

비동차 미분 방정식을 이용한 외부전자파에 의한 전송선로 결합 해석

명 성 호 이 기 철  
한 국 전 기 연 구 소

The Coupling Analysis of Electromagnetic Wave to Transmission Line using Nonhomogeneous Differential Equations.

Sung-Ho Myung . Ki -Chul Lee  
Korea Electrotechnology Research Institute

ABSTRACT

The line equations can be expressed by a set of nonhomogeneous differential equation where forcing terms of these equations have been adopted.

Equivalent-circuit representations of this paper are derived from solutions of the equations.

The contribution of the external wave to the line is expressed in terms of ideal sources in the form of a cascade connection to the line.

These representations are conveniently applicable to the various types of transmission lines because these lines can often be written in the form of a chain matrix.

1. 서 론

외부 전자파에 의해 야기되는 전송 선로 유기 전류를 구하는 문제는 현재 EMC 분야에 있어 중요한 관심사 중의 하나이다.

이의 해석으로 종래에는 전압 V와 I에 관한 homogeneous differential equations으로 표현하여 여기에 등가원이 경계지 조건으로 포함되는 방법으로 구하였으나 본 연구에서는 등가원으로 표현되는 forcing terms을 주어 nonhomogeneous differential equations으로 구하였는데 이것은 동차

미분 방정식을 이용한 경계지 조건의 풀이보다 해석이 오히려 간결하였다. 이것을 이용하여 본 연구에서는 첫째로, 미분 방정식을 상태 함수로 표현 하는 과정에서 얻어지는 등가 회로 불 이상적인 등가원이 포함된 4단자 회로망으로 취급하여 유기전류를 구하였다. 둘째로, 선로의 4단자 정수로 표현되는 transition matrix의 특성의 의하여 전송 선로 모델의 1차측과 2차측이 간단히 converting 될수 있어 이것을 이용하여 특성 임피던스가 다른 선로의 결합 유기 전류를 해석하였다. 셋째로, 본연구에서 구한 결과를 이용하여  $\rho = 1$ 인 완전평면도체위에 놓여있는 전송선로를에서 parameter 변화에 따른 유기 전류를 해석하였다.

II. 선로 방정식

다음 그림 1은  $\rho = 1$ 인 금속판위에 직경  $d$ 인 전송선로가 높이  $h$ 로 놓여있는 것을 나타내었다.

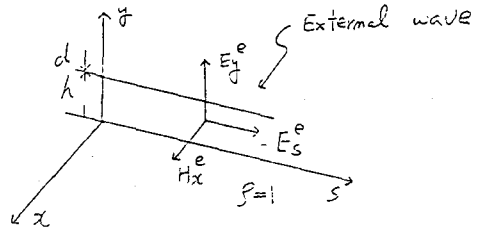


그림 1 완전도체 ( $\rho = 1$ ) 위의 전송선로 여기에 외부 평면파에 의해 선로가 여기되면 유도 전류가 흐르게 되는데 이러한 경우의 해석은 전압 V와 전류 I에 대한 다음과 같은 nonhomogeneous 미분 방정식으로 표현할 수 있다.

$$-\frac{dV}{ds} = j\omega L I + V_f \quad (1a)$$

$$-\frac{dI}{ds} = j\omega C V + I_f \quad (1b)$$

여기서 forcing terms  $V_f$  와  $I_f$  는 다음과 같이 표현된다.

$$V_f = E_s^e(s, 0) - E_s^e(s, h) + \frac{d}{ds} \int_0^h E_y^e(s, y) dy \quad (2a)$$

$$I_f = j\omega C \int_0^h E_y^e(s, y) dy \quad (2b)$$

식 (1a) 와 (1b)를 matrix 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{ds} X(s) = A X(s) + f(s) \quad (3a)$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} V(s) \\ I(s) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & j\omega L \\ j\omega C & 0 \end{bmatrix}, f(s) = \begin{bmatrix} -V_f(s) \\ I_f(s) \end{bmatrix}$$

State variables에 의한 식 (3a)의 해는 다음과 같이 나타내어진다.

