

수중운동체를 위한 분할 LQG/LTR 제어기 구성

한 형식, 이 장 규
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

Decomposed Linear Quadratic Gaussian with
Loop Transfer Recovery Controller Design
for an Undersea Vehicle

Hyung Seok Han, Jang Gyu Lee
Dept. of Control and Instrumentation Eng., Seoul National Univ.

ABSTRACT

In this thesis, a decomposed LQG/LTR controller is designed for an undersea vehicle. The modelling error which results from decomposition of the original model is considered to the design specification for maintaining the robust stability. The LQG/LTR controller designed with new specification is simulated.

1. 서론

제어기의 설계에 있어 플랜트의 모델링 오차, 외부환경등에 기인한 외란과 측정 잡음은 중요한 요소로 이들의 영향을 최소화 하기위한 연구가 활발히 진행되어왔다. 최근에는 이들의 영향을 주파수 영역에서의 설계사양으로 표현하여 이에 적합한 제어기를 구성할 수 있는 LQG/LTR 제어방법이 연구[1,2,3] 되었으며 이를 다변수 시스템에 대하여 응용하고 있다.

LQG/LTR제어기는 LQ조정기(Linear Quadratic Regulator)의 이득여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)인 $[1/2, \infty], \pm 60deg$ 를 복구시켜 LQC제 어기도 LQ조정기의 여유와 같은 여유를 갖도록 하는 제어기이며, 주파수 영역에서의 견실성 척도로 특이치(singular value)를 이용하여 LQ설계방법에 의해 원하는 루우프 모양(loop-shape)을 갖도록 하는 것이다.

기존의 LQ설계중 목적함수(performance index)의 가중행렬과 Kalman 필터 잡음분산의 결정은 시행착오적으로 재조정함에 따른 선택의 어려움이 있으며 이러한 문제때문에 원하는 시스템의 성능을 얻기 위한 가중행렬의 선택방법들이 연구되어 왔다. 그중에서 특히 무시된 시스템의 불확실성(uncertainty)을 고려하여 주파수 영역에서의 Nyquist 안정도이론에 의해 가중행렬 및 잡음분산을 결정하는 방법이 LQG/LTR방법이다.

일반적으로 LQG/LTR 제어기의 차수는 플랜트의 모델 차수와 같거나 크게 된다. 따라서 플랜트의 차수가 큰 경우에는 이를 분할(decompose) 하여 분할된 각 부분에 대하여 제어기를 구성한다. 분할 제어기를 구성할 경우에 분할함으로써 생기는 모델링 오차는 설계요건에 반영될 수 있고 원래의 설계요건을 수정하여 분할 LQG/LTR 제어기를 구성할 수 있다.

본 논문에서는 분할 LQG/LTR 제어기를 구성하기 위하여 모델 분할에 따른 모델링 오차의 범위를 주파수 영역에서 구하고 이를 수중운동체의 LQG/LTR 제어기 구성에 이용하여 성능을 시뮬레이션으로 분석하였다.

2. 분할 LQG/LTR 방법의 다변수제어

일반적으로 LQ 조정기는 이득여유 $[1/2, \infty]$, 위상여유 $\pm 60^\circ$ 를 보장하는 반면에 LQC 조정기는 Kalman 필터를 추가함으로써 인하여 LQ 조정기와 같이 보장된 이득여유 및 위상여유를 갖지 못한다.[4] 따라서, LQC 조정기의 루우프 전달행렬(loop transfer matrix)이 LQ 조정기의 루우프 전달행렬과 같 아지도록 하여 LQ 조정기의 보장된 여유를 LQC 조정기도

갖도록 하는 방법이 LQG/LTR (Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery) 방법이다.[1,2]

실재적으로, 시스템의 불확실성, 측정잡음과 외부환경의 변화등으로 인해 시스템이 불안정해 질 수도 있으며, 이러한 상황을 고려하여 외부 환경 변화 및 시스템이 변화되는 경우에도 안정성을 유지할 수 있는 강인한 제어기 (robust controller) 에 대한 연구가 진행되어 왔다.

