확정계의 최적제어를 위한 WALSH 함수 접근

안 두 수*, 배 종 일**, 이 명 규*, 김 종 부***, 이 승°
*° 성균관대학교 공과대학 전기공학과
** 국립 부산공업대학 전기공학과
*** 금성반도체(주) 연구소

AN APPROACH TO WALSH FUNCTIONS FOR OPTIMAL CONTROL OF DETERMINISTIC SYSTEMS

AHN,DOO-SOO . BAE,JONG-IL . LEE,MYUNG-KYU . KIM,JONG-BOO . LEE,SEUNG
DEPT. OF ELECTRICAL ENG., SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY
DEPT. OF ELECTRICAL ENG., PUSAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
GOLDSTAR SEMICONDUCTOR, LTD.

Abstract

The optimal control problem of linear Lumped Parameter Systems (LPS) and Distributed Parameter Systems(DPS) is studied by employing the technique of Walsh functions(WF).
By the using the elegant operational properties of WF, a direct computational algorithm for evaluating the optimal control and trajectory of LPS and DPS is developed.
Without the need of solving the traditional matrix Riccati equation, the WF approach is shown very simple in form and convenient for use of a computer.
The approximation is in the sense of least squares employing WF as the basis and the results are in the piecewise constant and discrete form.

1. 서 론

본 연구에서는 선형 집중정수계 및 분포정수계의 최적 제어 입력을 결정하기 위한 방법에 관해 연구 하였다.
최근 이러한 연구에 직교함수가 널리 이용되고 있는데,[1-3] 여기에서는 Walsh함수의 특성을 이용하여 최적제어 입력 및 궤적을 결정하기위해 직접법을 이용하였다.[1),7)]
Walsh함수의 특성과 직접법을 이용하므로써 행렬 Riccati 미분 방정식의 해를 구할 필요없이 직접적으로 평가함수를 최소화하는 최적 제어 입력을 결정할 수 있는 알고리즘을 제시하고자 한다.
본 연구의 접근방법은 Walsh함수에 의한 최소자승법에 근거를 두고 있으며 결과는 부분적으로 연속인 상수값으로 주어진다.

2. Walsh 함수

Walsh함수의 정의구간[0,1)에서 적분 가능한 임의의 함수 f(t)는 아래와 같이 표현할 수 있다.[4-6)]

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i \phi_i(t) \quad \ldots(2.1)$$

여기서 $\phi_i(t)$는 i번째 Walsh함수이고 f_i는 Walsh계수이다.
이를 유한급수전개의 벡터형태로 표현하면 다음과같다.

$$f(t) \approx F^T \phi(t) \quad \ldots(2.2)$$

f_i의 값은 최소자승법을 이용하여 그 오차가 최소가 되도록 결정한다.[4-6)]
f(t)의 적분 형태는 다음과 같으며

$$\int_0^t f(t)dt \approx F^T P \phi(t) \quad \ldots(2.3)$$

여기서 P는 적분을 위한 연산행렬이라 한다.[6-8)]
그런데 구간 [0,1)은 m 개의 구간으로 세분되며 그 구간에서의 함수는 상수값을 취하게 되는데, 이때 함수는 각 구간에서 부분적으로 연속인 상수값을 취하게 되며, 이는 세부구간 즉, 샘플링 구간을 작게 했다고 하면, [0,1)에서 m개의 Walsh 함수전개에 의한 결과는 각 세부구간에 대하여 Walsh 함수의 단일항을 적용한 결과와 같은 효과를 얻을수 있음을 의미한다.[4),10)]
따라서 τ=mt로 스케링하면 $t\in[0,1/m)$일때 $\tau\in[0,1)$이 된다.
첫번째 세부구간에서 $f(\tau)$와 $\dot f(\tau)$ 를 다음과 같이 Walsh함수의 단일항 전개를 하자.

$$f(\tau)=f_1 \phi_0(\tau) \quad \ldots(2.4)$$

$$\dot f(\tau)=g_1 \phi_0(\tau) \quad \ldots(2.5)$$

라 하면 계수f_1과 g_1은 양변에 $\phi_0(\tau)$를 곱하고 적분을 취함으로써 얻어진다.