$$X(s) = \phi(s-s_0) X(s_0) + \int_{s_0}^s \phi(s-\tau) f(\tau) d\tau \quad (4)$$

여기서  $s_0$  와  $s$  는 선로의 시작점과 종단점이며 State transition matrix  $\phi$  는 식 (5)를 이용하여 식 (6)과 같이 구해진다.

$$\phi(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} \quad (5)$$

$$\phi(\tau) = \begin{bmatrix} \cos \beta \tau & -jZ_0 \sin \beta \tau \\ -j\frac{1}{Z_0} \sin \beta \tau & \cos \beta \tau \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad Z_0 = \sqrt{L/C}$$

식 (4)와 같이 표현되는 등가회로를 고찰하면 S점에 전압원과 전류원이 집중되어 있는 그림 2와 같이 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

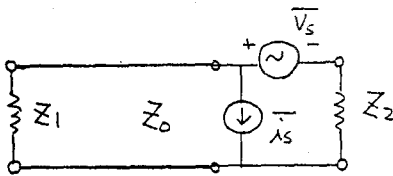


그림 2 식(4)에 대한 등가회로

한편 식 (4)를  $\phi(s-s_0) \cdot \phi^{-1}(s-s_0) = 1$  를 이용하여 달리 표현하면 식 (7)과 같이 된다.

$$X(s) = \phi(s-s_0) \left\{ X(s_0) + \int_{s_0}^s \phi^{-1}(s_0-\tau) f(\tau) d\tau \right\} \quad (7)$$

앞에서와 마찬가지로 식 (7)를 등가회로로 표현하면 S점에 등가원이 집중되어 있는 그림 3과 같이 나타내진다.

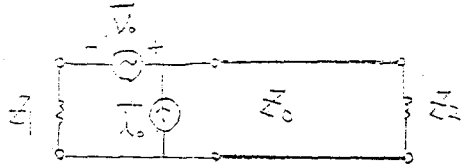


그림 3 식 (7)에 대한 등가회로

### III. 전자파에 의한 유기 전류

외부 전자파에 의해 유기되는 전류를 다음 그림 4와 같은 모델에서 고찰한다.

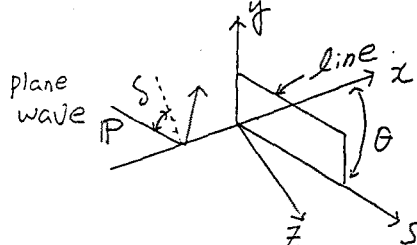


그림 4 전송 선로 모델

Poynting Vector  $IP$ 는 X-Y 평면에 평행으로 놓여있고 incident 각도는  $\theta$  일때 외부 입사 전계는 직립파와 (= 1인 금속평면에서 반사되는 반사파의 합인 다음식 (8)과 같이 주어진다.

$$E_y^e(s, y) = 2E_0 \sin \delta \cos(\beta y \cos \delta) \quad (8)$$

$S = 0$  인점을 위상 기준으로 보면 S점에서는 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$E_y^e(s, y) = 2E_0 \sin \delta \cos(\beta y \cos \delta) e^{-j\beta \cos \theta \sin \delta \cdot s} \quad (9)$$

마찬가지로 방법 Ee (S, y)를 구하면 식 (10)과 같이 표현된다.

$$E_s^e(s, y) = 2jE_0 \cos \theta \cos \delta \sin(\beta y \cos \delta) e^{-j\beta \cos \theta \sin \delta \cdot s} \quad (10)$$

실제적인 양단의 유기전류를 구하기 위하여 그림 3을 4단자 회로망으로 다시 표현하면 그림 5와 같이 된다.