모델 불확실성 및 외부환경의 변화에 의한 교란이 시스템에 미치는 영향을 분석하기 위하여 교란을 포함한 실제 플랜트 $G'(s)$ 를 설계시의 플랜트 모델인 $G(s)$ 로 표현하면 식 (2.1), (2.2)과 같이 곱셈 교란(multiplicative perturbation)의 형태로 표시할 수 있다.

$$G'(s) = [I + L(s)] G(s) \quad (2.1)$$

$$G'(s) = G(s) [I + L(s)] \quad (2.2)$$

단, $L(s)$: 교란에 의한 영향

식 (2.1)은 출력단에 교란이 있는 경우이며, 식 (2.2)은 입력단에 교란이 있는 경우이다. 일반적으로 $L(s)$ 를 정확히 알 수는 없으므로 비구조화된 불확실성 (unstructured uncertainty) 으로 고려한다. 비구조화된 불확실성은 주파수 영역에서 식 (2.3)를 만족하는 불확실성을 말한다.

$$\sigma [L(j\omega)] < 1/m(\omega) \quad \text{all } \omega \geq 0. \quad (2.3)$$

단, σ : 특이치 (singular value) 의 최댓값

$1/m(\omega)$: 불확실성의 상한값

고주파수 대역에서 교란은 모델링되지 않은 동특성(unmodelled dynamics) 등의 영향으로 불확실성이 커지게되며, 이때의 안정성 유지 조건은 다음과 같다.[1] 여기서 $K(j\omega)$ 는 제어기의 전달함수 행렬이다.

$$\sigma [G(j\omega)K(j\omega)] < 1/m(\omega) \quad \text{all } \omega \geq 0. \quad (2.4)$$

단, $1/m(\omega) \gg 1$

또한, 저주파수 대역에서 외란을 제거하고, 기준 신호를 추적할 수 있는 성능 유지 조건은 식 (2.5)와 같다.

$$\sigma [G(j\omega)K(j\omega)] \geq ps(\omega)/(1-1/m(\omega)) \quad \text{all } \omega \geq 0. \quad (2.5)$$

단, $1/m(\omega) < 1$, $\sigma [G(j\omega)K(j\omega)] \gg 1$.

$ps(\omega)$: 임의의 큰 양 함수

식 (2.4) 과 (2.5) 를 만족시키는 제어기 $K(j\omega)$ 는 견실성과 추적능력을 향상시킬 수 있다.

분할 LQG/LTR 제어기는 위의 모델 불확실성 $1/m(\omega)$ 를 원래의 시스템을 분할할 경우에 생기는 모델링 오차도 포함하여 구성할 수 있고 이 영향에 대하여 안정성 유지 조건을 적용할 수 있다. 원 시스템의 전달행렬의 대각 요소로써 분할하고자 하는 경우에는 전달행렬의 비 대각 요소가 모델링 오차가 될 수 있다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$G(s) = (I + e(s)) \bar{G}(s)$$

$$G(s) = C (sI - A) B \quad (2.6)$$

$$\bar{\sigma}(G(j\omega) - G(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(G(j\omega)) + \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2.8)$$

위 두식에 의하여 다음과 같은 판례를 얻을 수 있다.

$$\bar{\sigma}(e(j\omega)) \leq (\bar{\sigma}(G(j\omega)) + \bar{\sigma}(G(j\omega))) / \underline{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2.9)$$

위의 식에 의한 분할함에 따른 모델 불확실성과 모델되지 않는 불확실성등을 고려한 전체의 불확실성 $Ll(w)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$Ll(w) = ed(w)ei(w) + lm(w) \quad (2.10)$$

식 (2.10) 에서 $ei(w)$ 는 비 대각요소들의 불확실성을 의미하며 $lm(w)$ 는 분 할된 모델 자체에 내재한 불확실성을 의미한다. 따라서 위의 $Ll(w)$ 로 부터 안정성 유지조건을 적용하여 제어기를 설계하기 위한 사양을 결정할 수 있다.

