

스파스벡터법을 위한 서열산법의 최적화

신 명 철 이 준 모
성균관대학교 한국전력공사

An Optimization of Ordering Algorithm for Sparse Vector Method

Myong Chul. Shin Chun Mo. Lee
Sung Kyun Kwan Univ. Korea Electric Power Corp.

Abstracts

The sparse vector method is more efficient than conventional sparse matrix method when solving sparse system. This paper considers the structural relation between factorized L and inverse of L and presents a new ordering algorithm for sparse vector method. The method is useful in enhancing the sparsity of the inverse of L while preserving the sparsity of matrix. The performance of algorithm is compared with conventional algorithms by means of several power system.

1. 서 론

최근, 전력계통에서 많이 취급되는 대규모 선형 방정식에서 독립벡터(independent vector)가 스파스하거나 미지의 벡터(unknown vector) 요소중 오직 일부의 해만 요구될때 과거의 스파스행렬 기법보다 효율적인 스파스벡터법(sparse vector method)이 Tinney에 의하여 제안되었다. 이 방법은 고장해석(2), 최적조류계산(3), 병렬처리에 의한 스파스행렬 역변환(4) 등에 적용되어 왔으며, 부분 행렬 재인수화(partial matrix refactorization)(5) 및 감축 등가행렬 연산(6) 등의 알고리즘 개발에 이용되어 왔다. 스파스벡터법의 효율성은 인수화 행렬 ($[L]$, $[U]$)의 역변환시 발생하는 새로운 영이 아닌 요소(fill-in)의 증가에 많은 영향을 받게되므로 인수화 행렬의 역변환 과정에서 스파시티가 유지되도록 하는 최적서열산법이 요구되어진다.(8)

전력계통에 적용된 서열산법중 지금까지 널리 사용되어 온 Minimum Degree(MD) 알고리즘은 역변환 행렬의 스파

티가 고려되지 않아 스파스벡터법에는 적합하지 않다. 이러한 문제를 개선하기 위하여 1988년 이후 Gomez의 AI(8), MD-MNP(10) 및 Ramon의 MD-ML(9)등의 서열산법이 제안되어 왔다. 그러나 이 서열산법들은 MD 서열산법보다는 좋은 결과를 얻을 수 있었으나 서열시 동일한 Degree가 발생하는 경우에만 제안된 알고리즘을 적용하여 역변환 행렬의 스파시티 개선에는 한계성을 가지고 있다.

본 논문에서는 Gauss-Jordan소거법에 의한 역변환 연산 과정을 이용하여 인수화 행렬의 하측행렬 $[L]$ 과 역변환 행렬 $[L^{-1}]$ 의 구조적 관계를 고찰하고, 이 관계로부터 역변환행렬의 스파시티를 크게 개선하면서 원 행렬의 스파시티를 가능한 한 유지하도록 할 수 있는 새로운 서열 알고리즘을 제시하였다. 또한 IEEE 14, 30, 57 모선 시험 계통 및 106 모선 불란서 실계통, 118 모선 미국 실계통, 280 모선 한국전력 실계통에 이미 발표된 기존의 서열산법과 본 논문에서 제안된 서열 알고리즘의 적용 결과를 비교, 검토하여 그 우위성을 입증하였다.

2. 스파스벡터법(sparse vector method)

일반적으로 대규모 회로망의 어드미턴스 행렬은 영요소(zero element)의 수가 영이 아닌 요소(nonzero element)에 비하여 비교적 많은 스파스(sparse) 행렬로 구성된다. 이러한 스파스 행렬로 구성된 전력계통의 행렬 방정식을 다음과 같이 표시한다.

$$[A] [x] = [b] \tag{2-1}$$

여기서 $[A]$: nonsingular matrix
 $[x]$: 미지의 행벡터(unknown column vector)
 $[b]$: 기지의 독립벡터(known independent vector)

식(2-1)의 행렬 [A]는 상측 삼각행렬 [U]와 하측 삼각행렬 [L]로 나누어 질 수 있다. 스파스벡터 기법은 벡터 [b]가 스파스하거나 미지벡터 [x]중 오직 일부분의 요소만 구하고자 할때 적용될 수 있으며, 또한 [A]의 요소중 일부의 값이 수정될때 스파스벡터법을 이용한 부분 행렬 재분할 방식 (partial matrix refactorization)에 의하여 전체의 행렬을 재분할하지 않고 효율적으로 수정된 [A]의 [U]와 [L]을 구할 수 있다.