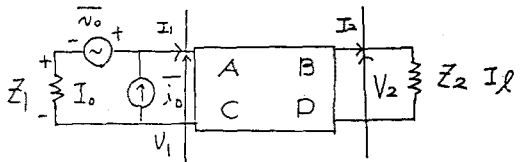


그림 5 S0점에 등가원이 있을때 4단자 회로망 여기서 회로 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$V_1 = I_0 Z_1 + \bar{V}_0 \quad (11a) \quad I_1 = -I_0 + \bar{I}_0 \quad (11b)$$

$$V_2 = I_2 Z_2 \quad (11c) \quad I_2 = I_2 \quad (11d)$$

위 (11a) ~ (11d) 를 풀면 S점에서 전류  $I_2$  이 식 (12)와 같이 나타내어진다.

$$I_l = \bar{V}_0 + Z_1 \bar{I}_0 / A Z_2 + B + C Z_1 Z_2 + D Z_1 \quad (12)$$

마찬가지로 방법으로 그림 2를 4단자 회로망으로 표현하여 전류  $I_0$ 를 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$I_0 = -\bar{V}_S + Z_2 \bar{I}_S / A Z_2 + B + C Z_1 Z_2 + D Z_1 \quad (13)$$

따라서 (12) 와 (13)에서 알수 있는 바와 같이  $\bar{V}_0$ ,  $\bar{I}_0$ ,  $\bar{V}_S$ ,  $\bar{I}_S$ 를 구하여  $I_0$  와  $I_l$ 를 얻을 수 있다.

IV. 선로 접속 해석

앞의 II와 III에서는 전송 선로가 일정한 경우를 고찰하였으나 실제로는 선로의 형태가 다른것이 서로 결합되어 있고 분지선도 파생되는 등 복잡한 양상을 띄우고 있다.

이러한 경우 결합 패턴을 구하는 것의 일환으로 여기에서는 앞의 그림 2와 그림 3과 같은 등가 회로를 이용한 회로 해석인 방법으로 분석하여 본다.

식 (4)에서 초기치 조건을 0이라고 하면

$$X(s) = \int_{s_0}^s \phi(s-\tau) f(\tau) d\tau \quad (14)$$

식 (2a), (2b)와 식 (6)을 이용하여 식 (14)를 나타내면 다음과 같다.

$$X(s) = \int_{s_0}^s \left\{ \cos \beta(s-\tau) j Z_0 \sin \beta(s-\tau) \left[ E_S^e(s, 0) - E_S^e(s, h) + \frac{d}{ds} \int_{s_0}^s E_S^e(s, y) dy \right] + j \omega C \int_{s_0}^s E_S^e(s, y) dy \right\} d\tau \quad (15)$$

이것을 풀면 식 (16)과 같은 결과로 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{V}_0 \\ \bar{I}_0 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \beta(s-\tau) \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \beta(s-\tau) \end{pmatrix} \int_{s_0}^s E_S^e(\tau, y) dy \right\}_{\tau=s_0}^{\tau=s} \\ &+ \int_{s_0}^s \left\{ \begin{pmatrix} \cos \beta(s-\tau) \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \beta(s-\tau) \end{pmatrix} \left[ E_S^e(\tau, 0) - E_S^e(\tau, h) \right] \right\} d\tau \quad (16) \end{aligned}$$

한편, 식 (7)를 초기치 조건 0으로 하고 풀면

$$X(s) = \phi(s-s_0) \int_{s_0}^s \phi(s-\tau) f(\tau) d\tau \quad (17)$$

이된다.

따라서 식 (17)은 식 (18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(s) = \phi(s-s_0) \int_{s_0}^s \left\{ \begin{pmatrix} \cos \beta(\tau-s_0) j Z_0 \sin \beta(\tau-s_0) \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \beta(\tau-s_0) \cos \beta(\tau-s_0) \end{pmatrix} \left[ E_S^e(\tau, 0) - E_S^e(\tau, h) + \frac{d}{ds} \int_{s_0}^s E_S^e(\tau, y) dy \right] + \omega C \int_{s_0}^s E_S^e(\tau, y) dy \right\} d\tau \quad (18)$$

식 (18)을 풀어 식 (16)과 비교하면 식 (19)와 같은 결과를 얻을 수 있다

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_S \\ \bar{I}_S \end{pmatrix} = -\phi(s-s_0) \cdot \begin{pmatrix} \bar{V}_0 \\ \bar{I}_0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$S-S_0 = l$ 이라 하고 그 구간의 전송선로 transition matrix를  $\phi_l$ 이라 할때 식 (19)는 식 (20)과 같이

$$-\begin{pmatrix} \bar{V}_S \\ \bar{I}_S \end{pmatrix} = \phi_l(l) \begin{pmatrix} \bar{V}_0 \\ \bar{I}_0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

나타내어진다.