3. LQG/LTR 제어기의 설계과정

민감도 회복을 위한 LQG/LTR 제어기의 설계과정을 각 단계별로 알아본다.

1 단계 : 피 제어 시스템의 저 주파수 영역의 모델을 찾아내고, 모델 불확실성을 규명한다. 모델 불확실성은 측정기의 잡음, 모델링되지 않은 동특성이며 고 주파수 영역에 집중된다고 가정한다. 본 논문에서는 시스템 모델을 분할함에 따른 모델링 오차도 모델 불확실성에 포함한다.

2 단계 : 저 주파수 영역에서의 성능 사양 (performance specification)과 고 주파수 영역에서의 견실성 사양 (robustness requirement)을 결정한다. 피 제어 시스템을 확장 (augment)하면 작동기의 모델을 고려할 수 있다는 잇점과 적분기도 확장을 하게되면 계단 입력에 대한 정상상태 오차를 없앨 수 있는 잇점이 있다. 적분기로 확장한 시스템은 그림 3.1과 같다. 그림 3.1에서 확장하기 전의 피 제어 시스템은 $G(s)$ 이고 $K(s)$ 는 LQG/LTR 제어기를 의미한다.

3 단계 : 루우프 전달 행렬의 특이치를 원하는 모양으로 갖게하는 제어기 전달 행렬을 결정하는 설계과정을 거친다. 이 과정을 loop shaping 이라고 한다. 민감도 회복 과정을 행하기 위해서는 먼저 Kalman 필터를 통하여 loop shaping 을 한다. 이 과정에서 원하는 Kalman 필터의 전달 행렬 $GKF(s)$ 를 얻게 된다. 이 과정을 식 (3.1) 과 같은 시스템의 경우에 대하여 알아본다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= A \hat{X}(t) + L \xi(t) \quad (3.1) \\ Y(t) &= C \hat{X}(t) + \theta(t) \end{aligned}$$

단, $\xi(t)$: 크기(intensity) 가 1 인 백색 잡음
 $\theta(t)$: 크기가 μ 인 백색 잡음
 L : 단위 행렬

이 경우 조정변수는 μ , L 이 되며 이를 조정하여 원하는 Kalman 필터의 루우프 전달 행렬 $GKF(s)$ 를 설계한다.

$$\begin{aligned} GKF(s) &= C[sI-A]^{-1} Kf \quad (3.2) \\ Kf &= (1/\mu) \Sigma C^T \end{aligned}$$

식 (3.2) 에서 Σ 는 필터 대수 Riccati 방정식 (F.A.R.E) 의 해 이며, 필터 대수 Riccati 방정식은 다음과 같다.

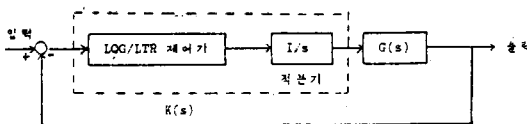


그림 3.1 확장된 피 제어 시스템의 블록 선도

$$A \Sigma + \Sigma \bar{A}^T + L \bar{L}^T - (1/\mu) \Sigma \bar{C}^T C \Sigma = 0 \quad (3.3)$$

고 주파수 영역과 저 주파수 영역에서는 $GKF(s)$ 는 다음과 같은 근사화 관계식을 갖는다.

$$\begin{aligned} GKF(s) &= (1/\mu) GFOL(s) \\ GFOL(s) &= C [sI-A]^{-1} L \quad (3.4) \\ \sigma[GKF(s)] &= (1/\mu) \sigma[G FOL(s)] \end{aligned}$$

단, $GFOL(s)$: Kalman 필터의 개 루우프(open loop)전달 행렬

여기서, L 행렬은 원하는 loop shape 를 갖도록 조정하며, μ 는 지나침 주파수 사양에 맞도록 특이치를 아래, 위로 이동시키는데 사용된다. Kalman 필터의 루우프 전달 행렬 $GKF(s)$ 의 성질을 간단 하게 요약하면 아래와 같이 정리된다. $\{A, L\}$ 이 stabilizable, $\{A, C\}$ 가 detectable 하면, 어떤 μ 와 L 에 대해서도 Kalman 필터 루우프 전달 행렬 $GKF(s)$ 는 다음을 만족한다.

