

이 홍식^o, 황 기응
서울대학교 전기공학과

Numerical analysis of plasma MHD equilibrium

Hong Sik Lee, Ki Woong Whang
Seoul National University

Fixed boundary MHD static equilibrium for the axisymmetric toroidal plasma is analyzed numerically. The Grad-Shafranov equation is solved using FEM. The toroidal current term is expressed by plasma pressure $p(\psi)$ and toroidal field function $g(\psi)$. The numerical results are compared to the Solovév analytic equilibrium for the verification of the analysis. For SNUT-79 tokamak device in Seoul National University, flux surfaces and toroidal current profiles according to the variation of p and g profiles are observed. Also the safety factor q and average beta are obtained.

길이와 자장의 기준량 r, B 에 대하여 ψ, j, p 의 기준량은 각각

$$\begin{aligned} \psi_0 &= r_0^2 B_0 \\ j_0 &= B_0 \mu_0 \sigma_0 \\ p_0 &= B_0^2 / \mu_0 \end{aligned} \quad (6)$$

로 되며 이것으로 (4), (5)식은

$$-\nabla \cdot (r^{-2} \nabla \psi) = j_\phi / r \quad (7)$$

$$j_\phi = r \frac{dP(\psi)}{d\psi} + \frac{1}{2r} \frac{dg^2(\psi)}{d\psi} \quad (8)$$

으로 변환된다. 이것을 변분형으로 고쳐 쓰면

$$\int_{\Omega_p} 1/r \nabla \eta \cdot \nabla \psi dr dz = \lambda \int_{\Omega_p} \eta j_\phi^* dr dz \quad (9)$$

1. 서론

평형 해석은 핵융합 플라즈마 밀폐장치의 설계와 장치의 운전결과 해석을 위하여 반드시 필요하며 대형 밀폐장치를 갖춘 연구소에서는 이들 기기 내에서의 플라즈마 평형, 안정성을 해석하는 컴퓨터 코드가 개발되어 이용되고 있다. 축대칭 토로이달 형상의 고정경계 MHD 평형은 잘 알려진 Grad-shafranov 식의 해를 구하는 문제로 귀착되며 이 식의 해를 해석적으로 구할 수 있는 경우는 플라즈마 내부전류가 일정한 경우 등 극히 제한된 경우에 한정되므로 수치해석에 의존할 수 밖에 없다. 본 연구에서는 자유경계 평형해석의 기초를 마련하고 플라즈마 가열 등의 타 연구 수행에 적용하기 위한 목적으로 고정경계 평형 해석을 하였고 r-z 좌표계에서 FEM을 적용하고 압력과 토로이달 자장함수를 다항식으로 표현하여 해석하고 안전인자와 베타 값을 함께 산출하였다.

(η : 가중함수)로되고 경계조건은

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \text{ on } \Gamma_{p_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= 0 \text{ on } \Gamma_{p_2} \end{aligned}$$

로 되어 결국 λ, ψ 를 구하는 비선형 고유치 문제가 된다. 이때 천하지 않는 해인 $\psi=0$ 의 수렴방지를 위하여 총 토로이달 전류 I_T 를 고정시킴으로써 매 반복 과정 중 λ 를 조정하도록 하였다.

$$I_T = \lambda \int_{\Omega_p} j_\phi^* dr dz \quad (10)$$

$$j_\phi = \lambda j_\phi^* \quad (11)$$

2. Ideal MHD 식에 의한 평형방정식

Ideal MHD 식에서 플라즈마의 준중성 성질과 시간 변화가 없음을 고려하면 평형식은 Maxwell식과 함께

$$\begin{aligned} \nabla p &= j \times B & (1) \\ \nabla \times B &= \mu_0 j & (2) \\ \nabla \cdot B &= 0 & (3) \end{aligned}$$

로 표현할 수 있다. 축대칭 토로이드에서는 stream function $\psi = rA_\phi$ 를 도입하여 (1), (2), (3)식을

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (r^{-2} \nabla \psi) &= -\mu_0 j_\phi / r & (4) \\ j_\phi &= \mu_0 \sigma P'(\psi) + \frac{1}{r} g(\psi) g'(\psi) & (5) \end{aligned}$$

와 같이 ψ 만의 식으로 나타낼 수 있다. (Grad-Shafranov식)^[1]

3. 수치해석

3.1 단위변환

3.2 비선형항의 처리

비선형항의 p 및 g 는 아래와 같이 다항 식으로 표현하였다.

$$p(\psi) = \lambda \sum_{i=1}^m a_i \psi^i \quad (12)$$

$$g^2(\psi) = g_0^2 + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \psi^i \quad (13)$$