여기에서 그림 6과 같은 선로 접속 모델을 고찰하여 본다

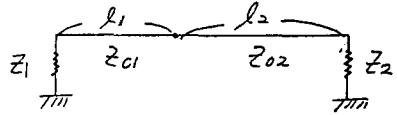


그림 6 특성 임피던스가 서로 다른 선로 접속 모델 특성 임피던스가  $Z_{01}$ ,  $Z_{02}$ 인 길이  $l_1$ ,  $l_2$ 의 전송 망단 임피던스  $Z_1$  과  $Z_2$ 로써 결합되어 있을때 유기 전류를 앞에서 구한 결과를 가지고 구하여 본다. 먼저 이 모델에 대한 등가회로를 그림 3처럼 적용하면 그림 7 처럼 표현된다.

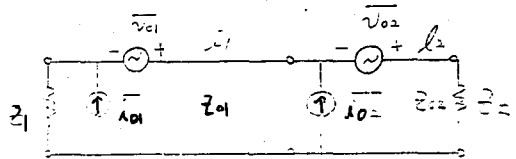


그림 7 등가원이 좌측에 있을때 등가회로

그림 7의 회로에서  $V_{02}$ ,  $i_{02}$ 를 식 (20)을 사용하여 그림 8과 같은  $V_0$ ,  $i_0$ 에 포함시키면 식 (21)과 같이 표현 된다.

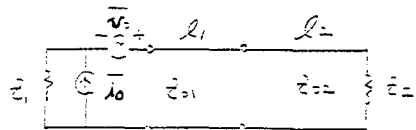


그림 8  $Z_1$ 측으로 환산한 등가회로

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_0 \\ \bar{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{01} \\ \bar{I}_{01} \end{pmatrix} + \phi_l^T(l) \begin{pmatrix} \bar{V}_{02} \\ \bar{I}_{02} \end{pmatrix} \quad (21)$$

마찬가지로 방법으로 그림 6을 그림 2와 같은 등가 회로로 표현하고 그때의  $l_1$ 과  $l_2$ 에 유기되는 전압 원, 전류원을  $\bar{V}_{s1}$ ,  $\bar{I}_{s1}$ ,  $\bar{V}_{s2}$ ,  $\bar{I}_{s2}$ 라 하면  $Z_1$  측으로 환산된  $\bar{V}_s$ ,  $\bar{I}_s$ 는 식 (21)과 같은 matrix 형태인 식 (22)처럼 나타내진다.

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_S \\ \bar{I}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{S1} \\ \bar{I}_{S1} \end{pmatrix} + \phi_l(l) \begin{pmatrix} \bar{V}_{S2} \\ \bar{I}_{S2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

한편, 식 (12) 와 식 (13)을 이용하여  $I_0$ ,  $I_l$ 를 구할때 A, B, C, D는 식 (23)과 같은 4단자 정수 결합을 사용한다.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{L1} & B_{L1} \\ C_{L1} & D_{L1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{L2} & B_{L2} \\ C_{L2} & D_{L2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

V. 해석에

지금까지 구한 결과를 이용하여 외부 전자파에 의한 결합 유기 전류를 그림 4와 같은 전송 선로 모델에서 구하여 본다

1. 전송 선로가 일정한 경우

다음과 같은 선로 조건에서 유기 전류를 해석한다.

- a. 전송 선로 직경 : 0.5 mm
- b. 양단 임피던스 :  $Z_1 = Z_2 = 50 \Omega$
- c. 입사 각도 :  $\delta = 45^\circ$
- d. 외부 전자파 주파수 :  $f = 1 \text{ GHz}$
- e. 선로 길이 :  $l = 15 \text{ Cm}$
- f. 전송 선로 높이 :  $h = 0.3 \text{ mm}$
- g. 외부 전자파 세기 :  $E_0 = 1 \text{ V/m}$

식 (4)에서 초기치 조건을 0으로 하고 식 (6) 및 식 (2a), (2b)를 이용하여  $\bar{V}_s$  와  $\bar{i}_s$ 를 구하고 식 (7)에서 마찬가지로 방법으로  $\bar{V}_0$  와  $\bar{i}_0$ 를 구하여 식 (12)와 식 (13)을 적용하면  $I_0$  및  $I_0'$ 을 얻을 수 있다. 위조건으로,  $Z_1$ 에 유기되는 전력을  $\theta$  변화에 따른 값으로 구한 결과를 그린 것이 그림 9이다. 여기서 유기 전력은  $P = I^2 R$ 로 표현되므로  $P_1 = I_0^2 \cdot Z_1$ 이다.