- a) 폐 루우프 시스템은 안정하다. b) 견실성과 성능을 보장한다.

$$\begin{aligned} \sigma[I + GKF(j\omega)] &\geq 1 \quad (3.5) \\ \sigma[I + GKF(j\omega)] &\geq 1/2 \end{aligned}$$

- c) 이득 여유 [1/2, ∞] d) 위상 여유 ± 60 도

설계에 있어 L 행렬을 $GKF(j\omega)$ 의 특이치들이 저 주파수 영역과 고 주파수 영역에서 모두 같게하도록 선택하는 것이 유리하다.

4 단계 : 제어기를 포함한 루우프 전달 행렬을 $GKF(s)$ 에 접근적으로 근사화시키는 민감도 복구 과정이다. 이는 LQ 조정기에서 제어 대수 Riccati 방정식(C.A.R.E)을 풀므로써 얻어지며 식 (3.6)로 표시된다.

$$-KA - \bar{A}^T K + \bar{q} C^T C + K B \bar{B}^T K = 0 \quad q > 0. \quad (3.6)$$

제어 이득 행렬 Kc 는 다음과 같다.

$$Kc = \bar{B}^T K$$

제어 대수 Riccati 방정식이 유효한 해를 갖으려면 다음 조건들을 만족하여야 한다.

- a) $\{A, B\}$ 는 stabilizable 하다.
- b) $\{A, C\}$ 는 detectable 하다.
- c) 피 제어 시스템은 최소 위상이다.

4. 수중운동체의 분할 LQG/LTR 제어기 구성

수중운동체의 비선형 운동방정식으로부터 선형화된 미분 방정식을 얻기 위해 섭동법 (perturbation method) 을 이용한다. 전진속도가 27.02 ft/sec 인 동각검에서 다른 상태변수들의 초기치를 영으로 하고 elevator 와 rudder 를 각각 -4.5도, 2도씩 움직인 상태에서 상태변수 들이 정상상태에 도달한 점에서의 선형화 모델로 제어기를 구성하도록 한다. 선형화과정을 거치면 다음과 같은 수중운동체의 선형화 관계식을 얻는다.[5]

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1(t) \\ U2(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y1(t) \\ Y2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C11 & C12 \\ C21 & C22 \end{bmatrix} X(t)$$

$$\begin{aligned} X1 &= [v \ p \ r \ \phi]^T \\ X2 &= [w \ q \ \theta]^T \\ U1 &= [\delta r \ \delta \phi]^T \\ U2 &= [\delta e] \\ Y1 &= [\phi \ \dot{\phi}]^T \\ Y2 &= \theta \end{aligned}$$

$$A11 = \begin{bmatrix} -1.40E00 & 6.82E-1 & -7.35E00 & 2.22E00 \\ -1.56E-1 & -1.76E00 & 8.32E-1 & -1.58E00 \\ -4.22E-1 & -9.66E-4 & -4.38E00 & 2.99E-1 \\ 0 & 1 & 3.19E-1 & -5.52E-4 \end{bmatrix}$$

$$A21 = \begin{bmatrix} 5.90E-3 & 1.05E-1 & 0 & -1.08E-1 \\ 0 & 1.97E-2 & -6.30E-3 & 1.46E-2 \\ 0 & 0 & -4.88E-2 & -3.53E-2 \end{bmatrix}$$

$$A12 = \begin{bmatrix} -5.91E-3 & 0 & -3.48E-2 \\ -4.48E00 & 0 & 2.47E-2 \\ 0 & 6.32E-3 & -4.67E-3 \end{bmatrix}$$