이 경우의 j_ϕ^* 는

$$j_\phi^* = r \sum_{i=1}^m i a_i \psi^{i-1} + \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^n i b_i \psi^{i-1} \quad (14)$$

로 나타낼 수 있고 (9)식의 우변은 강한 비선형성을 지니게된다. 이와 같은 비선형성향을 다루기 위하여 Picard반복법을 적용하였고 ψ 의 초기분포는

$$\psi^{(0)} = -\frac{I_T}{\pi R_0} (1-\gamma^2) \quad (15)$$

$$\gamma^2 = [(r-R_0)^2 + z^2]/\rho^2 \quad (16)$$

로 주었고 (9)식 우변의 적분은 Gaussian quadrature를 이용하였다.

3.3 계산절차

우변 적분 후의 (9)식은 선형으로 취급할 수 있고의 수렴판정은

$$\|\psi_{k+1} - \psi_k\| < \epsilon_\psi \quad (17)$$

$$|(\lambda_{k+1} - \lambda_k)/\lambda_{k+1}| < \epsilon_\lambda \quad (18)$$

일 때로 하였다. ψ 의 수렴 후

$$q(\psi) = \frac{g(\psi)}{2\pi} \oint \frac{dl}{r|\nabla\psi|} \quad (19)$$

$$\beta = \frac{\int_{\Omega_p} p \, dr \, dz}{1/2 \int_{\Omega_p} B^2 \, dr \, dz} \quad (20)$$

도 함께 구하였다. 이상의 계산과정을 흐름도로 표시하면 그림 1과 같다.

4. 수치해의 검증

해석해가 존재하는 Solovev평형과 수치해를 비교함으로써 수치계산의 타당성을 검증하였다. Solovev 평형은 p' 및 α 를 상수로 두었을 경우에 해당하는데 그 해는 [21]에

$$\psi(r,z) = \psi_0 f(r,z) \quad (21)$$

$$f(r,z) = 1 - \frac{p'}{2\psi_0(1+\alpha^2)} [r^2 z^2 + \alpha^2/4(r^2 - R^2)^2] \quad (22)$$

- $f=0$; 플라즈마 경계의 형상
- ψ_0 ; 자기축에서의 ψ 값
- α, p' ; 상수
- R ; 자기축의 r좌표

$p'=-2, \alpha=1, R=2.5(\text{cm})$ $\psi_0=-1$ 로 하여 얻은 플라즈마 평형의 플럭스 면 모양은 그림 2와 같고 각 절점에서의 오차율 식 (23)과 같이 요소면적 가중하여 평균한 결과를 표 1에 나타내었고 자기축에서의 오차를 표 2에 나타내었다.

$$\epsilon_r = \frac{1/3 \sum \Delta^{(e)} \sum |\psi_j - \tilde{\psi}_j|}{\int_{\Omega} \psi_0} \quad (23)$$

표 1, 2에서 보는 바와 같이 $N_p \gg N_0$ 일 경우에는 N_p 를 더 늘려도 요소의 형상과 관련하여 오히려 정밀도가 떨어질 수 있어 N_p 가 N_0 보다 작게 잡을 필요가 있다.

5. 적용사례

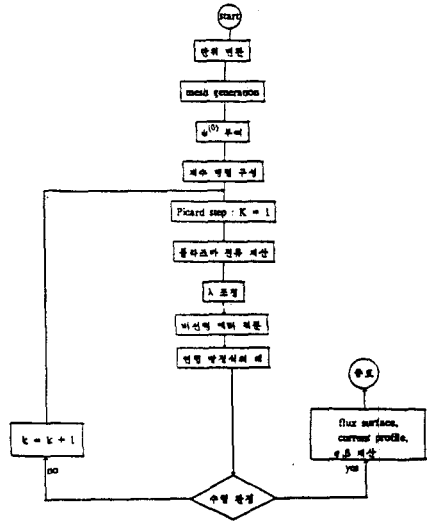


그림 1. 고정 경계 평형 계산 흐름도

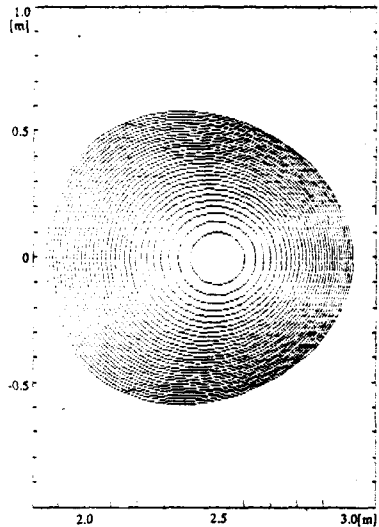


그림 2. Solovev 평형의 플럭스 면 모양. $I_T = 4.044(\text{MA})$

표 1. 평균 오차 [%]