2.1 경로 그래프(path graph)

벡터 [b]에 오직 한개의 영이 아닌 요소만 포함하고 있는 벡터를 singleton이라고 한다. singleton에 대한 경로(path)는 [L]의 행에 대하여 서열된 목록으로 정의된다. 스파스 벡터는 singleton들의 합이되고, 이것의 경로는 각 singleton 경로들의 조합이 된다. 또한 이 경로의 조합을 그래프로 나타낸 것이 경로 그래프(path Graph)이다. (1)(8)

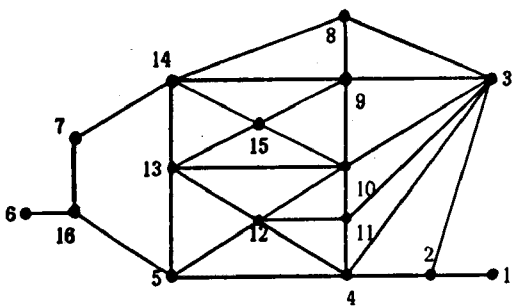


그림 2-1: 16노드 모델 계통
Fig 2-1: A 16node model network

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
1	1	X														
8	2	X														
2	3	X	X													
7	4		X													
16	5	X	X	X												
8	6			X												
5	7				X											
11	8					X										
15	9						X									
9	0				X		X	X								
10	1					X	X	X	X							
12	2						X	X	X	X						
13	3							X	X	X	X					
14	4				X	F	X	F	X	F	F	F	X			
3	5			X	X	X	X	X	F	F	F	F	X			
4	8			X		X	X	F	X	F	F	X	X			

그림 2-2: [L]의 구조
Fig 2-2: The structure of [L]

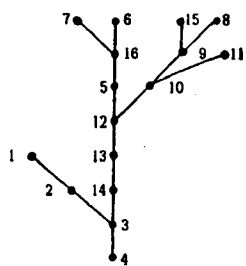


그림 2-3: 경로 그래프
Fig 2-3: Path Graph

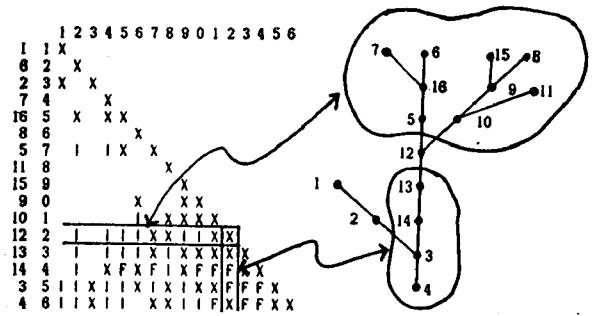


그림 2-4: [L]의 구조와 경로 그래프와의 관계
Fig 2-4: The Relation with structure of [L] and Path Graph

예로서 그림 2-1의 16노드 모델 계통에 MD 알고리즘을 적용한후 [L]의 영이 아닌 요소들 X로 표시하면 그림 2-2와 같다. 여기서 F는 [L]을 구할때 발생하는 fill-in이다. 이때 그림 2-2를 이용하여 각 singleton 경로를 구하고 이들 조합한 경로 그래프를 나타내면 그림 2-3과 같다.

2.2 역행렬 [L^-1]의 구조와 경로 그래프와의 관계

역행렬 [L^-1]의 구조와 경로 그래프는 서로 중요한 관계를 갖고있다. 그림 2-4는 [L]에서 모션 12의 행, 열의 요소와 경로 그래프와의 관계를 보인 것이다. 여기서 1은 역변환시 발생하는 새로운 영이 아닌 요소들 나타낸다.