$$A22 = \begin{bmatrix} -1.48E00 & 7.03E00 & -7.11E-1 \\ 3.90E-1 & -4.50E00 & 6.40E-2 \\ 0 & 9.98E-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B11 = \begin{bmatrix} -3.56E00 & 0 \\ 0 & 1.63E+2 \\ 1.48E00 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B12 = B21 = 0 행렬

$$B22 = [4.94E00 \ 2.16E00 \ 0]^T$$

$$C11 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.00E00 & -1.81E-3 \end{bmatrix}$$

$$C22 = [0 \ 0 \ 1]$$

$$C12 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.12E-2 & 1.18E-2 \end{bmatrix}$$

C21 = 0 행렬

위의 시스템은 가관측, 가제어 시스템이며 안정하고 최소위상(minimum phase)이다. 위의 시스템에 대하여 2개의 분할 제어를 구성하도록 한다. 분할제어기는 2장에서 설명한 바와 같이 비대각 요소들을 고려하지 않은 상태의 모델로부터 각각 구할 수 있다. 즉, X1, U1, Y1으로 구성된 시스템과 X2, U2, Y2으로만 구성되는 시스템으로 분할, 구성한다. 상태변수 X1은 수평면 운동에 관계되는 변수들이고 X2는 수직평면에 관계되는 변수들이다.

추적 능력과 견실성을 고려하여 결정된 설계요건은 주파수영역에서 그림 4.1로 표현된다. 정확한 설계요건을 결정하기 위해서는 교란의 크기를 전 주파수 영역에서 알아내어야 한다. 그러나 실제 교란을 정확하게 알 수는 없으므로 저주파수 영역에서는 성능을 좋게하기 위하여 부우프 전달 행렬의 특이치가 큰값을 갖도록하고 고주파수 영역에서는 측정 잡음과 분할된 기전상태의 모델에 대한 모델링 되지 않은 교란의 크기가 커지므로 교란 크기의 역으로 정하는 견실성 조건은 주파수 증가에 따라 작아지게 된다. 그러나 모델을 분할함으로써 발생하는 모델링 오차를 2장에서 설명한 바와 같이 고주파수영역에서 고려하면 고주파수영역에서의 견실성 설계요건은 그림 4.2와 같이 변경된다. 변경된 설계요건을 만족하는 제어를 각각 3장에서와 같이 분할된 시스템을 적분기로 확장(augment)하여 구성하도록 한다. 분할된 수평 모델에 대하여 Kalman 필터의 잡음의 크기 μ 를 0.5로 하고 민감도 복구를 위한 상태변수 가중행렬을 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{aligned} Qc &= q \ Ca \ Ca & (4.2) \\ Rc &= I \end{aligned}$$

단, I : 단위 행렬

Ca : 확장된 시스템의 출력 행렬

Qc : 성능지수(performance index)의 상태변수 가중행렬

Rc : 성능지수의 입력 가중행렬

그림 4.3은 식 (4.2)의 q 값을 10^{*8} 로 택하였을 경우의

전달함수 행렬의 최대, 최소 특이치를 나타낸 그림이다. 그림 4.3에서 견실성 설계요건을 만족함을 알 수 있다. 이때의 Kalman 필터의 이득 행렬 Kf과 LQ 조정기의 이득 행렬 Kc은 다음과 같다.

$$Kf = \begin{bmatrix} 8.36E00 & 5.51E+1 & -1.22E-2 & 1.05E+1 & 1.21E-2 & 1.41E00 \\ -6.23E00 & -1.95E-1 & 9.71E-1 & -3.13E-2 & 1.41E00 & -1.26E-2 \end{bmatrix}$$

$$Kc = \begin{bmatrix} -4.75E+1 & 1.08E-1 & 9.55E+3 & 4.27E+1 & 1.69E+2 & 1.46E-1 \\ -2.63E-1 & 1.67E+2 & 2.71E+1 & 9.99E+3 & 1.46E-1 & 2.34E+2 \end{bmatrix}$$