$$f_1=\int_0^1 f(\tau)\phi_0(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^1 f(\tau)d\tau \quad (\text{단}, \phi_0(\tau)=1) \ldots(2.6)$$

$$g_1=\int_0^1 \dot f(\tau)\phi_0(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^1 \dot f(\tau)d\tau$$

$$=f(1)-f(0) \quad \ldots(2.7a)$$

즉, $f(1)=g_1+f(0)$ ....(2.7b)
그리고

$$f(1)=\int \dot f(\tau)d\tau+f(0) \quad \text{이므로}$$

$$f_1 \phi_0(\tau)=g_1 \int_0^1 \phi_0(\tau)d\tau+f(0)\phi_0(\tau) \quad \ldots(2.8a)$$

즉, $f_1= \frac{1}{2} g_1+f(0)$ .... (2.8b)

여기서 f(0)는 초기조건이다.
따라서 임의의 세부구간 k 번째에 대해서는 식(2.7), 식(2.8)로 부터

$$f_k= \frac{1}{2} g_k+f(k-1) \quad \ldots(2.9)$$

$$f_k=g_k+f(k-1) \quad \ldots(2.10)$$

으로 반복적인 계산에 의해 각구간에서의 값이 결정됨을 알수 있다.

3. Walsh함수 직접법에 의한 최적제어

3.1 직접법에 의한 집중정수계의 최적제어

다음과 같은 선형시불변계에서

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

$$X(0) = X_0 \quad \ldots\ldots(3.1)$$

평가함수 즉

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^1 [X^T(t)QX(t)+U^T(t)RU(t)]dt \quad \ldots(3.2)$$

를 최소화하는 최적제어 입력 $U^*(t)$를 구하는 문제를 고려하자.

$X(t)$와 $U(t)$를 WALSH 함수로 전개하면

$$X(t) = X^T \phi(t)$$

$$U(t) = U^T \phi(t) \quad \ldots\ldots(3.3)$$

이 된다.

식(3.1)에 적분을 취하면

$$X(t)-X(0) = A\int X(t)dt + B\int U(t)dt \quad \ldots\ldots(3.4)$$

이 되고 식(3.4)에서 적분을 위한 Walsh 연산행렬 및 식(3.3)을 도입하면

$$X^T\phi(t)-X_0\phi(t) = AX^TP\phi(t)+BU^TP\phi(t) \quad (3.5)$$

와 같이 표현되며 $\phi(t)$를 소거하면 다음과 같다.

$$X^T-AX^TP = X^T+BU^TP \quad \ldots\ldots(3.6)$$

식(3.6)에서 X를 구하기 위해서 Kronecker product를 도입하자.

$$[I-(P^T \otimes A)]X_c = X_{oc}+(P^T \otimes B)U_c$$

$$X_c = [I-(P^T \otimes A)]\,[X_{oc} +(P^T \otimes B)U_c] \quad \ldots(3.7)$$

단 X_c, X_{oc}와 U_c는 각각 X^T, X^T 와 U^T의 각 열 벡터를 일렬로 나열하여 표현된 mn차 행 벡터 들이다.

또한 평가함수 J는 Walsh함수가 도입될때 다음과 같이 변형된다.

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^1 [X^T(t)QX(t)+U^T(t)RU(t)]dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i q_{ij} X_j + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} U_i r_{ij} U_j]dt \quad \ldots(3.8)$$

식(3.8)에서 $\int_0^1 X_i q_{ij} X_j dt$를 고려해 보자.

$$X_i(t) = X_i^T \phi(t)$$

$$X_j(t) = X_j^T \phi(t)$$

$$= \phi^T(t)X_j$$

이므로

$$\int_0^1 X_i(t)q_{ij}X_j(t)dt = q_{ij}\int_0^1 X^T \phi\phi^T X_j dt$$

$$= qX_i^T \int \phi\phi^T dt X_j$$

$$= X_i^T I q_{ij} X_j$$

따라서 식(3.8)은 다음과 같다.

$$J = \tfrac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i^T I q_{ij} X_j + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} U_i^T I r_{ij} U_j]$$

$$= \tfrac{1}{2}[X_c^T Q X_c + U_c^T R U_c] \quad \ldots\ldots(3.9)$$

여기서 식(3.9)를 최소로하는 Uc는 다음과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial U_c} = 0 \quad \ldots\ldots(3.10)$$

를 만족하는 값이다.