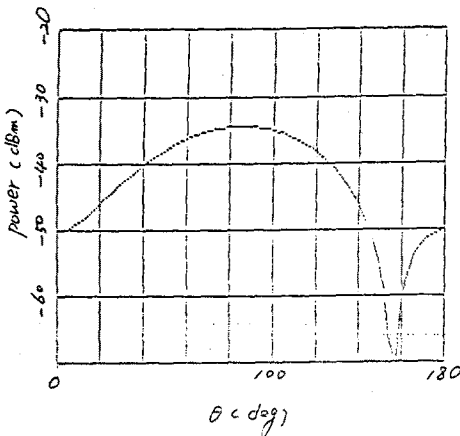


그림 9  $\theta$ 에 따른  $Z_1$ 에 유기되는 전력 ( $l = 15 \text{ Cm}$ )

앞의 조건에서 선로 길이  $l$ 을 변화시켰을때 결합 전력을 구한 결과를 그림 10에 나타내었고, 선로 높이  $h$ 를 변화시켰을때 결합 전력값을 그림 11에 나타

내었다. 또한, 외부 전자파 주파수를 변화시켰을때 결합 전력값을 그림 12에 나타내었다.

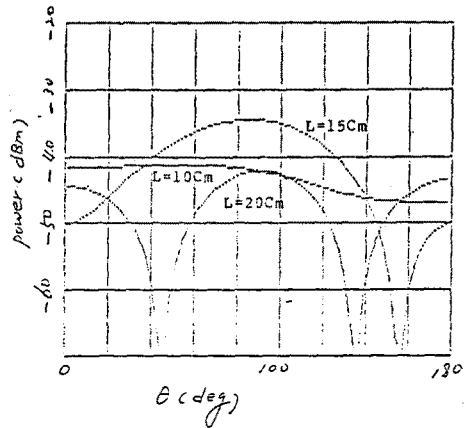


그림 10 선로길이  $l$ 의 변화에 따른 유기결합 전력

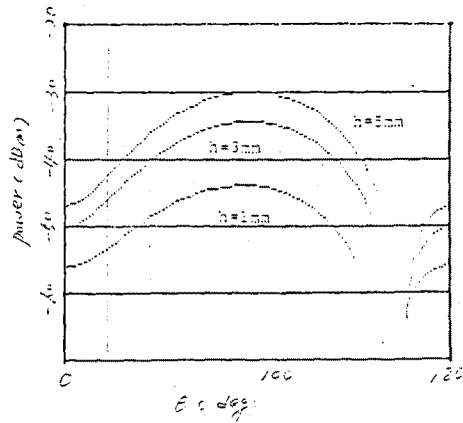


그림 11 선로 높이  $h$ 의 변화에 따른 유기 결합 전력

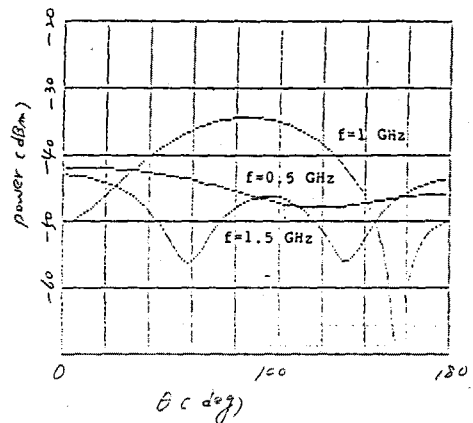


그림 12 외부주파수  $f$ 의 변화에 따른 유기 결합 전력

2. 복성 임피던스가 다른 2개의 선로가 결합된 경우

선로 조건은 기본적으로 앞의 1과 같다고 하고 그림 6에서 몇가지 조건만 변화시켜 유기 결합 전력을 구하여 본다

먼저  $l_1 = l_2 = 7.5$  Cm 일때  $Z_{o2}$ 가  $Z_{o1}$ 의 1.1배, 1.3배, 1.5배인 경우의 특성 임피던스를 가질때 결합 전력을 그림 13에 나타내었으며  $Z_{o2}$ 가  $Z_{o1}$ 의  $1/1.1$ 배,  $1/1.3$ 배,  $1/1.5$ 배인 경우의 결합 전력을 그림 14에 나타내었다.

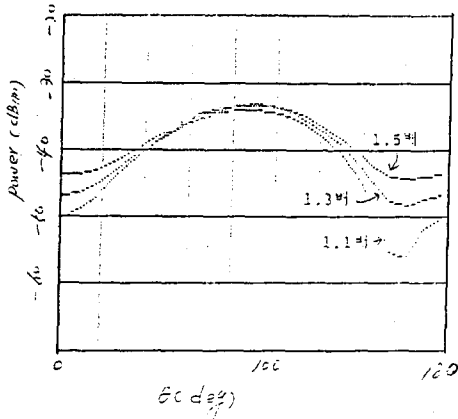


그림 13  $l_1 = l_2 = 7.5$  Cm이고  $Z_{o2}/Z_{o1}$ 에 따른 유기 결합 전력

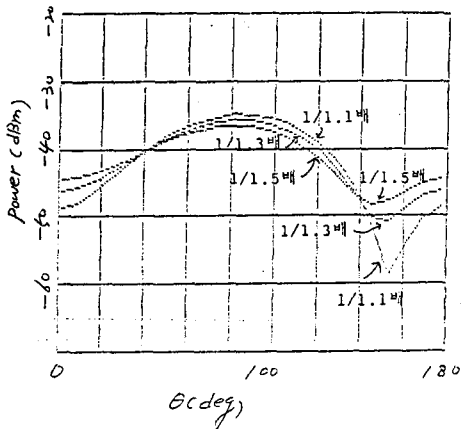


그림 14  $l_1 = l_2 = 7.5$  Cm 이고  $Z_{o2}/Z_{o1}$ 에 따른 유기 결합 전력

VI. 결 론

외부 전자파에 의해 유기되는 전류를 구하는 해석방법을 state variables에 의한 방법을 도입

