다음과 같이 표시한다.

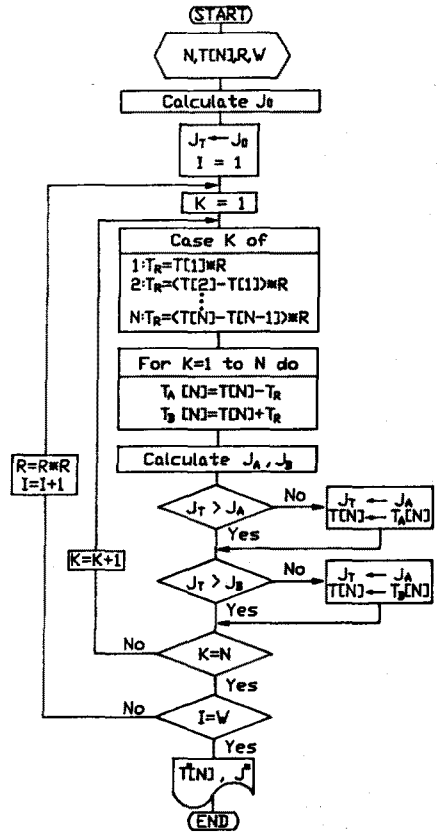


그림 6. 흐름도
Fig. 6. Flowchart

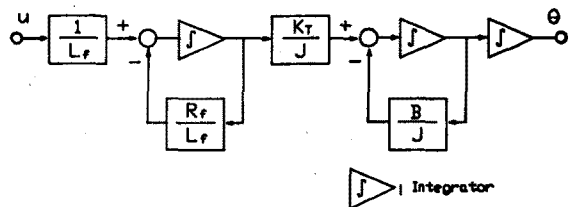


그림 7. DC 모터 制御系の 다이어그램
Fig. 7. Diagram of the DC Motor Control System

$$J = [x_4 + W_1(x_4 - 10)^2 + W_2 x_2^2 + W_3 x_3^2]_{t=0}^{t=t_f} \quad (4-2)$$

식 (4-2)에서 W_1, W_2, W_3 는 하중상수 (weight constant)를 나타낸다. 계산에 있어서 초기시간 $t_0 = 0$ (sec), 초기상태변수 $x(0) = 0$, 최종시간 $t_f = 5$ (sec), 하중상수 $W_1 = W_2 = W_3 = 100$ 으로 정하고 상태方程式의 解法은 적분스텝 (Integration Step)을 150으로 하는 4차의 Runge Kutta 법을 이용하였으며 제어변수인 스위칭 시간의 초기치를 식 (4-3)과 같이 정하였다.

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 4.5 \\ 5.0 \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

주어진 최적화문제에 대하여 CGD 계산법과 제안한 확장된 3 점비교 축출법에 의하여 시뮬레이션하여 서로 비교한 것은 표 1과 같다.

표 1. CGD 법과 제안한 방법의 비교
Table 1. Comparison of CGD method between proposed method

	CGD 법	3 점 비교법 (R=0.65)
스위치시간	$T_f = \begin{pmatrix} 1.955 \\ 3.775 \\ 4.310 \end{pmatrix}$	$T_f = \begin{pmatrix} 1.936 \\ 3.638 \\ 4.042 \end{pmatrix}$
평가지수	191.12897	183.22336
반복회수	18 회	8 회
프로그램크기	10864 bytes	5248 bytes
계산시간	17 min 34 sec	4 min 5 sec

위의 표에 따르면 제안한 방법이 프로그램 길이의 축소, 적은 평가지수, 적은 반복계산회수, 계산시간의 단축과 같은 장점을 가졌음을 알 수 있다. 입력을 그림 8에 나타내었다.

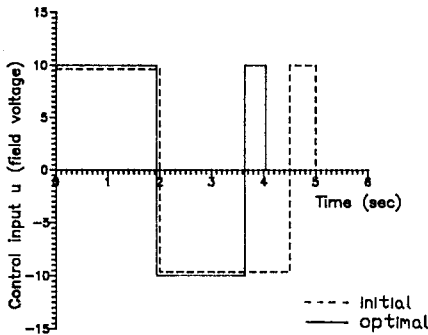


그림 8. 제안한 방법에 의하여 최적화된 입력
Fig. 8. Optimized input by proposed method.

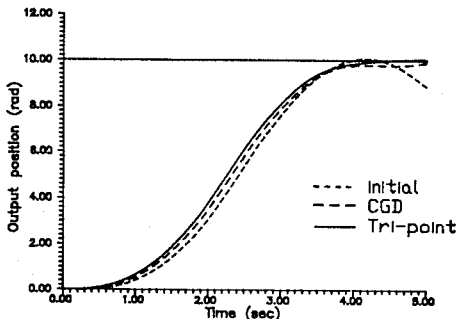


그림 9. 계산법 의한 응답곡선
Fig. 9. Response Curve of Computation Method.

또한, 그림 9은 각 계산법에 의한 출력응답곡선을 나타낸다.

그림 8 에서 제어시간이 단축 되었으며 그림 9에서는 과도기가 적어져서 제어특성이 개선됨을 알 수 있다.

표 2. R 값에 따른 결과
Table 2. Results by value R

R	Optimal value			Performance (J)	Iteration (N)
	T_1	T_2	T_3		
0.3	1.946	3.690	4.110	182.8867	7
0.4	1.872	3.276	3.472	186.8478	6
0.55	1.945	3.640	4.050	183.2237	8
0.6	2.000	3.840	4.650	186.2853	8
0.75	2.000	3.709	4.084	189.4598	7

표 2 는 인수 R 값에 따라 큰 변동이 없이 평가지수가 최소점으로 수렴하여 나아감을 보여 주고있다.

5. 결 론

最適 制御系의 定數計算에 限하여 適用된 3 점 비교 축출법을 拡張改善한 알고리즘을 提案하고 이를 Bang - Bang 제어와 같이 개단상의 제어변수를 갖는 제어계에 적용하여 이를 시뮬레이션하고 제어특성을 CGD 법과 비교하여 검토한 결과 본 계산법은 CGD 法에서와 같은 補助方程式들이 불필요하며 계산이 단순하므로 프로그램의 크기 (step 수)가 작으며, 記憶容量이 적고, 計算時間이 빠르며, 좋은 수렴성을 나타내었다.

본 알고리즘을 계속 연구 확장하면 離散制御系에 일반적으로 適用可能한 최적제어 계산법으로 많은 長점을 갖아 實用性이 큰 방법이 될 수 있을 것으로 전망된다.

參 考 文 獻

- [1] . 崔亨準, " 逐次二等分 索出法에 의한 制御器의 最適設計 " 東國 大學校 電子 工學科 석사학위논문, 1986.
- [2] . Donald E. Kirk, " Optimal Control Theory ", Prentice - Hall Inc., 1970 .
- [3] . Lawrence Hasdroff, " Gradient Optimization and Nonlinear Control ", A Wiley - Interscience Publication, 1976 .
- [4] . L. S. Lasdon, S. K. Mitter and A. D. Waren, " The conjugate Gradient Method for Optimal Control Programs ", IEEE Trans. AC - 12, No. 2, Apr 1967 .