따라서 식(3.7)을 식(3.9)에 대입하면 다음과 같고

$$J = \tfrac{1}{2}\{[(I-P^T \otimes A)^{-1}(X_{oc}+P^T \otimes BU_c)]^T Q[(I-P^T \otimes A)$$

$$(X_{oc}+P^T \otimes BU_c)]+U_c^T R U_c\} \quad \ldots\ldots(3.11)$$

식(3.10)을 만족하는 Uc는

$$U_c = -[(A_cB_c)^T Q A_c B_c + R]^{-1}(A_cB_c)^T Q A_c X_{oc} \quad (3.12)$$

단

$$A_c = (1-P^T \otimes A)^{-1}$$

$$B_c = P^T \otimes B$$

와 같다.

따라서 식 (3.12)와 식 (3.3b)로 부터 최적 제어 입력 $U(t)$를 구할수 있고 또한 식 (3.7), 식 (3.3a)로 부터 최적상태궤적 $X(t)$를 알수있게 된다.

3.2 직접법에 의한 분포정수계의 최적제어

다음과 같은 분포정수계 즉, 1차원 확산방정식을 생각하자.

$$\frac{\partial X(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 X(y,t)}{\partial y^2} + U(y,t)$$

$$X(y,0) = X_0(y) \quad \ldots\ldots(3.13)$$

다음의 평가함수를 최소로하는 $U(y,t)$를 구하는 문제를 고려하자.

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 Q'X^2(y,t)+R'U^2(y,t)dydt \quad \ldots(3.14)$$

식(3.13)을 공간분할기법(spatial discretization technique)에 의해 공간에 대해 이산화된 모델로 표현하면 다음과 같이 시간만의 함수로 표현되는 n차 선형 미분방정식으로 변형된다.[2),3)]

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad \ldots\ldots(3.15)$$

$$X(0) = X_0$$

단,

$$A = \frac{1}{(\Delta y)^2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}, \quad B=I$$

또한 식(3.14)의 평가함수는

$$J = \tfrac{1}{2}\Delta y\int_0^1 X^T(t)QX(t)+U^TRU(t)dt \quad \ldots(3.16)$$

따라서 식(3.13)으로 주어지는 분포정수계에 대해서 식 (3.14) 와 같은 평가함수를 최소화하는 문제가 식 (3.15) 의 집중정수계에 대한 식(3.16) 의 평가함수를 최소화하는 제어입력을 구하는 문제로 귀착되므로 3.1 절의 집중정수계의 최적제어를 위한 Walsh함수 직접법에 의해 분포정수계의 최적제어 문제가 해결됨을 알수 있다.

4. Walsh 함수 단일항 전개에 의한 분포정수계의 최적제어

3.2 절에서 분포정수계의 최적제어 역시 집중정수계로 변환하여 Walsh함수 직접법에 의해 최적제어 해를 구할수 있음을 보았다.

그런데 분포정수계를 공간분할기법 할때 보다 세밀

한 공간분포에 대한 최적제어 해를 얻기 위해서는 공간분할수를 증가해야 하므로 이산화 되어 표현된 집중정수 모델의 차원이 그 만큼 증가하게 되어 직법법을 적용하기 힘들다.
따라서 Walsh함수의 단일항전개에 의해 최적제어 해를 구하는 문제를 생각할수 있다.[2),3),9)]

이산화 표현된 분포정수계의 집중정수 모델에서

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BX(t)$$

$$X(0)=X_0 \quad \cdots\cdots(4.1)$$

$$J=\tfrac{1}{2}\int_0^1 X^T(t)QX(t)+U^T(t)RU(t)dt \quad \cdots(4.2)$$

최적제어 입력은

$$U^*(t)=R^{-1}B^T(t)\lambda(t) \quad \cdots\cdots(4.3)$$

이다.
이때 $\lambda(t)$는 다음의 방정식을 만족해야 한다.

$$\begin{bmatrix}\dot{X}(t)\\ \dot{\lambda}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & BR^{-1}B^T\\ Q & -A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} \quad \cdots(4.4)$$