그림 2-4에서 보는바와 같이 [L^-1]의 K번째 행과 열의 영이 아닌 요소들은 K번째 모션의 경로를 나타내게 되므로 [L^-1]의 영이 아닌 요소의 수는 스파스벡터법의 효율을 나타내는 각 singleton 경로의 평균값과 직접적인 관계를 갖는다. 또한 [L]의 영이 아닌 요소의 수는 Fast Forward/Backward Substitution 및 PMR 과정을 실행할 때 mult/add의 연산횟수와 직접적인 관계를 갖고 있으므로 연산효율을높이기 위하여는 [L]의 스파시티를 가능한 유지하면서 [L^-1]을 스파스하도록 해야만 된다. (10)

3. 서열 알고리즘의 개발

3.1 삼각행렬 [L]과 [L^-1]의 관계

삼각행렬 [L]과 [L^-1]의 영이 아닌 요소들의 구조적 관계를 고찰하기 위하여 그림 3-1과 같이 요소의 크기는 무시하고 영이 아닌 요소의 분포로만 나타낸 [L]의

$$\begin{pmatrix} X & & & & \\ & X & & & \\ X & & X & & \\ & X & & X & \\ X & & & F & X & X \end{pmatrix}$$

X:영이 아닌 요소
F:LU분할시 발생하는 새로운 영이 아닌 요소(fill-in)

그림 3-1: [L]의 계수행렬

FIG 3-1: The Coefficient Matrix of [L]

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} X & & & X & & \\ & X & & & X & \\ & & X & & & X \\ & & & X & X & \\ & & & & X & X \\ X & & & X & X & X \end{array} \right]$$

1:역변환시 발생하는 새로운 영이 아닌 요소

그림 3-2: Gauss-jordan 소거법에 의한 역변환 결과

FIG 3-2: Result of inverse by Gauss-Jordan elimination method

계수행렬에 대한 역행렬을 Gauss-Jordan 소거법에 의한 역변환 과정을 적용하여 구하면 그림 3-2와 같이 된다. 역행렬의 영이 아닌 요소들은 원행렬의 각 열을 소거해 나가는 과정으로 부터 얻어지게 되는데, 이 연산과정을 검토하면 다음과 같은 사실을 확인 할 수 있다.

- 1) [L]의 영이 아닌 요소는 $[L^{-1}]$ 의 영이 아닌 요소의 분포에 그대로 반영된다.
- 2) [L]의 역행렬을 구할때 발생하는 fill-in은 각 단계에서 소거되는 열의 우측부분에는 발생하지 않고 좌측부분에서만 발생한다.
- 3) 소거되고 있는 열의 좌측부분에 이미 생성된 $[L^{-1}]$ 의 영이 아닌 요소에 따라 fill-in이 발생한다.

3.2 개선된 알고리즘

삼각행렬 [L]의 스파시티를 향상시키기 위한 방법중 지금까지 널리 사용되어온 MD 알고리즘은 그림 3-3에서 모선의 우측부분 Degree(RD(i))가 최소인 모선을 선택해 나가는 방법이다. 이와 마찬가지로 모선의 좌측부분 Degree(LD(i))가 최소인 모선을 선택하도록 하므로써 $[L^{-1}]$ 의 스파시티를 향상 시킬 수 있다. 그러나 앞에서 고찰한 바와 같이 $[L^{-1}]$ 의 스파시티를 향상시키기 위하여는 가능한 [L]을 스파스하도록 유지하면서 LD(i)가 작은 모선을 선택하여야 하므로, 모선 서열시 RD(i)와 LD(i)가 함께 최소가 되는 모선을 선택하여야 한다.

MD 법의 적용시 발생하는 fill-in은 그림 3-3에서 모선의 우측부분 RD(i) 요소와 같은 크기의 하측부분 RD(i) 요소들의 각 행에 있는 영이 아닌 요소와 관계하

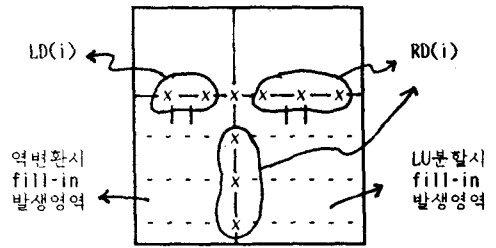


그림 3-3: 서열과 fill-in

Fig 3-3: Ordering and fill-in

여 발생하게 된다. 그러므로 MD 법을 $RD(i) * RD(i)$ 의 값이 최소인 모선을 선택하도록 변화 시킬 수 있다. 또한 역변환시 발생하는 fill-in 역시 모선의 좌측부분 LD(i)와 하측부분 RD(i)에 의하여 발생하게 되므로 서열시 영향을 주는 벡터는 $RD(i) * LD(i)$ 가 된다. 그러므로 식(3-1)로 나타낸 이 두 함수의 합이 최소가 되는 모선을 선택하도록 다음과 같은 방법으로 서열을 결정한다

$$MPRLD(i) = RD(i)^2 + RD(i) * LD(i) \quad (3-1)$$

서열 알고리즘 (MPRLD)

- 1) K = 1로 놓는다.
- 2) 각 소거단계에서 MPRLD(i)가 최소인 모선을 선택하고
- 3) MPRLD(i)가 동일한 모선이 있을 경우에는 RD(i)가 최소인 모선을 선택한다.
- 4) K = K + 1 하고 K = N이면 종료, 아니면 Step 2로 가서 반복 수행한다.