$N_p \setminus N_0$	7	15	30
10	1.12	1.14	1.14
20	0.17	0.26	0.29
30	0.23	0.08	0.13

표 2. $|\psi_0 - \tilde{\psi}_0| \times 10^3$

$N_p \setminus N_0$	7	15	30
10	18	27	30
20	7	4.2	5.5
30	11	3	2.6

본 연구의 평형해석 방법을 서울대 SNUT-79 토카막 장치에 적용하여 다음과 같은 결과를 얻었다. SNUT-79 장치는 주반경 65cm, 부반경 15cm의 원형 단면 밀폐장치이며 토로이달 자장은 자기축에서 최대 3T, 플라즈마 전류 상한치 210kA로 설계되어 있다. p 및 β 를

$$\rho(\psi) = \lambda(\psi^2 + 10\psi^3) \quad (24)$$

$$g^2(\psi) = (3 \times 0.65)^2 + \lambda(b_2\psi^2) \quad (25)$$

또 하여 b_2 를 $-0.1, -0.8, -0.908$ 로 변화시킨 경우의 플럭스면 형상과 토로이달 전류분포를 각각 그림 3, 4, 5에 나타내었고 그림 6에 각 경우의 p, j, q 의 분포를 $z=0$ 평면과 플라즈마 단면이 교차하는 직선을 따라 나타내었다. b_2 가 -0.92 근처에서는 해가 하나도 수렴하지 않고 전혀 다른 두 조의 값에서 진동함을 볼 수 있었고 또 β 가 커짐에 따라 자기축에서의 q 가 줄어들어도 볼 수 있다. b_2 가 -0.908 에서는 토로이드 안쪽 가장자리에 역방향 전류가 흐르고 있음을 알 수 있다.

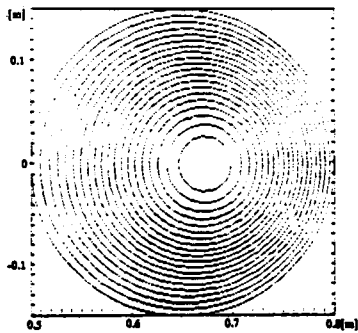


그림 3 $b_2 = -0.1$
 일 때의 플럭스면 형상
 $\phi_0 = 0.0238$,
 $R_0 = 0.67[m]$,
 $\lambda = 264.2$,
 $\beta = 0.92[\%]$

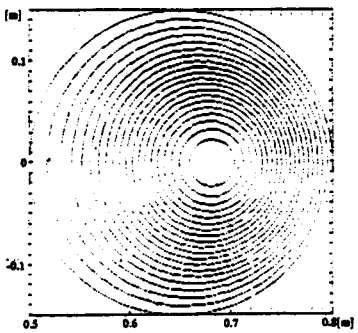


그림 4 $b_2 = -0.1$ 일 때의 토로이달 전류 분포
 $J_{max} = 8.5[A/mm^2]$

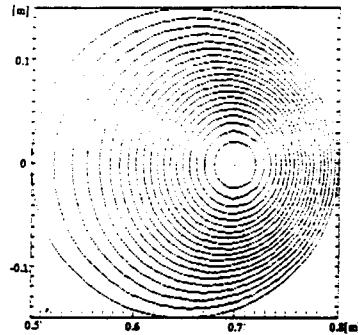


그림 5 $b_2 = -0.8$
 일 때의 플럭스면 형상
 $\phi_0 = 0.0304$,
 $R_0 = 0.699[m]$,
 $\lambda = 718.1$,
 $\beta = 3.25[\%]$

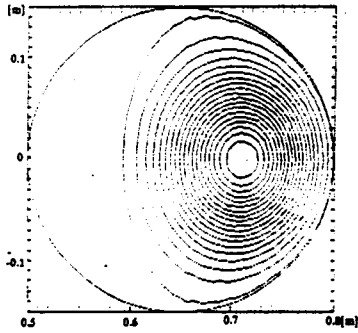


그림 6 $b_2 = -0.8$ 일 때의 토로이달 전류 분포
 $J_{max} = 16[A/mm^2]$

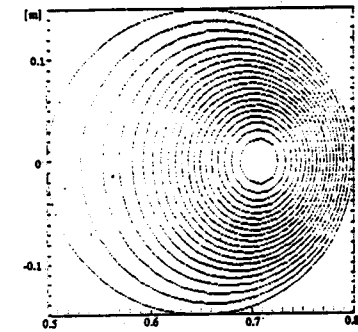


그림 7 $b_2 = -0.908$
 일 때의 플럭스면 형상
 $\phi_0 = 0.0338$,
 $R_0 = 0.70[m]$,
 $\lambda = 892.0$,
 $\beta = 4.48[\%]$