$\lambda(tf)=0$, $X(0)=X_0$

$\tau=1-t$ 로 치환하면 식(4.4)는

$$\begin{bmatrix}\dot{X}(\tau)\\ \dot{\lambda}(\tau)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-A & -BR^{-1}B^T\\ -Q & A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(\tau)\\ \lambda(\tau)\end{bmatrix}\equiv -M\begin{bmatrix}X(\tau)\\ \lambda(\tau)\end{bmatrix} \quad \cdots(4.5)$$

식(4.5)의 해를

$$\begin{bmatrix}X(\tau)\\ \lambda(\tau)\end{bmatrix}=\mathrm{Exp}(-M\tau)\begin{bmatrix}X(\tau=0)\\ \lambda(\tau=0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}M_{11}(\tau) & M_{12}(\tau)\\ M_{21}(\tau) & M_{22}(\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(\tau=0)\\ \lambda(\tau=0)\end{bmatrix} \quad \cdots(4.6)$$

$\lambda(\tau=0)=0$ 이므로

$$X(\tau)=n_{11}(\tau)X(\tau=0) \quad \cdots\cdots(4,7)$$

$$\lambda(\tau)=n_{21}(\tau)X(\tau=0) \quad \cdots\cdots(4.8)$$

따라서 최적제어 입력은

$$U^*(\tau)=R^{-1}B^Tn_{21}(\tau)n_{11}^{-1}(\tau)X(\tau) \quad \cdots(4.9)$$

즉, $U^*(t)=R^{-1}B^Tn_{21}(1-t)n_{11}^{-1}(1-t)X(1-t)$

$$=L(1-t)X(1-t) \quad \cdots\cdots(4.10)$$

와 같다.
식(4.10)에서 L(1-t)는 최적궤환이득으로 다음과 같이 결정된다.

식 (4.5)에 Walsh 함수 단일항전개를 적용하기 위해 $\tau=1/m\tau$ 으로 치환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\dot{X}(\tau)\\ \dot{\lambda}(\tau)\end{bmatrix}=-M/m\begin{bmatrix}X(\tau)\\ (\tau)\end{bmatrix} \quad \cdots(4.11)$$

$$\begin{bmatrix}X(\tau)\\ \lambda(\tau)\end{bmatrix}=B_i\phi_0(\tau)\ ,\ \begin{bmatrix}\dot{X}(\tau)\\ \dot{\lambda}(\tau)\end{bmatrix}=C_i\phi_0(\tau)$$

라 하면

$$C_i=[I+(1/2m)M]^{-1}\{-M/m\begin{bmatrix}X(i-1)\\ (i-1)\end{bmatrix}\}. \quad (4.12)$$

$$B_i=(1/2)C_i\begin{bmatrix}X(i-1)\\ \lambda(i-1)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(4.13)$$

$$\begin{bmatrix}X(i)\\ \lambda(i)\end{bmatrix}=C_i+\begin{bmatrix}X(i-1)\\ \lambda(i-1)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(4.14)$$

$L(1-t)=R^{-1}B^Tn_{21}(1-t)\ n_{11}^{-1}(1-t)$ 이므로

n_{21}과 n_{11}만 알면 궤환이득이 결정됨을 알수있다.

식 (4-12)-(4-14)로 부터 반복적인 계산에 의해,

$\begin{bmatrix}X(\tau)\\ \lambda(\tau)\end{bmatrix}$ 의 i번째 값인 B_i가 결정된다.

그런데 식(4.7),(4.8) 에서 n_{11}과 n_{21}은 각각 nn인 행렬이므로 $X(\tau=0)$의 각각의 값에 대해 n번반복하면 식 (4.7),(4.8),(4.11) 로 부터 i번째 n_{11}과 n_{21}이 결정됨을 알수 있다.

5. 시뮬레이션

5.1 선형시불변 집중정수계

다음과 같은 시스템에 최적제어를 위한 본 연구방법인 Walsh함수 직접법을 적용하자.