하여 풀이 하였으며 식의 표현으로 부터 등가원이 포함된 회로 개념을 이용한 4단자 회로망으로 취급하여 해를 구하였다. 이것은 종래의 동차 미분방정식으로 해석했던 것보다 간편하고 이해가 더 확실함을 알 수 있었다. 또한 4단자 정수로 표현되는 transition matrix의 특성에 의하여 회로 양단이 간단하게 Converting 될 수 있어 이를 사용하여 특성 임피던스가 서로 다른 선로 접속시의 유기 전류 해석을 하였다. 이러한 해석은 앞으로 분지선이 포함된 복잡한 전송 선로를 해석하는 기초가 될것이다.

VII. 참고 문헌

[1] K.S.H. Lee, "Two Parallel terminated conductors in external fields," IEEE Trans. Electromag. Compat., Vol EMC-20, No 2, pp. 286-296, May 1978.

[2] C.D. Taylor, R.S Satterwhife and C.W. Harison, Jr., "The response of a terminated two-wire transmission line excited by a nonuniform electromagnetic field," IEEE Trans. Electromagn. Compat., Vol. EMC-18, No.4, pp. 183-190, Nov. 1976.

[3] C.R. Pavl and R.T. Abraham, "Coupling of electromagnetic fields to transmission lines," in proc. IEEE Int. symp. Electromagn. Compat., 1981, pp. 164-170

[4] Albert A. Smith, JR. " Coupling of external electromagnetic fields to transmission lines," Interference Control Technologies, Inc. 1987

[5] 명성호, 이기철, "외부전자파와 전송 선로 결합 해석 연구" '88 대한전기학회추계학술대회 논문집, pp 302-305, 1988