분할된 수직면 모델에 대한 제어기는 μ 값을 0.005, q 값을 10^{*8} 로 택하여 구성한다. 이때의 전달함수 행렬에 대한 최대, 최소 특이치는 그림 4.4와 같다. Kalman 이득 Kfp과 LQ 이득행렬 Kcp는 다음과 같다.

$$Kfp = [5.04E+1 \ 9.49E00 \ 4.35E00 \ 1.41E+1]$$

$$Kcp = [9.02E00 \ 6.13E+2 \ 1.00E+4 \ 5.23E+1]$$

이상과 같이 분할하여 구성된 LQ/LTR 제어기를 비선형 모델에 적용하여 시뮬레이션한 결과는 그림 4.5, 4.6과 4.7에 도시되었다. 그림 4.5는 섭동법을 적용한 속도에서의 계단응답으로 상당히 양호한 응답을 보인다. 그림 4.6은 속도가 설계시의 상태보다 낮은 경우이며 이때에도 안정성을 유지하며 기준입력을 잘 추적한다. 그림 4.7은 속도가 팔라진 경우이며 이 경우 역시 안정성을 유지하며 빠른 응답 특성을 보인다.

5. 결론

본 논문에서는 수중운동체 LQ/LTR 제어기를 제어기의 차수를 줄이기 위하여 섭동법으로 얻은 모델의 비대각요소를 무시하고 분할 LQ/LTR 제어기를 구성하였다. 이 무시된 비대각요소들로 인한 영향을 모델링 오차로 고려하여 제어기의 설계요건으로 표시하였다. 이러한 설계요건을 만족하는 제어기를 분할 모델에 대하여 각각 설계하였다. 설계한 제어기의 계단응답 특성은 속도가 변함에 따라 안정성을 유지하고 기준입력도 잘 추적하는 것을 보여준다.

[참고 문헌]

- [1] J.C.Doyle and G.Stein, "Multivariable feedback design concepts for a classical/modern synthesis," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-26, no.1, pp. 4-16, Feb. 1981.
- [2] G.Stein and M.Athans, "The LQ/LTR procedure for multivariable feedback control design," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-32, no.2, Feb. 1987.
- [3] M.Athans, "A Tutorial on the LQ/LTR method," Proc. American Contr. Conf., Seattle, WA, pp.1289-1296, June 1986.
- [4] Altug Iftar and Umit Ozguner, "Local LQ/LTR controller design for decentralized systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol AC-32, no.10, pp.926-930, Oct. 1987.
- [5] 한형석, "LQ/LTR 방법을 이용한 수중운동체의 다변수제어기 구성 및 성능분석," 석사학위논문, 서울대학교 제어계측학과, 1988.