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}U \quad \cdots\cdots(5.1)$$

$$X(0)=\begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix}$$

평가함수가

$$J=\tfrac{1}{2}\int_0^{t_f}(X^TQX+U^TRU)dt \quad \cdots\cdots(5.2)$$

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \pi/2 & 0\end{bmatrix},\ R=1\ ,\ t_f=\pi/2$$

과 같을 때 직접법에 의한 최적제어 해 및 궤적은 다음과 같이 결정된다.
식(5.1)을 $\tau=t/(\pi/2)$ 로 스케일링하면

$$\dot{X}(\tau)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \pi/2 & 0\end{bmatrix}X(\tau)+\begin{bmatrix}\pi/2\\ 0\end{bmatrix}U(\tau) \quad \cdots(5.3)$$

과 같고, 식(5.2)는 다음으로 표현된다.

$$J=\tfrac{1}{2}\int_0^1 X^T(\tau)QX(\tau)+U^T(\tau)RU(\tau)d\tau \quad \cdots(5.4)$$

Walsh함수를 m=4 항 전개한다고 하면

$$X(\tau)=X^T\phi(\tau)\ ,\ U(\tau)=U^T\phi(\tau)$$

$$X^T\equiv\begin{bmatrix}X^T\\ X^T\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}X_{10} & X_{11} & X_{12} & X_{14}\\ X_{20} & X_{21} & X_{22} & X_{24}\end{bmatrix}$$

$$U^T = [\ U_{10}\ U_{11}\ U_{12}\ U_{13}\ ] \ldots\ldots\ldots\ldots(5.5)$$

또 식(5.3)을 적분방정식으로 변환하고 Walsh 함수 및 적분을 위한 연산행렬을 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$X(\tau)-X(0)=A\int X(\tau)d\tau+B\int U(\tau)d\tau \quad \text{에서}$$

$$X^T\Phi - X^T\Phi = AX^TP\Phi + BU^TP\Phi \ldots\ldots(5.6)$$

여기서 Φ를 소거하고 Kronecker product를 도입하면

$$X_c = [I-(P^T \otimes A)]^{-1}[X_{0c}+(P^T \otimes B)U_c]$$

단

$$X_c = \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{20} \\ X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \end{bmatrix}, U_c = \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \end{bmatrix}, X_{0c} = \begin{bmatrix} X_1(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_2(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P^T \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\pi/2)P^T & 0 \end{bmatrix}, \quad P^T \otimes B = \begin{bmatrix} (\pi/2)P^T \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/8 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

또한 평가함수 J는 다음과 같이 된다.

$$J = \tfrac{1}{2}\ [X^T\tilde{Q}X_c + U^T\tilde{R}U_c] \ldots\ldots\ldots\ldots(5.7)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4I \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

따라서

$\dfrac{\partial J}{\partial U_c} = 0$ 로 부터 최적제어 해가 식(3.12)와 같이 결정 됨을 알수있다.

그림1.2 는 m=16항으로 했을 때의 결과로 직접법에 의한 결과와 Walsh 함수를 Canonical eq.에 적용하여 단일항 전개에 의한 결과의 비교를 나타낸다.

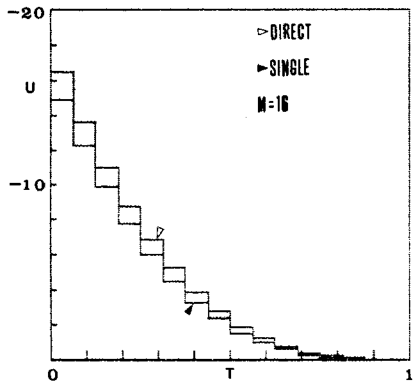

그림 1. 집중정수계의 최적제어 U(t)
Fig. 1. Optimal control U(t) of LPS

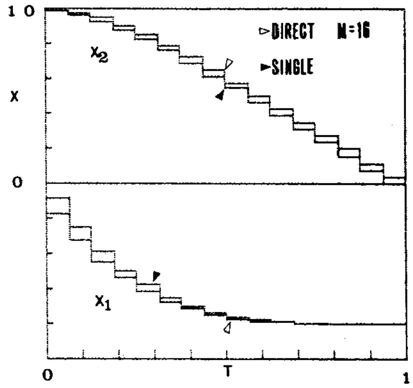

그림 2. 집중정수계의 최적궤적 Xi(t)
Fig. 2. Optimal trajectory Xi(t) of LPS

5.2 분포정수계의 최적제어

식(3.13)으로 표현되는 분포정수계를 1차원 확산 방정식 에서 초기 조건을 다음과 같다고 하고

$$X(y,0) = 1 + y$$

$$Q' = R' = 1$$

$y_f = 4.0$, $t_f = 1.0$, $y = 2.0$ **일때**

이산화 표현된 분포정수계는 **다음과 같은 집중정수계**로 모델링 된다.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bU(t) \ldots\ldots\ldots\ldots(5.8)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ B = I\ , \ X_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

또한 식(3.16)은 다음과 같다.