4. 적용에 및 결과 고찰

본 논문에서 제안된 새로운 알고리즘을 그림 2-1의 모델계통에 적용하였고, 이 결과를 비교 검토하기 위하여 MD, A1, MD-ML, MD-MNP 법도 모델계통에 적용하였다.

이들 MD, A1, MD-ML, MD-MNP의 알고리즘은 다음과 같이 정의되는 각각의 벡터가 최소가 되는 모선을 선택하도록 하여 서열을 결정한다. (8,9,10,11)

D(i): 소거의 각 단계에서의 모선 i의 Degree

B(i): 이미 서열된 모선중 모선 i에 인접한 모선수

L(i): 이미 형성된 경로그래프에서 모선 i에 인접한 가지들중 가장 긴 가지의 모선 수

P(i): 이미 형성된 경로그래프에서 모선 i에 인접한

모든 가지의 모선 총수

여기서 이들 벡터를 제시하기 위하여 MD법에 의한 $\{L\}$ 과 경로 그래프를 이용하여 표시하면 그림 4-1과 같다. 또한 AI, MD-ML, MD-MNP 법에 의한 적용결과는 각각 그림 4-2, 4-3, 4-4 에 나타내었고, 본 논문에서 제안된 알고리즘의 적용 결과는 그림 4-5와 같다.

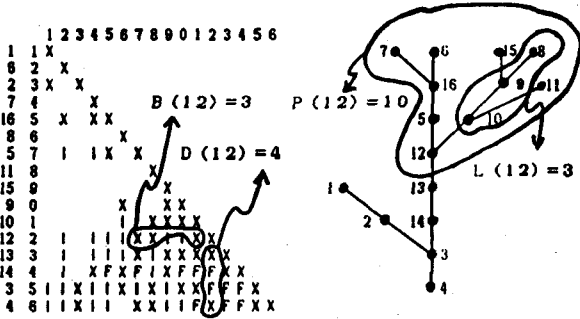


그림 4-1: MD법 적용후의 $\{L\}$ 과 경로그래프에서의 각 벡터

Fig 4-1: The result after MD application and vectors

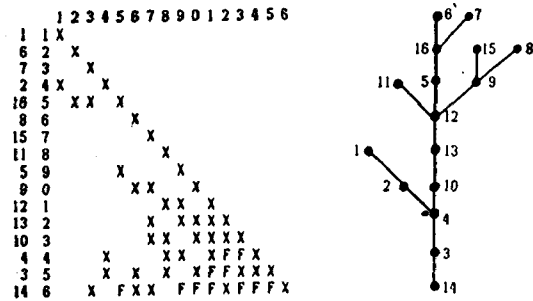


그림 4-2: AI 적용후 얻어진 결과

Fig 4-2: The Result after AI application

표 4-1: 16노드 모델계통에 대한 서열알고리즘 적용결과

Table 4-1: Results after ordering algorithm application

	NONZERO NO.			SINGLETON PATI.		
	FILL-IN	L	L ⁻¹	LONGEST	MEAN	S.D
MD	11	42	78	8	5.625	2.306
AI	11	42	80	9	6.125	2.500
MD-ML	10	41	82	8	5.938	2.294
MD-MNP	10	41	76	8	5.500	2.033
MPRLD	10	41	76	8	5.500	2.033

표 4-1은 이들 그래프를 종합하여 나타낸 것이다. 여기서 각 항목의 값들은 LU 분할(LU factorization) 시의 fill-in, $\{L\}$ 과 $\{L^{-1}\}$ 의 영이 아닌 요소의 수와 모든 singleton 에 대한 경로의 최대값, 평균값 및 표준편차를 나타내고 있다. 표에서 보는 바와 같이 모델계통에 대해서는 $\{L^{-1}\}$ 의 스파스리티 및 singleton 경로의 최대값,