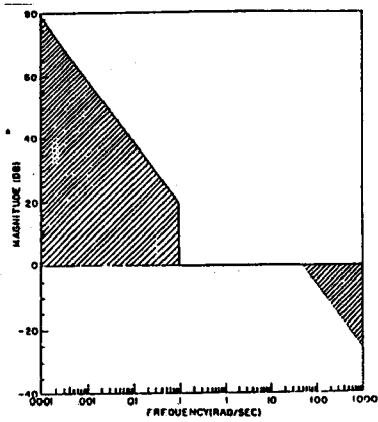


그림 4.1 제어기의 성능 및 건실성 설계요건

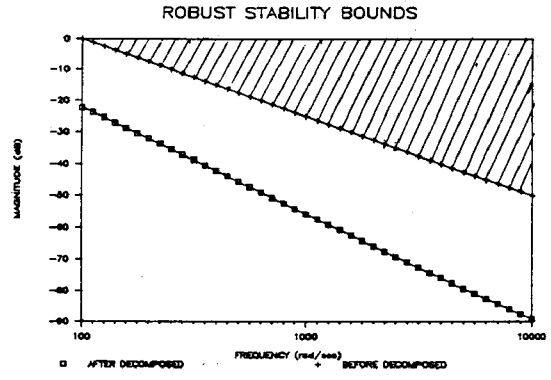


그림 4.2 분할된 모델에 대한 건실성 설계요건

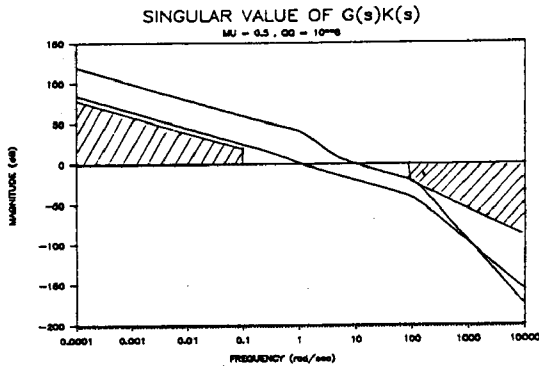


그림 4.3 수평운동의 개루우프 전달행렬의 최대, 최소 특이치

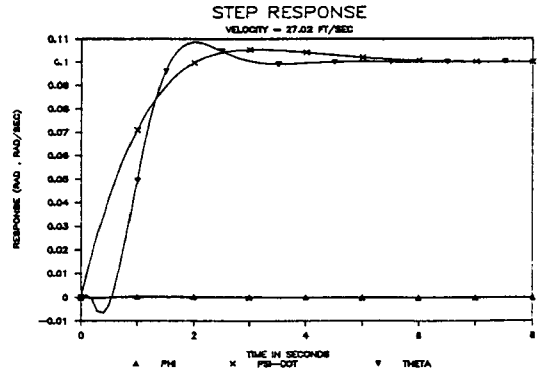


그림 4.5 설계시의 속도에서의 계단응답

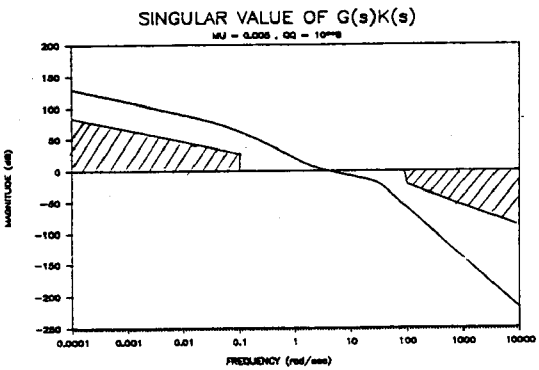


그림 4.4 수직운동의 개루우프 전달행렬의 특이치

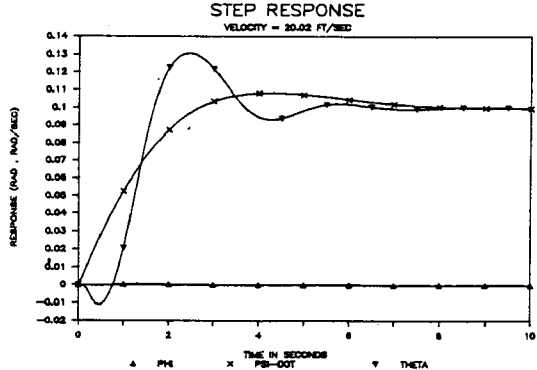


그림 4.6 속도감소시의 계단응답

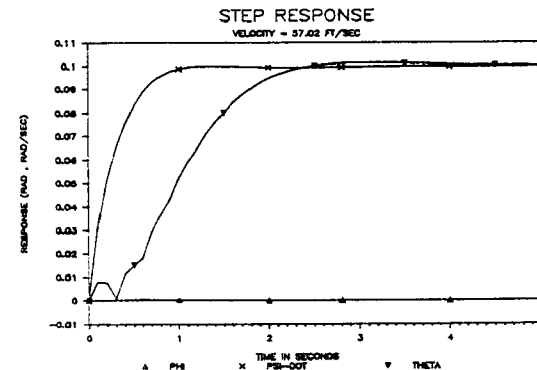


그림 4.7 속도증가시의 계단응답