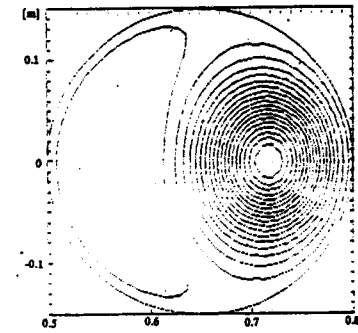


그림 8 $b_2 = -0.908$ 일 때의 토로이달 전류 분포
 $J_{max} = 21[A/mm^2]$

6. 결 론

압력 $p(\psi)$ 와 토로이달 자장함수 $\rho(\psi)$ 를 적절히 선택함으로써 Grad-Shafranov 식을 풀고 고정경계 플라즈마 평형을 구하였다. 수치해석 기법으로는 유한요소법을 적용하였고 비선형항의 처리에는 Picard 반복법을 적용하였다. 플라즈마의 경계형상은 원형 뿐 아니라 ellipticity와 triangularity를 고려할 수 있게 하였고 수치해의 검증은 위하여 Solovev의 해석적 평형과 비교한 결과 $N_y \times N_\theta$ 가 30×30 인 경우 평균오차 0.13%, 자기축에서의 오차 2.6×10^{-5} 로 수치해법의 신뢰성을 확인할 수 있었다. 또 서울대의 SNUT-79에 적용하여 압력 토로이달 전류 및 안전인자 q 의 분포를 알 수 있었고 q 의 선택에 따라 토로이드 안쪽 가장자리에 역방향 전류가 흐를 수 있음을 보였다.

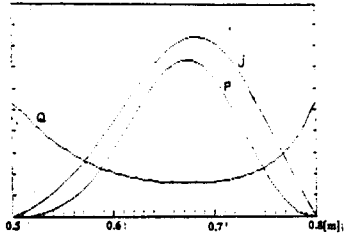


그림 6-a. p, i, q 분포
($b_2 = -0.1$)
 $p: 0.2 \times 10^3$ [Pa/div]
 $j: 1$ [A/mm²/div]
 $q: 0.5$ [div]

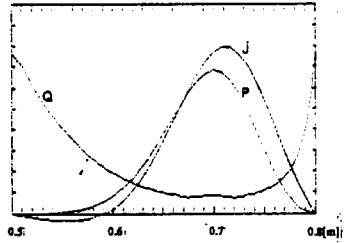


그림 6-b. p, i, q 분포:
($b_2 = -0.8$)
 $p: 10^3$ [Pa/div]
 $j: 2$ [A/mm²/div]
 $q: 0.5$ [div]

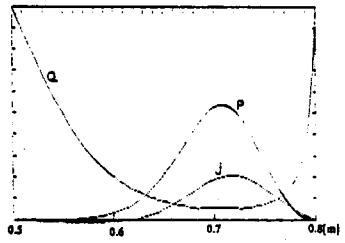


그림 6-c. p, i, q 분포
($b_2 = -0.998$)
 $p: 2 \times 10^3$ [Pa/div]
 $j: 10$ [A/mm²/div]
 $q: 0.5$ [div]

참고문헌

[1] Grad, H. h. Rubin, Proceeding of UNIC, Vol 31 pp190, 1958
 [2] J. Delucia, et al, "An iterative metric method for solving the inverse tokamak equilibrium problem", J. of Comput. Phys. 37, pp183-204, 1980
 [3] K. Lackner, "Computation of ideal MHD equilibria", Comput. Phys. Comm, 12, pp33-44, 1976
 [4] S. Semenzato, "Computation of symmetric ideal MHD flow equilibria", Comput. Phys. Reports 1, pp389-425, 1984
 [5] R. Gruber, "FEM in linear ideal MHD", Springer Verlag, 1985, pp92-117
 [6] J.L. Johnson, et al, "Numerical determination of axisymmetric toroidal MHD equilibria", J. of Comput. Phys, 32, pp212-234, 1979
 [7] J.P. Freidberg, "Ideal MHD theory of magnetic fusion systems", Reviews of modern physics, Vol.54 No.3, pp816-845, 1982