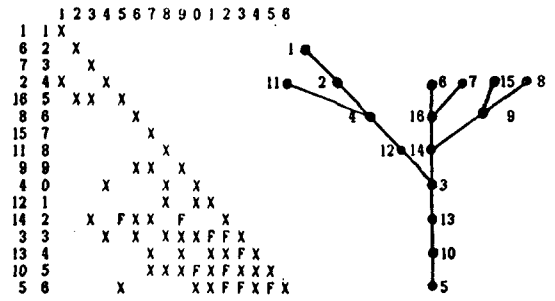


그림 4-4: MD-MNP 적용후 얻어진 결과

Fig 4-4: The Result after MD-MNP application

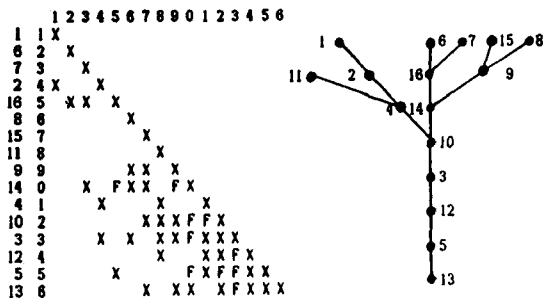


그림 4-3: MD-ML 적용후 얻어진 결과

Fig 4-3: The Result after MD-ML application

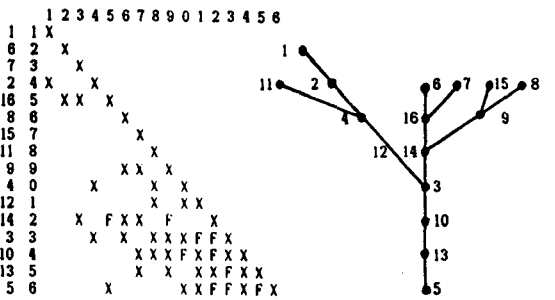


그림 4-5: MPRLD 적용후 얻어진 결과

Fig 4-5: The Result after MPRLD application

평균값, 표준편차등 모든면에서 본 논문에서 제안된 알고리즘(MPRLD)과 MD-MNP법이 가장 효율적임을 보이고 있다. 본 연구의 효율성 평가를 위하여 각 서열 알고리즘을 IEEE-14,30,57 모선 시험계통 및 106 모선(프랑스), 118 모선(미국), 280 모선(한전) 등의 실제계통에 적용하였고, 그 결과를 표 4-2에 나타내었다.

이제 앞에서 언급한 바와 같이 최적의 서열 알고리즘은 singleton 경로의 평균값과 [L]의 스파시티가 최적 이 되어야만 하나 MD 법은 표 4-2에서 보여 주는 바와 같이 어떤 계통에서도 최선의 결과를 주지 못한다. 스파스벡터법의 효율을 개선하기 위한 서열 알고리즘들은 [L]의 스파시티면에서 거의 유사한 결과를 나타내고 있으나 경로의 평균값 및 표준편차는 매우 커다란 차이

를 보이고 있다. 기존의 서열산법중 MD-ML 법은 118 모선 계통에서, A1 법은 280 모선 계통에서 최적의 결과를 얻었고, 그 이외의 계통에 대하여는 MD-MNP법이 최적의 서열산법이다. 그러나 본 논문에서 제안한 새로운 알고리즘은 MD 법 뿐만 아니라 A1, MD-ML, MD-MNP법 보다는 [L]의 스파시티와 경로의 최대값, 평균값, 표준편차등이 거의 모든 계통에 있어서 최적의 결과를 보이고 있다.

5. 결 론

스파스 벡터법의 효율은 [L]의 스파시티에 직접적인 영향을 받는다. [L]과 [L']의 구조적 관계를 Gauss-Jordan 소거법에 의한 역변환 연산과정을 이용하여 고찰하였고, 이 관계로 부터 스파스벡터법의 효율을 개선하기 위한 서열 알고리즘을 제시하였다.