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^1 X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)dt \ldots(5.9)$$

$$Q = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

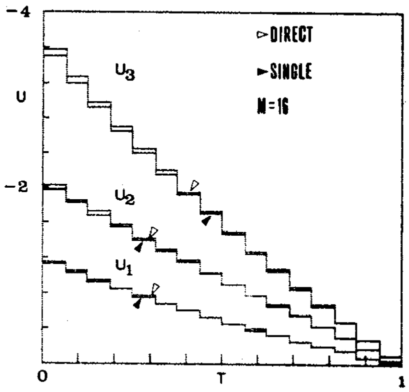

그림 3. 분포정수계의 최적제어 Ui(t)
Fig. 3. Optimal control Ui(t) of DPS

4절의 과정에 의해 단일항 Walsh함수를 적용하여 얻은 결과와 직접법에 의한 결과가 그림3.4에 주어져 있다.

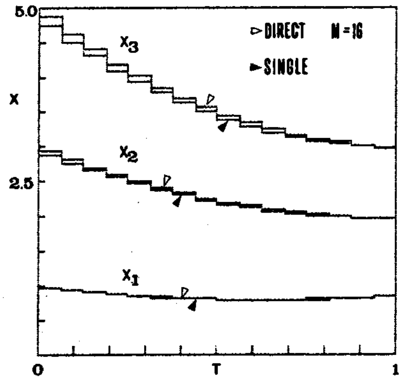

그림 4. 분포정수계의 최적궤적 Xi(t)
Fig. 4. Optimal trajectory Xi(t) of DPS

6. 결 론

본 연구에서는 선형 집중정수계 및 분포정수계의 최적제어에 관해 연구 하였다.

Walsh 함수의 특성을 이용하여 행렬 Riccati 미분방정식의 해를 구할 필요없이 평가함수를 최소화 하도록 하는 최적 제어 입력을 구할 수 있도록 하였다.

본 연구에 의한 방법은 최적제어의 문제에 보다 간편하게 이용될 수 있다. 보다 정확한 정보를 얻기 위해, 특히 고차계에서, Walsh 적용 함수를 증가시킬 때 다루기 불편한 고차 행렬의 처리가 요구된다.

그러나 이러한 점은 Walsh 함수의 단일항전개를 이용하므로써 해결된다.

참 고 문 헌

1) D.H.Shih and F.C.Kung, "Optimal control of Deterministic systems via shifted Legendre Polynomials", IEEE AC-31,pp.451-454,1986
2) M.L.Wang and R.Y.Chang,"optimal control of linear distributed parameter systems by shifted Legendre Polynomial Functions", J.of Dynaic Systems, Mesurement and Control,Vol.-105, PP223-226, 1983
3) I.R.Horng,J.H.Chou and C.H.Tsai, "Analysis and identification of linear distributed systems via Chebyshev series", Int.J.Syst. Sci-17, 1089-1095 , 1986
4) K.R.Palanisamy, V.P.Arunachalam, "Analysis of vibrating systems via single term Walsh series approach",Int.J.Syst.Sci.-18, 1457-1464 , 1987
5) C.F.Chen and C.H.Hsiao, "Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh functions", IEEE AC-20, 596-602 ,1975
6) M.S.Corrington, "Solution of differential and integral equations with WF", IEEE CT-20, 470-476, 1973
7) C.F.Chen,"A Walsh series direct method for solving variational problems", J. Franklin Inst.-300, 265-280, 1975
8) C.F.Chen, "A state space approach to Walsh series solution of linear systems",Int.J.Syst.Sci.-6, 833-858, 1975
9) G.B.Mahapatra,"Solution of optimal control problem of linear diffusion equations via Walsh functions",IEEE AC-25, 319-321, 1980
10) G.P.Rao,"extension of computation beyond limit of initial normal interval in Walsh series analysis of dynamic systems", IEEE AC-25, 317-319, 1980
11)D.L.Kleinman and T.Fortmann, M.Athans, "On the design of linear systems with piecewise constant feedback gains",IEEE AC-13 354-361,1968