표 4-2: 각 서열 알고리즘의 적용 결과

Table 4-2 : Results obtained with Ordering Schemes

DESCRIPTION		NUMBERS OF BUS					
		14	30	57	106	118	280
NONZERO ELEMENT		40	80	156	296	358	696
MD	FILL-IN	4	11	59	108	84	107
	L	24	51	137	256	263	455
	L'	60	201	532	1128	1160	4055
	LONGEST	9	13	18	18	21	27
	MEAN	5.429	8.333	11.018	11.236	13.983	17.943
	S.D	2.441	3.302	3.503	3.444	4.892	5.293
A1	FILL-IN	4	10	59	108	86	108
	L	24	50	137	256	265	456
	L'	*44	**130	479	1048	1080	3495
	LONGEST	6	9	12	16	18	18
	MEAN	**4.071	**5.133	9.386	11.066	11.949	**11.618
	S.D	**1.439	**1.925	2.491	3.172	3.474	**2.652
MD-ML	FILL-IN	4	10	59	109	85	106
	L	24	50	137	257	264	454
	L'	*44	131	416	1066	1028	2979
	LONGEST	5	8	12	17	13	18
	MEAN	*3.929	5.467	8.193	12.406	**9.737	13.786
	S.D	*1.269	1.978	2.295	3.001	*2.337	3.141
MD-MNP	FILL-IN	4	10	59	107	86	108
	L	24	50	137	255	265	456
	L'	*44	*118	**405	**1029	**998	**2820
	LONGEST	6	8	11	15	15	19
	MEAN	**4.071	*4.833	*7.860	**0.679	11.475	12.636
	S.D	**1.439	*1.683	*1.977	**2.827	2.611	3.198
MPRLD	FILL-IN	4	10	59	108	87	110
	L	24	50	137	256	266	459
	L'	*44	*118	*390	*975	*993	*2680
	LONGEST	6	8	12	15	13	15
	MEAN	**4.071	*4.833	**7.965	*10.604	*9.102	*10.439
	S.D	**1.439	*1.683	**2.070	*2.717	**2.402	*2.178

* 최소값
** 두번째로 작은 값

이미 발표된 서열 알고리즘들은 MD 법을 적용시 동일한 Degree가 발생하는 경우에만 제안된 알고리즘을 적용하여 $[L]$ 의 스파시티 개선에는 한계성을 가지고 있었으나, 새롭게 제안된 알고리즘은 이러한 단점을 개선시켜 $[L]$ 의 스파시티를 매우 효율적으로 개선할 수 있도록 하였으며 IEEE 시험계통 및 볼란서, 미국, 한국전력등의 실제계에 각 알고리즘을 적용하여 새롭게 개발된 알고리즘이 MD 법뿐만 아니라 AI, MD-ML, MD-MNP 법 보다는 매우 효율적임을 입증하였다.

6. 참고 문헌

- (1) W.F.Tinney, V.Brandwain, and S.M.Chan, "Sparse vector Methods," IEEE Trans. on PAS-104, pp 295-301, 1985
- (2) V.Brandwain and W.F.Tinney, "Generalized method of Fault Analysis", IEEE Trans. on PAS-104, pp.1301-1306, 1985
- (3) D.Sun, B.Ashley, B.A.Hughes and W.F.Tinney, "Optimal Power Flow by Newton Approach", IEEE. Trans. PAS-103 No.10, pp.2864-2880, 1984
- (4) R.Betancourt and F.L.Alvarado, "Parallel Inversion of Sparse matrix", IEEE Trans, on PWS-1, pp.74-81, 1986
- (5) S.M.Chang and V.Brandwain, "Partial matrix Refactorization", IEEE Trans, on Power System, Vol. PWS-1 No.1 pp. 193-200, February 1986
- (6) W.F.Tinney and J.M. Bright, "Adaptive Reduction for power Flow Equivalents", IEEE. Trans. PWS-2, No.2 pp.351-360, 1987
- (8) A.Gomez and L.G.Franquelo, "Node Ordering Algorithms for Sparse Vector Method Improvement", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. No.3, pp.73-79, February 1988
- (9) Ramon Betancourt, "an Efficient Heuristic Ordering Algorithm for Partial Matrix Refactorization", IEEE Trans. on Power Systems, Vol.3,No.3, pp.1181-1187 August 1988
- (10) A.Gomez and L.G.Franquelo, "an Efficient Ordering Algorithm to Improve Spase Vector Method", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. No.3, pp.73-79, February 1988
- (11) W.F. Tinney and J.W.Walker, "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization" IEEE Procee. Vol.55, pp.1801-1809, 1967